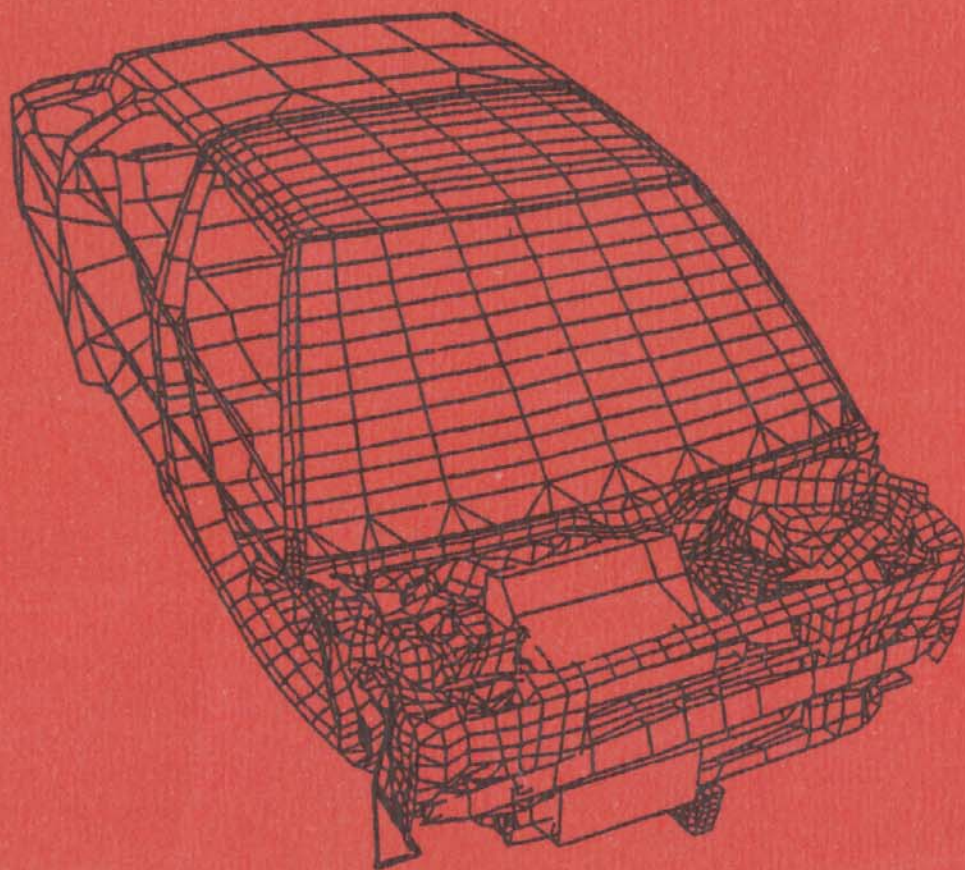


Математика и САПР 2

Вычислительные
методы

Геометрические
методы



Издательство «МИР»

MATHÉMATIQUES ET CAO

Volume 3
CALCUL SCIENTIFIQUE
par

Pierre Germain-Lacour
Le chapitre 4 de cet
ouvrage est dû à
P. L. George, F. Pistre

Collection dirigée par Yvon Gardan
Professeur, Université de Metz

Hermes Publishing

Volume 4
COURBES ET SURFACES
par

Pierre Bézier

Математика и САПР

В двух книгах

Книга **2**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Перевод с французского
канд. физ.-мат. наук В. В. Коваленко
и канд. физ.-мат. наук С. Д. Чигиря

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук Н. Г. Волкова



Москва «Мир» 1989

ББК 32.97
М33
УДК 681.3.082.5

Авторы: Жермен-Лакур П., Жорж П. Л., Пистр Ф.,
Безье П.

М33 Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с
франц./Жермен-Лакур П., Жорж П. Л., Пистр Ф.,
Безье П. — М.: Мир, 1989. — 264 с., ил.
ISBN 5-03-000465-3

Книга французских авторов посвящена численным методам, применяемым в САПР, в том числе методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных, а также методам аппроксимации кривых и поверхностей.

Для специалистов в области автоматизации процессов проектирования и конструирования на ЭВМ, а также для студентов вузов, изучающих САПР.

М $\frac{2004060000-271}{041(01)-89}$ 111-89

ББК 32.97

Редакция литературы по информатике и робототехнике

ISBN 5-03-000465-3 (русск.)
ISBN 5-03-000464-5 (русск.)
ISBN 2-88601-042-6 (франц.)

© Hermes Publishing, 1986, 1987

© перевод на русский язык, «Мир», 198

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вторая книга монографии «Математика и САПР»¹⁾ состоит из двух частей (части 3 и 4), которые посвящены общим методам вычислений в САПР и методам построения изображений.

В предисловии к первой книге я говорил о том, что программное обеспечение САПР призвано решить две задачи: 1) описание геометрических характеристик объектов, необходимое при их производстве; 2) описание функционирования объектов, необходимое при выборе их оптимальных характеристик. В соответствии с этим программное обеспечение САПР можно разбить на две части: программы геометрического моделирования и программы функционального моделирования. В первых большое место занимают алгоритмы и программы построения кривых и поверхностей, обладающих необходимыми свойствами гладкости. Ко вторым относятся программы численного решения уравнений, описывающих функционирование систем.

Часть 3 посвящена численным методам, применяемым в САПР. Представлены численные методы решения систем обыкновенных уравнений, уравнений в частных производных. В отличие от большинства пособий на эту тему изложение носит сугубо прикладной характер.

Часть 4 посвящена разработанным автором методам аппроксимации кривых и поверхностей полиномами, зависящими от параметра. Эти методы достаточно просты в реализации и дают неплохие результаты.

Читатель может заметить, что в обеих книгах рассмотрены очень близкие проблемы. Это, однако, не означает дублирования, так как авторы описывают свои собственные разработки, и их подходы к решению одних и тех же задач существенно различаются. Читателю предоставляется возможность выбрать тот или иной метод в зависимости от особенностей своей задачи. Назвать универсальный метод, оптимальный для всех задач, к сожалению, нельзя.

Данная книга, как и первая, может использоваться как справочное пособие. В основном она доступна для начинающих, но из-за лаконичности изложения для ее успешного изучения желательно иметь общее представление о численных методах. Книга полезна также разработчикам и пользователям САПР при решении практических задач.

Книгу перевели В. В. Коваленко (часть 3) и С. Д. Чигирь (часть 4).

Н. Г. Волков

¹⁾ Математика и САПР: в 2-х кн. Кн. 1. Пер. с франц. — М.: Мир, 1988.

Часть 3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

П. Жермен-Лакур, П. Л. Жорж, Ф. Пистр

Глава 1

Введение

1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Системы автоматизированного проектирования (САПР) предоставляют широкие возможности конструкторам и проектировщикам. С помощью САПР можно точно описать производимое изделие, выявить особенности его функционирования, упростить технологию изготовления. В САПР имеются средства для точного описания геометрической формы изделий, анализа взаимосвязей различных параметров, а также возможность оптимизации параметров изделия. Облегчается решение проблем стандартизации и учета различных норм и ограничений. Все это приводит к увеличению производительности труда конструкторских и проектных бюро.

Современные коммерческие САПР (CATIA, EUCLID, STRIM 100, SAPHIR, RAFEC, CADAM, CADDS4X, ANVIL, IDEAS) решают главным образом задачи геометрического представления изделий, а оценку их технических характеристик осуществляют с помощью вычислительных программ, не входящих в состав указанных систем. Желательна более тесная связь между САПР и этими вычислениями, так как САПР предоставляет хорошие возможности пользователю: в частности, она позволяет описывать геометрические характеристики изделия и его частей, дает возможность применять различные базы данных и средства графического представления результатов расчета. Эта связь, однако, затруднена рядом факторов:

- 1) если система геометрического описания объектов универсальна, то описание функционирования и физических свойств зависит от типа изделия и привлекает самые разные дисциплины (механику, термодинамику, электричество и т. д.);
- 2) в ряде случаев время вычислений слишком велико и не дает возможности использовать интерактивный режим работы;
- 3) если базы данных имеют узкую направленность, их трудно адаптировать к новым задачам;
- 4) ресурсы графических средств ограничены и часто с трудом справляются с такими задачами, как многократное воспроизведение линий тока, поверхностей уровня, переходных явлений и т. п.;
- 5) современные САПР велики по объему, что затрудняет их обслуживание и развитие. Так, например, система CADDS4X фирмы Computervision содержит около шести миллионов операторов исходной программы.

Из сказанного ясно, что вычислительные средства, необходимые для описания физических характеристик объектов, должны развиваться как в рамках САПР, так и вне их.

В данной части книги излагаются методы вычислений, предназначенные для описания физических характеристик и функционирования объектов. Проблемы геометрического описания будут рассмотрены в следующей части. Метод изложения — от простого к сложному, при этом мы будем стараться избегать углубления в технические детали. Изложение будет вестись на инженерном, а не на математическом языке, хотя для каждой задачи будет приводиться ее математическое решение при необходимости с включением алгоритма или программы на языке Фортран. При этом мы будем отдавать предпочтение простым и надежным методам.

Следует отметить, что выбранные для рассмотрения задачи не являются полностью независимыми. Некоторые из них близки друг другу, хотя и решаются разными методами. Ряд задач служит основой для решения других, более сложных задач.

Итак, наша основная цель — ознакомить пользователей и специалистов с методами вычислений, используемыми в САПР.

1.2. ВЫЧИСЛЕНИЯ И САПР

Любое автоматизированное вычисление основано на построении модели, которая описывает изучаемое явление и позволяет предсказать его развитие. С помощью алгебраических, дифференциальных и других уравнений модель представляет те свойства явления, которые необходимы для предсказания, и пренебрегает свойствами, не оказывающими влияния на искомые результаты. Модель содержит два типа физических величин: исходные данные и результаты. Для автоматизации вычислений каждую величину необходимо представить конечным множеством скалярных значений. Так, например, функция определяется набором ее значений для конечного множества точек в области ее определения, а значения в других точках находят интерполяцией.

Любое автоматизированное вычисление есть алгоритмическая обработка конечного множества исходных данных с получением конечного множества результатов. Вся эта информация (исходные данные и результаты) может располагаться — полностью или частично — в используемой САПР. Поэтому можно различать шесть уровней интеграции вычислений в зависимости от возможностей конкретной САПР. Они перечисляются ниже.

1.2.1. Внутренний алгоритм

В этом случае все данные содержатся в команде, запускающей вычисления, и в базе данных САПР, а множество результатов помещается в ту же базу. Такой подход, дающий полную возможность использовать интерфейсы с базой данных и функциональные средства самой системы (опции, графику, интерактивность и т. д.), типичен для разработчиков САПР. Фактически он сводится к увеличению системы на одну команду.

1.2.2. Макроинструкции

Как и в предыдущем случае, все данные и все результаты размещаются в базе данных системы, а их обработка проводится на языке, который хотя и очень близок к языку управления, но должен при каждом исполнении интерпретироваться системой САПР. При этом нет необходимости транслировать программу с Фортрана и пропускать ее через редактор связей, но зато интерпретация увеличивает время выполнения. Кроме того, при использовании языка такого типа не всегда можно достичь желательной гибкости структур данных, входов и выходов. Такой подход характерен для пользователей САПР.

1.2.3. Внешний алгоритм с интерфейсом

В этом случае данные и результаты тоже размещаются в базе данных, но их обработку производит внешняя программа (в интерактивном или пакетном режиме, это определяется спецификой вычислений), используя интерфейсы с базой данных, которые поставляются разработчиком САПР для этой цели. Примером может служить CATGEO для САПР CATIA. Такой подход часто практикуется специалистами по вычислительной технике предприятия, на котором применяется эта система.

1.2.4. Передача геометрических данных

Только часть данных и результатов размещается в базе данных САПР. С помощью САПР производится отбор данных, касающихся главным образом геометрии объекта, и формируется файл данных, который обрабатывается обычным способом вместе с другими данными. Часть результатов может быть аналогичным образом возвращена в САПР. Этот метод удобен, если время обработки велико.

1.2.5. Перенос геометрических данных

В этом случае результаты обработки не возвращаются в САПР и их интерпретация должна производиться без помощи САПР, которая располагает мощными, гибкими и хорошо известными пользователю средствами графического отображения.

1.2.6. Автономные вычисления

Обработка и управление данными и результатами производится вне САПР. Этим предоставляется большая свобода в организации вычислительного процесса, но, с другой стороны, необходимость управлять всем — данными, результатами, визуальным отображением, документацией и обучением пользователей — может оказаться слишком обременительной.

Все сказанное объясняет интерес к расширению возможностей, которые дает стандартизация интерфейса, базы данных и языка пользователя. Следующий этап — создание САПР, основанной на стандартной системе управления базой данных. К сожалению, многочисленные технические трудности тормозят это развитие, которое может быть столь же полезно, как и усилия, направленные на стандартизацию графических функций (GKS, PHIGS).

Глава 2

Численные методы

2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим решение уравнений типа $F(x) = 0$. В большей части задач, приводящих к системе n линейных уравнений с n неизвестными вида $Ax = b$, матрица A является симметричной и ленточной. Ленточной называется такая матрица, у которой все элементы вне полосы, расположенной вдоль главной диагонали, равны нулю. Полную информацию о ленточной матрице содержит таблица ее ненулевых элементов размерами $n \times l$, где n — порядок матрицы, l — число отличных от нуля диагоналей.

При решении системы $Ax = b$ классическим методом Гаусса в эту таблицу вместо матрицы A помещается матрица U разложения $A = LU$. В данном разложении, которое является единственным, L — нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, U — верхняя треугольная матрица. Реализующая метод Гаусса программа на Фортране (она приведена ниже) вычисляет решение за время, пропорциональное nl^2 , поэтому уравнения и неизвестные следует располагать так, чтобы лента была как можно более узкой.

```

SUBROUTINE GAUSSBD(A, B, N, LB, ND, EPS, KER)
*
*           M M E E E E S
*
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
DIMENSION A(ND, LB), B(ND)

```

- * Решение методом Гаусса системы $A \cdot X = B$ с симметричной и ленточной матрицей A
- * вычисляется разложение $A = LU$, диагональные члены L равны 1
- * A : на входе — строки A , начиная с диагонали, на выходе — строки U
- * B : на входе — правая часть, на выходе — вектор решения
- * N : число неизвестных
- * LB : ширина ленты, начиная с диагонального члена
- * NB : размерность в вызывающей программе
- * EPS : минимальное значение модуля ведущего элемента
- * KER : код ошибки (0 при нормальном завершении)

```

K = -1
IF( N .LE. 0 .OR. N .GT. ND ) GOTO 9
IF( LB .LE. 0 .OR. LB .GT. N ) GOTO 9
KER = 0
NLB1 = N - LB + 1
JSUP = LB
DO 4 K = 1 , N-1
  PIV = A(K,1)
  IF( ABS(PIV) .LE. EPS ) GOTO 9
  IMAX = K + LB - 1
  IF( K .LE. NLB1 ) GOTO 1
  IMAX = N
  JSUP = JSUP - 1
1  JMAX = JSUP
  II = 2
  DO 3 I = K+1 , IMAX
    T = A(K,II) / PIV
    JMAX = JMAX - 1
    JJ = JSUP
    DO 2 J = JMAX , 1 , -1
      A(I,J) = A(I,J) - T * A(K,JJ)
2    JJ = JJ - 1
    B(I) = B(I) - T * B(K)
3    II = II + 1
4  CONTINUE
K = N
PIV = A(N,1)
IF( ABS(PIV) .LE. EPS ) GOTO 9
B(N) = B(N) / PIV
JMAX = 1
DO 6 I = N-1 , 1 , -1
  S = B(I)
  JMAX = JMAX + 1
  IF( I .LE. NLB1 ) JMAX = LB
  JJ = I + 1
  DO 5 J = 2 , JMAX
    S = S - A(I,J) * B(JJ)
5    JJ = JJ + 1
6  B(I) = S / A(I,1)
RETURN
9  KER = K
RETURN
END

```

Теоретически задача $Ax = b$ разрешима, если матрица A регулярна, и в общем случае не имеет решения, если A сингулярна. С вычислительной точки зрения эта задача более или менее проста в зависимости от того, насколько A далека от сингулярности. Выявить эту зависимость можно, исследуя связь Δx (вариаций решения x) с Δb (вариациями b) и ΔA (вариациями A).

Проведем преобразования:

$$Ax = b, \quad (2.1)$$

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad (2.2)$$

$$(A + \Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot A^{-1}b,$$

$$\Delta x = (I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (\Delta b - \Delta A \cdot A^{-1}b). \quad (2.3)$$

Далее мы воспользуемся неравенством

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}, \quad (2.4)$$

которое выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} (I + M) \cdot (I + M)^{-1} &= I, \\ (I + M)^{-1} &= I - M \cdot (I + M)^{-1}, \\ \|(I + M)^{-1}\| &\leq \|I\| + \|M \cdot (I + M)^{-1}\| \leq 1 + \|M\| \times \|(I + M)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (2.4).

Используя выражения (2.3) и (2.4), можно написать

$$\|\Delta x\| \leq \|(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1}\| \times \|A^{-1}\| \times (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \times \|A^{-1}b\|),$$

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1} \cdot \Delta A\|} (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \times \|x\|),$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \times \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \times \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \times \|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

но $\|b\| \leq \|A\| \times \|x\|$, поскольку

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \times \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \times \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Величина $C(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$ называется числом обусловленности матрицы A . Если $\|\Delta A\|$ мало, то

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

поэтому можно сказать, что $C(A)$ есть коэффициент усиления относительных вариаций x по сравнению с относительными вариациями b и A . Очевидно, что $C(A)$ больше единицы и $C(A) \rightarrow +\infty$, если матрица A становится сингулярной.

Из сказанного следует, что численное решение системы $Ax = b$ с плохо обусловленными матрицами затруднено тем, что малые возмущения исходных данных ведут к большим возмущениям решения. Примером может служить классический матричный тест — матрица Хессенберга, которая очень плохо обусловлена, хотя и регулярна, симметрична и положительно определена:

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \dots & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

При решении систем с такими матрицами метод Гаусса неудобен, так как он не позволяет повысить устойчивость результата. Кроме того, число неизвестных системы $Ax = b$ может быть столь велико, что матрицу A нельзя разместить в оперативной памяти (хотя матрица обычно разрежена, т. е. содержит много нулей).

В таких случаях представляет интерес применение итерационных методов: Гаусса — Зейделя, верхней релаксации, сопряженных градиентов. При использовании этих методов в памяти хранятся только ненулевые элементы матрицы A , достаточные для вычисления линейного преобразования $w = Av$. На каждой итерации выполняется преобразование и качество промежуточного результата контролируется нормой остатка $r = Ax - b$.

Для решения систем с симметричной и положительно определенной матрицей можно воспользоваться методом сопряженных градиентов с предварительным улучшением обусловленности, алгоритм которого описывается следующим образом:

- задать A и b (ненулевые элементы);
- задать x^0 и ε ;
- вычислить $r^0 = Ax^0 - b$;
- решить систему $Mz^0 = r^0$;
- положить $d^0 = z^0$;
- для $k = 0, 1, \dots, n$ повторять:
 - $v^k = Ad^k$,
 - $\rho_k = \langle r^k, z^k \rangle / \langle d^k, v^k \rangle$,
 - $x^{k+1} = x^k - \rho_k d^k$,
 - $r^{k+1} = r^k - \rho_k v^k$,
 - решить систему $Mz^{k+1} = r^{k+1}$,
 - $\beta_{k+1} = \langle r^{k+1}, z^{k+1} \rangle / \langle r^k, z^k \rangle$,
 - $d^{k+1} = z^{k+1} + \beta_{k+1} d^k$
- до выполнения условия $\langle r^{k+1}, z^{k+1} \rangle \leq \varepsilon^2 \times \langle r^0, r^0 \rangle$.

Теоретически при отсутствии ошибок округления число итераций не больше порядка матрицы A . На практике же, если хорошо выбрана матрица M , итерационный процесс заканчивается гораздо раньше. Этот метод основан на замене системы $Ax = b$ системой $L^{-1}AL^{-t}(L^t x) = L^{-1}b$, где матрица L связана с матрицей M соотношением $M = LL^t$ и M близка к A . Матрицу M следует выбирать так, чтобы, с одной стороны, существенно улучшить обусловленность $L^{-1}AL^{-t}$ по сравнению с обусловленностью A , а с другой стороны, сделать время решения системы $Mz^{k+1} = r^{k+1}$ как можно меньшим. Среди предложенных в литературе вариантов выбора M следует отметить два особенно простых и эффективных: диагональная матрица из диагональных элементов A и матрица верхней релаксации

$$M = \frac{\omega}{2 - \omega} \left(\frac{1}{\omega} D - E \right) D^{-1} \left(\frac{1}{\omega} D - E \right)^t,$$

где D — диагональ A , E — ее нижний треугольник, ω — действительное число в пределах $1 < \omega < 2$. В последнем случае нет необходимости строить матрицу M , а все вычисления можно проводить с элементами A . Оптимальное значение ω находится анализом конкретного класса задач. Еще одно достоинство метода сопряженных градиентов состоит в том, что этот метод позволяет эффективно использовать преимущества современных векторных и параллельных компьютеров.

Описанный метод теоретически гарантирует сходимость за конечное число итераций. Но не все итерационные методы обладают этим свойством, поэтому во многих случаях приходится последовательно вычислять приближения $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ к неизвестному решению по формулам типа $x_{k+1} = f(x_k)$, где каждое приближение зависит от предыдущего.

Итерационный метод сходится, если

$$\forall \varepsilon, \exists N \text{ такое, что } n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Метод имеет сходимость порядка $\alpha > 0$, если

$$\forall \varepsilon, \exists N \text{ и } c \mid 0 < c < 1 \text{ такие, что}$$

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^\alpha} - c \right| < \varepsilon.$$

В частности, если $\alpha = 1$, сходимость называется линейной, если $\alpha = 2$, — квадратичной.

Метод Ньютона — Рафсона для решения нелинейного уравнения $F(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

имеет квадратичную сходимость, но можно получить и формулу со сходимостью порядка 3, разложив $F(x)$ в степенной ряд в окрестности решения:

$$F(x) = 0 = F(u) + \delta F'(u) + \frac{1}{2} \delta^2 F''(u),$$

где u близко к x и $\delta = x - u$. Если пренебречь членом с δ^2 , получим формулу Ньютона. Пренебрегая членами более высокого порядка, получим

$$\delta = x - u = -\frac{F(u)}{F'(u)} - \frac{1}{2} \frac{F''(u)}{F'(u)} \left(\frac{F(u)}{F'(u)} \right)^2.$$

Отсюда следует

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{F''(x_k)}{F'(x_k)} \left(\frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \right)^2.$$

В общем случае формула $x_{k+1} = f(x_k)$ обеспечивает сходимость к x такому, что $x = f(x)$, если $-1 < f'(x) < +1$, что можно легко проверить для частного случая

$$f(x) = px + 1 - p \Rightarrow x_{k+1} = px_k + 1 - p,$$

где приближения сходятся к $x = 1$, если $-1 < p < 1$. Если $f'(x) = 0$, имеем квадратичную сходимость, классическим примером которой служит формула

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right),$$

которая сходится к $x = \sqrt{a}$.

Приведем еще две формулы для решения уравнения $F(x) = 0$ с помощью приближений $x_{k+1} = f(x_k)$:

$$f(x) = x - \frac{FF'}{(F')^2 - \frac{1}{2}FF''},$$

сходимость которой имеет третий порядок, но становится линейной, если корень $F(x)$ кратный, и

$$f(x) = x - \frac{FF'}{(F')^2 - FF''},$$

сходимость которой всегда квадратична независимо от кратности корня.

Эти формулы можно более или менее просто обобщить на случай, когда неизвестное x имеет несколько составляющих. Для примера напомним метод Бэрстоу¹⁾ для нахождения корней полинома

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Метод состоит в том, что $p(x)$ делится на трехчлен

$$t(x) = x^2 - sx + p \Rightarrow p(x) = t(x)q(x) + (r_0x + r_1),$$

где r_0 и r_1 зависят от s и p , и методом Ньютона отыскивается вектор $\begin{Bmatrix} s \\ p \end{Bmatrix}$, обращающий в нуль вектор $\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{Bmatrix}$.

Все описанные итерационные методы обеспечивают сходимость в некоторой окрестности решения, которая может быть очень малой. По этой причине в определенных случаях более устойчивыми могут оказаться простые методы, как, например, метод дихотомии для нахождения корня $F(x)$:

- 1) найти $a < b$ такие, что $F(a) \times F(b) < 0$;
- 2) вычислить $c = \frac{a+b}{2}$ и $F(c)$;
- 3) если $F(a) \times F(c) > 0$, положить $a = c$, в противном случае положить $b = c$;
- 4) вернуться к 2), если $(b-a) > \varepsilon$.

Чтобы закончить этот раздел, приведем оригинальный метод решения систем линейных уравнений, близкий к методу сопряженных градиентов и к методу Ланцоша.

¹⁾ Другое название — метод Хичкока. — Прим. ред.

Пусть A — симметричная и положительно определенная матрица, B — симметричная матрица, y_1 — произвольный вектор.

Последовательно вычисляются:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (y_1^t A y_1)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_1 = \alpha_1 y_1, \\ y_2 &= B A v_1 - (v_1^t A B A v_1) v_1, \quad \alpha_2 = (y_2^t A y_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_2 = \alpha_2 y_2, \\ y_3 &= B A v_2 - (v_2^t A B A v_2) v_2 - (v_1^t A B A v_2) v_1, \\ \alpha_3 &= (y_3^t A y_3)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_3 = \alpha_3 y_3, \\ y_4 &= B A v_3 - (v_3^t A B A v_3) v_3 - (v_2^t A B A v_3) v_2, \\ \alpha_4 &= (y_4^t A y_4)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_4 = \alpha_4 y_4, \\ &\dots \\ y_{i+1} &= B A v_i - (v_i^t A B A v_i) v_i - (v_{i-1}^t A B A v_i) v_{i-1}, \\ &\dots \\ v_n &= \alpha_n y_n. \end{aligned}$$

В результате получаем n векторов v_i . Пусть V — матрица, содержащая эти векторы в качестве столбцов. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} V^t A V &= I \Leftrightarrow A^{-1} = V V^t, \\ V^t A B A V &= T = V^{-1} B A V, \end{aligned}$$

где T — трехдиагональная матрица.

Решением системы $Ax = b$ является

$$x = \sum_{i=1}^n (v_i^t b) v_i.$$

Решив эту систему, мы почти сразу получаем собственные векторы и собственные значения матрицы BA , так как эквивалентная ей матрица T — трехдиагональна. Если $B = I$, одновременно получаем обращение матрицы A , ее собственные значения и векторы. Если $A = K$ и $B = M^{-1}$, а M — диагональная матрица, получаем обращение K и собственные значения и векторы $M^{-1}K$. Все это достигается за n последовательных итераций, состоящих главным образом в выполнении преобразований BAv_i , которые производятся довольно быстро, если матрицы A и B разрежены, хотя их нулевые элементы могут быть рассредоточены.

Однако для применения этого метода требуется, чтобы собственные значения BA были простыми и хорошо изолированными, а вектор v_i должен иметь ненулевую составляющую по каждому из собственных направлений. Более того, даже в этом идеальном случае вычисления следует проводить с повышенной точностью. Поэтому метод, несмотря на всю его привлекательность, нельзя рекомендовать для широкого использования.

2.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Задача состоит в вычислении значения определенного интеграла

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx$$

в одно-, дву- и трехмерных пространствах.

Рассмотрим сначала случай одномерного пространства:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx.$$

Для начала выберем внутренние точки x_1, x_2, \dots, x_{n-1} такие, что $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$, и выпишем интеграл в виде точной суммы

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx,$$

с тем чтобы на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ сделать функцию $f(x)$ более регулярной. На всех отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ проведем линейную замену переменной интегрирования по формуле

$$\frac{u - a}{b - a} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

и введем функцию

$$g_i(u) = \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a} \frac{1}{\omega(u)} f \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{b - a} (u - a) + x_{i-1} \right],$$

где $\omega(u)$, a и b — произвольны. Тогда

$$I = \sum_{i=1}^n \int_a^b \omega(u) g_i(u) du.$$

Во многих частных случаях простая формула

$$\int_a^b \omega(u) g(u) du = \sum_{i=1}^{i=p} A_i g(a_i),$$

в которой значения $a_i \in [a, b]$ и A_i определяются конкретным методом, дает точный результат для всех полиномов степени ниже $2p$.

На практике для численного интегрирования применяют следующие методы:

- Гаусса — Лежандра: $\omega(u) = 1$, $a = -1$, $b = +1$;
- Гаусса — Чебышева: $\omega(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $a = -1$, $b = +1$;
- Гаусса — Лагерра: $\omega(u) = e^{-u}$, $a = 0$, $b = +\infty$;
- Гаусса — Эрмита: $\omega(u) = e^{-u^2}$, $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Среди формул, использующих крайние точки отрезка интегрирования,

$$\int_a^b \omega(u) g(u) du = A_1 g(a) + \sum_{i=2}^p A_i g(a_i) + A_{p+1} g(b),$$

проще других формулы метода Гаусса — Якоби¹⁾ для различных значений p (к ним относятся формула трапеций и формула Симпсона).

Самым удобным и чаще всего применяемым является метод Гаусса — Лежандра. Приведем узлы и веса этого метода для различных значений p :

$$p = 1, \text{ порядок } 2, a_1 = 0, A_1 = 2;$$

$$p = 2, \text{ порядок } 4, -a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, A_1 = A_2 = 1;$$

$$p = 3, \text{ порядок } 6, -a_1 = a_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, a_2 = 0, A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9} \text{ и т. д.}$$

Для вычисления определенного интеграла в дву- или трехмерном пространстве следует разделить область интегрирования Ω на простые элементы — треугольники и четырехугольники (в двумерном) и четырехгранники и шестигранники (в трехмерном). Для интегрирования по квадрату или кубу достаточно использовать формулы Гаусса — Лежандра:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(u, v) du dv = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_i A_j f(a_i, a_j),$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(u, v, w) du dv dw \equiv \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p A_i A_j A_k f(a_i, a_j, a_k),$$

где A_i и a_i — те же, что и для одномерных интегралов, а u , v и w — локальные переменные, соответствующие рассматриваемому элементу.

¹⁾ В методе Гаусса — Якоби $a = -1$, $b = 1$, $\omega(u) = (1-u)^\alpha (1+u)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. — Прим. ред.

Подобные же формулы для каждого значения p существуют для треугольников и тетраэдров. Ниже приведены две такие формулы третьего порядка.

1) Треугольник (рис. 2.1):

$$I = \int_T f(u, v) du dv = \Delta [Af(a) + Bf(b) + Cf(c) + Df(d)]$$

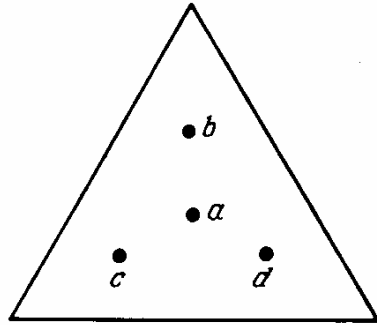


Рис. 2.1.

Плоские
барицентрические
координаты

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} & A = -\frac{27}{48} \\ b = \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} & B = \frac{25}{48} \\ c = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5} & C = \frac{25}{48} \\ d = \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} & D = \frac{25}{48} \end{array} \right.$$

Δ — площадь треугольника.

2) Тетраэдр (рис. 2.2):

$$I = \int_T f(u, v, w) du dv dw = V [Af(a) + Bf(b) + Cf(c) + Df(d) + Ef(e)]$$

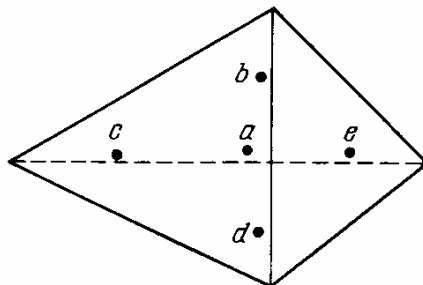


Рис. 2.2.

Объемные
барицентрические
координаты

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \quad A = -\frac{4}{5} \\ b = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \quad B = \frac{9}{20} \\ c = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \quad C = \frac{9}{20} \\ d = \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \quad D = \frac{9}{20} \\ e = \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \quad E = \frac{9}{20} \end{array} \right.$$

V — объем тетраэдра.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Пусть требуется решить задачу, представленную в канонической форме:

$$y' = f(x, y), \quad y(x = x_0) = y_0, \quad (2.5)$$

где y — неизвестная скалярная или векторная функция x .

Следует отметить, что если функция f не зависит от y , можно воспользоваться методами, описанными в разд. 2.2, так как

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (2.6)$$

В общем случае используется численный метод, состоящий в замене производной $y'(x) = dy/dx$ конечными разностями. Эту замену можно провести различными способами. Простейший из них

$$y'(x) \approx \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

при равенстве всех шагов $\Delta x = h$ приводит к явной формуле Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (2.7)$$

Легко можно получить и другие формулы:

• Неявная формула Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad (2.8)$$

которая имеет тот же порядок погрешности, что и формула (2.7), но менее

удобна, так как для вычисления y_{n+1} требуется знать y_{n+1} , а эта рекурсия замедляет вычисления.

• Формула трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (2.9)$$

• Формула

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), \quad (2.10)$$

которая имеет два преимущества — явную форму и погрешность метода третьего порядка.

Погрешность метода $\varepsilon(h)$ определяется разностью между точным значением левой части и правой частью приведенных формул¹⁾. Из формулы Тэйлора следует

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n + \dots,$$

поэтому для явной формулы Эйлера

$$\varepsilon(h) = y_{n+1} - y_n - hy'_n \approx \frac{h^2}{2}y''_n = O(h^2),$$

а для формулы (2.10)

$$\varepsilon(h) = y_{n+1} - y_{n-1} - 2y'_n \approx \frac{h^3}{3}y'''_n = O(h^3).$$

К сожалению, формула (2.10) не является A -устойчивой. Метод называется A -устойчивым, если, применяя его к уравнению $y' = -y$, получаем $y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ независимо от величины h .

На первый взгляд пригодны все методы порядка 2 и выше. Действительно, погрешность $O(h^2)$ на один шаг приводит к погрешности $O(h)$ на n шагов, и, поскольку $x = nh$, можно получить сколь угодно малую погрешность для любого x , положив h достаточно малым. На самом деле этого недостаточно: нужна еще и устойчивость формулы, т. е. свойство, которое гарантирует ограниченность вариаций результата, вызываемых ограниченными вариациями данных. Все приведенные выше формулы устойчивы, но комбинируя две устойчивые формулы второго порядка

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n \text{ и } y_n = y_{n-1} + hy'_n,$$

получим формулу, шаг которой зависит не только от y_n , но и от y_{n-1} ,

$$y_{n+1} = -y_n + 2y_{n-1} + 3hf(x_n, y_n), \quad (2.11)$$

не обладающую свойством устойчивости. Применив эту формулу к решению уравнения $y' = 1$ с $y_0 = 0$ и $y_1 = h + \varepsilon$, получим

¹⁾ Это называется также погрешностью аппроксимации. — Прим. ред.

$$\begin{aligned} y_2 &= 2h - \varepsilon, \\ y_3 &= 3h + 3\varepsilon, \\ y_4 &= 4h - 5\varepsilon, \\ y_5 &= 5h + 11\varepsilon, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y_n = nh + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \right] \varepsilon.$$

Отсюда видно, что для данного $x = nh$ при $h \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ y_n не стремится к точному решению nh .

Приведенные выше простые формулы почти не используются в численном анализе из-за малого порядка погрешности. На практике применяют более сложные формулы, в том числе:

• Формула Рунге — Кутта четвертого порядка

$$k_0 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + k_2),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad (2.12)$$

которая имеет погрешность пятого порядка и A -устойчива, если $h < 2,75$. Применение этого метода Рунге — Кутта иллюстрируется приведенной ниже программой на Фортране

* программа решения уравнения $Y' = A \cdot Y$ при $A = -50$

* методом Рунге — Кутта четвертого порядка

* метод A -устойчив, если $H < 2,75 / (-A)$

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
DATA A/-50.0D0/
```

```
F(X,Y)=A*Y
```

```
1 X=0.0D0
```

```
Y=1.0D0
```

```
READ(5, '(G20.0)', END=20) H
```

```
WRITE(9, '(11X, ''VALEUR DE H = '', F10.4)') H
```

```
DO 10 I=1, 10
```

```
V=DEXP(A*X)
```

```
E=DABS(V-Y)/V
```

```
WRITE(9, '(4G20.6)') X, Y, V, E
```

```
G0=H*F(X, Y)
```

```
G1=H*F(X+H/2.0D0, Y+G0/2.0D0)
```

```
G2=H*F(X+H/2.0D0, Y+G1/2.0D0)
```

```
G3=H*F(X+H, Y+G2)
```

```
X=X+H
```

```

Y=Y+(G0+2.0D0*G1+2.0D0*G2+G3)/6.0D0
10 CONTINUE
GO TO 1
20 STOP
END

```

- Явная формула Адамса второго порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}), \quad (2.13)$$

которая имеет погрешность четвертого порядка, но отличается особой устойчивостью.

- Явная формула Милна третьего порядка

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}), \quad (2.14)$$

которая имеет погрешность пятого порядка, что можно легко проверить, показав, что она точна для всех полиномов четвертой степени.

- Неявная формула Милна первого порядка

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}), \quad (2.15)$$

погрешность которой $\varepsilon(h) = -\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(\xi)$ с $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$ тоже пятого порядка.

- Формула Хемминга

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3h}{8}(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1}), \quad (2.16)$$

которая близка к формуле (2.15) и имеет погрешность того же порядка, но более устойчива.

Для того чтобы избежать итераций при использовании формул (2.15) и (2.16), достаточно приближенно оценить величину y_{n+1} с помощью, например, формулы (2.14), а затем провести ее коррекцию однократным применением формулы (2.16). Следующие формулы позволяют получить погрешность шестого порядка:

$$\begin{array}{l}
\text{Предиктор} \\
\text{Корректор}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
(1) y_{n+1}^1 = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}), \\
(2) y_{n+1}^2 = y_{n+1}^1 + \frac{112}{121}(y_n - y_n^1), \\
(3) y_{n+1}^3 = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3h}{8}\{f(x_n, y_{n+1}^2) + 2f_n - f_{n-1}\}, \\
(4) y_{n+1} = y_{n+1}^3 - \frac{9}{121}(y_{n+1}^3 - y_{n+1}^1).
\end{array} \right. \quad (2.17)$$

Если задача сформулирована не в канонической форме $y' = f(x, y)$, а в неявном виде $\psi(x, y, y') = 0$, возможны два подхода к ее решению:

а) используя методы разд. 2.1, вычислить y' как корень z уравнения $\psi(x, y, z) = 0$ и затем решать обычным способом, что может оказаться долгим и трудным;

б) продифференцировать ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial z} y'' = 0,$$

что дает

$$y'' = g(x, y, y'). \quad (2.18)$$

Это уравнение второй степени легко привести к канонической форме, построив вектор

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} y \\ v \end{Bmatrix}$$

и записав (2.18) в виде

$$\vec{u}' = \begin{Bmatrix} y' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ g(x, y, v) \end{Bmatrix} = \vec{F}(x, \vec{u}). \quad (2.19)$$

Однако для решения уравнения (2.18), часто используемого в механике, удобнее пользоваться следующими формулами:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} [\alpha y''_{n+1} + (1 - \alpha) y''_n], \quad (2.20)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + h [\theta y''_{n+1} + (1 - \theta) y''_n],$$

которые при оптимальных значениях параметров $\alpha = \frac{1}{6}$ и $\theta = \frac{1}{2}$ обеспечивают погрешность пятого порядка. Ниже приведена программа, иллюстрирующая реализацию этих формул в три итерации (число итераций выбрано произвольно).

* Программа YQTDIF2:

* Решение дифференциального уравнения

* второго порядка: $Y'' = G(x, y, y')$

* Рассматривается на примере А: $Y'' =$

* $- [\text{OMEGA}^{**2}] * Y, Y_0, Y_{P0}$

* Используются формулы:

* $Y(N+1) = Y(N) + H * Y'(N) + 0.5 * H * H * [A * Y''(N+1) +$

* $(1-A) * Y''(N)]$

* $Y'(N+1) = Y'(N) + H * [T * Y''(N+1) + (1-T) * Y''(N)]$

* где $Y''(N)$ обозначает $G(X(N), Y(N), Y'(N))$

* Известно, что метод оптимален при $A = 1/6$ и $T = 1/2$

*

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
G(X,Y,YP)=-OMEGA2*Y
```

```

OMEGA=2.0D0*3.14159265358979D0
OMEGA2=OMEGA*OMEGA
Y0=1.0D0
YPO=0.0D0
A=1.0D0/6.0D0
T=1.0D0/2.0D0
H=0.01D0
WRITE(9, '(1X)')
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE OMEGA = ', F10.4)') OMEGA
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE Y0 = ', F10.4)') Y0
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE YPO = ', F10.4)') YPO
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE A = ', F10.4)') A
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE T = ', F10.4)') T
WRITE(9, '(11X, 'VALEUR DE H = ', F10.4)') H
WRITE(9, '(1X)')
X=0.0D0
Y=Y0
YP=YPO
YS=G(X, Y, YP)
DO 10 I=1, 10
V=DCOS(OMEGA*X)
E=DABS(V-Y)/V
WRITE(9, '(4G20.6)') X, Y, V, E
YS1=YS
Y1=Y+H*YP+0.5D0*H*H*(A*YS1+(1.0D0-A)*YS)
YP1=YP+H*(T*YS1+(1.0D0-T)*YS)
YS1=G(X+H, Y1, YP1)
Y1=Y+H*YP+0.5D0*H*H*(A*YS1+(1.0D0-A)*YS)
YP1=YP+H*(T*YS1+(1.0D0-T)*YS)
YS1=G(X+H, Y1, YP1)
Y1=Y+H*YP+0.5D0*H*H*(A*YS1+(1.0D0-A)*YS)
YP1=YP+H*(T*YS1+(1.0D0-T)*YS)
X=X+H
Y=Y1
YP=YP1
YS=G(X, Y, YP)
10 CONTINUE
WRITE(9, '(1X)')
END

```

Проводя сравнение различных методов решения дифференциальных уравнений с начальными условиями, следует руководствоваться следующими критериями:

- Каков порядок погрешности метода?
- Требуются ли для реализации метода не предусмотренные в нем вычисления?
- Дает ли метод критерий оценки величины шага?
- Позволяет ли метод легко адаптировать шаг интегрирования h ?
- Сколько раз надо вычислять функцию на каждом шаге (этим определяется длительность вычисления)?

2.4. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрим задачу, определенную внутри и на границе области Ω в одно-, двух- и трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} L(u) = f(x) & \forall x \in \Omega, \\ S(u) = g(x) & \forall x \in S = \partial\Omega. \end{cases}$$

Задачи такого рода возникают в механике, электростатике, термодинамике, акустике, теории диффузии и в других физических дисциплинах.

В качестве меры близости вычисленного решения к точному будем использовать величину $\varepsilon(x) = L(u) - f(x)$, называемую невязкой. Удобно искать решение $u(x)$ в виде линейной комбинации независимых функций, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x). \quad (2.22)$$

Все описанные в этом разделе методы пригодны для решения различных дифференциальных уравнений в одно-, дву- и трехмерном пространстве, но для простоты мы будем их рассматривать на примере простого частного случая (рис. 2.3):

$$\begin{cases} L(u) = -u'' + u = f(x) = 1 + (e-1)x, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

имеющего точное решение

$$u(x) = 1 + (e-1)x - e^x. \quad (2.24)$$

Простейшие базовые функции для этого случая имеют вид

$$\varphi_k(x) = x(1-x)x^{k-1},$$

но можно их выбрать и по-другому.

Введем векторное пространство V , порождаемое линейными комбинациями φ_k , и скалярное произведение в этом пространстве

$$\langle v, w \rangle = \int_0^1 v(x) \times w(x) dx.$$

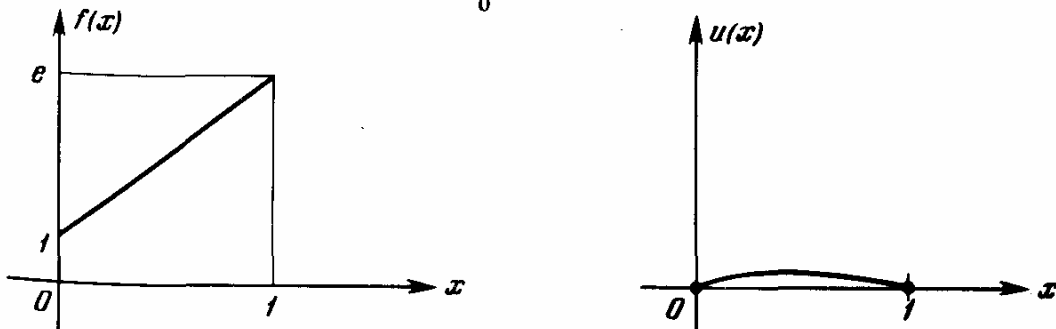


Рис. 2.3.

2.4.1. Метод коллокации: $\langle \varepsilon, \delta(x_i) \rangle = 0$

Невязка $\varepsilon(x)$, которая при точном решении должна быть равна нулю везде, приравнивается нулю в заданных точках, число которых равно числу слагаемых в формуле (2.22). Если это число достаточно велико и точки плотно расположены в Ω , приближенное решение будет близко к точному.

Ограничившись в выражении (2.22) одним членом, получим приближение к решению задачи (2.23):

$$u(x) = x(1 - x)\alpha_1.$$

Отсюда $\varepsilon(x) = -u'' + u - f(x) = (2\alpha_1 - 1) + (\alpha_1 - e + 1)x - \alpha_1 x^2$.

Положив $\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим

$$\frac{4}{9}\alpha_1 = 1 + \frac{e - 1}{2}.$$

Отсюда $\alpha_1 = 0,826285$.

Сравним полученное приближенное решение $u_{\text{пр}}$ с точным $u_{\text{т}}$:

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,155	0,146
0,50	0,207	0,210
0,75	0,155	0,172

Если взять в выражении (2.22) два члена с коэффициентами α_1 и α_2 , то

$$u(x) = x(1 - x)(\alpha_1 + \alpha_2 x).$$

Отсюда $-u'' + u = (2 + x - x^2)\alpha_1 + (-2 + 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$ и $\varepsilon(x_i) = 0 \Leftrightarrow (2 + x_i - x_i^2)\alpha_1 + (-2 + 6x_i + x_i^2 - x_i^3)\alpha_2 = 1 + (e - 1)x_i$.

Положив $x_i = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, получим

$$\begin{cases} 2,22222\alpha_1 + 0,07407\alpha_2 = 1,57276 \\ 2,22222\alpha_1 + 2,14814\alpha_2 = 2,14552 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,698537, \\ \alpha_2 = 0,276152. \end{cases}$$

Сравним полученное приближенное решение $u_{\text{пр}}$ с $u_{\text{т}}$:

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,144	0,146
0,50	0,209	0,210
0,75	0,170	0,172

Если выбрать x_i равными, например, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, получим систему линейных уравнений для α_1 и α_2 :

$$\begin{cases} 2,1875 \alpha_1 - 0,453125 \alpha_2 = 1,42957 \\ 2,1875 \alpha_1 - 2,640625 \alpha_2 = 2,28871 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,711042, \\ \alpha_2 = 0,277702. \end{cases}$$

Сравним теперь полученное приближенное решение $u_{\text{пр}}$ с точным $u_{\text{т}}$:

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,146	0,146
0,50	0,212	0,210
0,75	0,172	0,172

И наконец, если точек x_i больше, чем коэффициентов α_k , то и уравнений больше, чем неизвестных. В этом случае достаточно минимизировать сумму квадратов разностей между правыми и левыми частями этих уравнений. Так, если сохранить в выражении (2.22) два члена и выбрать $x_i = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, получим

$$\begin{cases} 2,1875 \alpha_1 - 0,453125 \alpha_2 = 1,429570 \\ 2,25 \alpha_1 + 1,125 \alpha_2 = 1,859140 \\ 2,1875 \alpha_1 + 2,640625 \alpha_2 = 2,288711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,728742, \\ \alpha_2 = 0,277702. \end{cases}$$

Сравнение $u_{\text{пр}}$ и $u_{\text{т}}$ дает

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,14480	0,14555
0,50	0,21043	0,21042
0,75	0,17084	0,17171

2.4.2. Метод наименьших квадратов: $\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = 0$

Ограничиваясь двумя членами в выражении (2.22)

$\varepsilon(x) = \alpha_1(2 + x - x^2) + \alpha_2(-2 + 6x + x^2 - x^3) - (1 + (e - 1)x)$ и прирав-

ставляя нулю производные $Q = \int_0^1 \varepsilon^2(x) dx$ по α_1 и α_2 , получим

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = 0 \rightarrow \int_0^1 \varepsilon(x)(2 + x - x^2) dx = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = 0 \rightarrow \int_0^1 \varepsilon(x)(-2 + 6x + x^2 - x^3) dx = 0,$$

а также

$$\begin{cases} 564\alpha_1 + 282\alpha_2 = 130e + 130 \\ 987\alpha_1 + 1796\alpha_2 = 441e + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,716224, \\ \alpha_2 = 0,281653, \end{cases}$$

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,147	0,146
0,50	0,214	0,210
0,75	0,174	0,172

2.4.3. Метод моментов: $\langle \varepsilon, x^{j-1} \rangle = 0$

Сохранив в выражении (2.22), как и ранее, члены с коэффициентами α_1 и α_2 , потребуем ортогональности невязки к x^0 и x^1 :

$$\int_0^1 \varepsilon(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 \varepsilon(x)x dx = 0,$$

что дает

$$\begin{cases} 26\alpha_1 + 13\alpha_2 = 6e + 6 \\ 65\alpha_1 + 63\alpha_2 = 20e + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,717222, \\ \alpha_2 = 0,281686. \end{cases}$$

Приближенное и точное значение соответственно равны

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,148	0,146
0,50	0,215	0,210
0,75	0,174	0,172

2.4.4. Метод Галеркина: $\langle \varepsilon, \phi_i \rangle = 0$

Потребуем ортогональности невязки $\varepsilon(x)$ и первых n функций $\phi_i(x)$. Для данного примера:

$$\int_0^1 \varepsilon(x)x(1-x)dx = 0,$$

$$\int_0^1 \varepsilon(x)x^2(1-x)dx = 0,$$

что при $n = 2$ дает

$$\begin{cases} 22\alpha_1 + 161\alpha_2 = 5e + 35 \\ 77\alpha_1 + 60\alpha_2 = 21e + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,769976, \\ \alpha_2 = 0,196596. \end{cases}$$

Отсюда $u_{\text{пр}}$ и $u_{\text{т}}$ равны

x	$u_{\text{пр}}$	$u_{\text{т}}$
0,25	0,154	0,146
0,50	0,217	0,210
0,75	0,172	0,172

Следует отметить, что метод Галеркина часто оказывается точнее других, его сходимость лучше изучена и он служит основой метода конечных элементов.

2.4.5. Метод Рэлея — Ритца: минимизация $J(v)$

Часто можно найти такой функционал $J(v)$, т. е. отображение введенного ранее пространства V в пространство действительных чисел R , что иско-

мое решение минимизирует $J(v)$. В нашем примере такой функционал существует¹⁾:

$$J(v) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [(v')^2 + v^2] - [1 + (e-1)x]v \right\} dx.$$

При $n = 2$ и $u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$ $J(u)$ есть симметричная положительно определенная квадратичная форма от α_1 и α_2 :

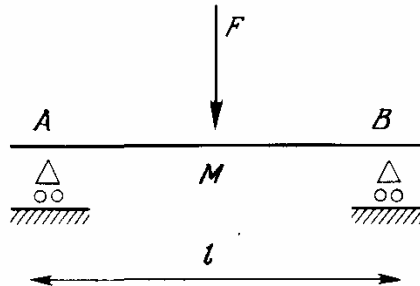
$$J(u) = \frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_2) (A) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} - (b_1 \ b_2) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix},$$

минимум которой можно найти, решив уравнение

$$\nabla J = 0 \Leftrightarrow A \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}.$$

В нашем примере значения α_1 и α_2 совпадают с решением, даваемым методом Галеркина, вследствие линейности оператора $L(u)$ в формуле (2.23).

Приведем другой пример применения метода Ритца — расчет деформации балки на двух опорах с сосредоточенной нагрузкой в центре:



Выберем для деформации $v(x)$ выражение, удовлетворяющее граничным условиям

$$v(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Полная (внутренняя + потенциальная) энергия балки запишется в виде

$$T = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - Fv(M).$$

Искомое решение $v(x)$ дает минимум функционала $T(v)$. Этот функционал есть симметричная положительно определенная квадратичная форма

¹⁾ Уравнение (2.23) является уравнением Эйлера для функционала $J(v)$ (см. разд. 2.8). — Прим. ред.

от α_1 и α_2 , значения которых определяются решением двух линейных уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\alpha_1 = \frac{2F l^3}{EI \pi^4}, \quad \alpha_2 = -\frac{2F l^3}{EI \pi^4} \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

Точное решение в точке M представляет собой ряд с бесконечным числом коэффициентов α_k

$$v(M) = \frac{2F l^3}{EI \pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) = \frac{Fl^3}{EI} \frac{1}{48}.$$

Замечание. При использовании методов Галеркина и Ритца не всегда можно аналитически вычислить коэффициенты систем линейных уравнений, представленные в интегральной форме. В таких случаях следует использовать методы численного интегрирования (разд. 2.2).

2.5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Этот метод состоит в замене производных соответствующим образом выбранными разностями. Изучив два приведенных здесь примера, читатель легко сможет решать и другие задачи.

2.5.1. Одномерная задача

Рассмотрим задачу, обобщающую пример из разд. 2.4:

$$\begin{cases} -u'' + c(x)u = f(x), \\ u(0) = \alpha, \quad u(L) = \beta, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $c(x) \geq \gamma > 0$.

Разложим $u(x+h)$ в ряд по степеням h :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots$$

Отсюда следует

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi)$$

при $\xi \in [x-h, x+h]$.

Обозначим $u_i = u(ih)$, где $h = \frac{L}{n+1}$. Тогда

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + c_i u_i = f_i. \quad (2.26)$$

Уравнения (2.26) образуют систему линейных уравнений относительно неизвестных u_1, u_2, \dots, u_n , при этом $u_0 = \alpha$ и $u_{n+1} = \beta$. Эта система имеет ленточную симметричную трехдиагональную матрицу, что позволяет проводить вычисления быстро и точно.

В нашем примере легко показать сходимость приближенного решения к истинному при $n \rightarrow \infty$, т. е. $h \rightarrow 0$. Действительно, вычитая выражение (2.26) из (2.25), получим

$$\frac{1}{h^2}(-\delta_{i-1} + 2\delta_i - \delta_{i+1}) + c_i \delta_i = -\varepsilon_i,$$

где $\delta_i = u(x_i) - u_i$, $\varepsilon_i = \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i)$.

Отсюда следует $\left(\frac{2}{h^2} + c_i\right) \delta_i = \frac{1}{h^2}(\delta_{i-1} + \delta_{i+1}) + \varepsilon_i$,

$$\left(\frac{2}{h^2} + \gamma\right) |\delta_i| \leq \left(\frac{2}{h^2} + c_i\right) |\delta_i| \leq \frac{1}{h^2}(|\delta_{i-1}| + |\delta_{i+1}|) + |\varepsilon_i|.$$

Пусть $\|\varepsilon\| = \max_i |\varepsilon_i|$ и $\|\delta\| = \max_i |\delta_i|$, тогда

$$\left(\frac{2}{h^2} + \gamma\right) \|\delta\| \leq \frac{1}{h^2}(\|\delta\| + \|\delta\|) + \|\varepsilon\|,$$

$$\|\delta\| \leq \frac{1}{\gamma} \|\varepsilon\| = O(h^2) \rightarrow 0,$$

что и доказывает сходимость.

Чтобы повысить порядок погрешности метода, разложим $u(x+2h)$, $u(x+h)$, $u(x-h)$, $u(x-2h)$ в ряд Тейлора в окрестности x :

$$\frac{1}{h^4}\{u_{k-2} - 4u_{k-1} + 6u_k - 4u_{k+1} + u_{k+2}\} = u_k^{(4)} + \frac{h^2}{6} u_k^{(6)} + O(h^4).$$

Если учесть, что

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) = -u_k'' - \frac{h^2}{12} u_k^{(4)} + O(h^4),$$

и подставить $u_k^{(4)}$ в предыдущую формулу, получим систему линейных уравнений $Au = b$, где

$$A = \frac{1}{12h^2} D + \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$D = \begin{vmatrix} 24 & -12 & 0 & & & & & & \\ -16 & 30 & -16 & 1 & & & & & \\ & 1 & -16 & 30 & -16 & 1 & & & \\ & & & 1 & -16 & 30 & -16 & 1 & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} f_1 + \alpha/h^2 \\ f_2 - \alpha/12h^2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix}$$

В этом случае погрешность метода составляет

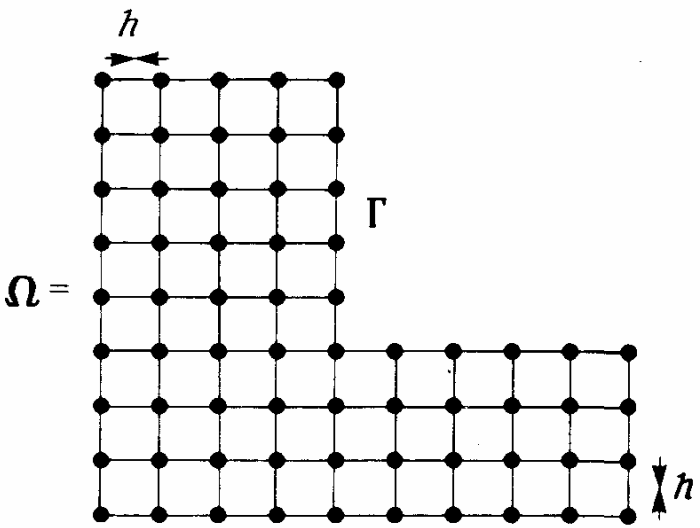
$$\varepsilon(x_k) = \frac{h^4}{90} u_k^{(4)} + O(h^6).$$

2.5.2. Двумерная задача

Применим метод конечных разностей к задаче, которую затем решим другими методами. Пусть на плоскости xOy :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) \text{ в области } \Omega, \\ u = g(x, y) \text{ на границе } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Предположим, что существует регулярная квадратная сетка со стороной h , в которую легко вписывается граница Γ :



Неизвестными являются значения u во внутренних узлах сетки, которые можно пронумеровать от 1 до n вдоль горизонтальных линий слева направо. Для каждого i -го узла требуется знать номера соседних узлов и знать,

лежат ли они на границе или внутри области. В общем случае окружение внутреннего i -го узла выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} k-1 \bullet & \bullet k & \bullet k+1 \\ i-1 \bullet & \bullet i & \bullet i+1 \\ j-1 \bullet & \bullet j & \bullet j+1 \end{array}$$

Для замены $(\Delta u)_i$ можно использовать две аппроксимации

$$- (\Delta u)_i \approx \frac{1}{h^2} (-u_j - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - u_k),$$

$$- (\Delta u)_i \approx \frac{1}{2h^2} (-u_{j-1} - u_{j+1} + 4u_i - u_{k-1} - u_{k+1}),$$

а также их линейную комбинацию с весами $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$:

$$\frac{3}{2} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} -1 & & -1 \\ & 4 & \\ -1 & & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Погрешность аппроксимации последней формулы составляет

$$- \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + O(h^4)$$

Главная часть этого выражения представляет собой $\Delta \Delta u_i$, равное $-\Delta f_i$. Поэтому можно оценить погрешность порядка $O(h^4)$, используя формулу

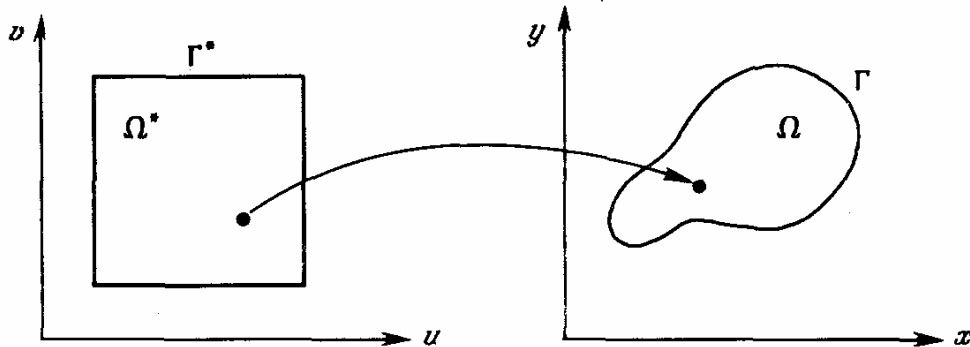
$$\frac{1}{6h^2} (-u_{j-1} - 4u_j - u_{j+1} - 4u_{i-1} + 20u_i - 4u_{i+1} -$$

$$- u_{k-1} + 4u_k - u_{k+1}) = f_i + \frac{1}{12} (-f_j - f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1} - f_k),$$

которая ненамного сложнее реализуется, но обеспечивает меньшую погрешность.

Итак, метод конечных разностей прост в реализации, легко адаптируется к различным типам обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, включая нелинейные, и позволяет использовать недекартовы координаты (цилиндрические, сферические и любые криволинейные), но его использование ограничивается трудностью наложения регулярной квадратной сетки на область интегрирования. Эту трудность можно устранить, применив преобразование координат для приведения области к простой форме.

Пусть дано преобразование:



$$\begin{aligned} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \frac{1}{D(u, v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial v} & -\frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ -\frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}, \text{ где } D(u, v) =$$

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u}.$$

Исходная краевая задача

$$\begin{cases} L(z) = f(x, y) \text{ в } \Omega, \\ z(x, y) = \bar{z}(x, y) \text{ на } \Gamma \end{cases}$$

преобразуется в

$$\begin{cases} L^*(w) = g(u, v) \text{ в } \Omega^*, \\ w(u, v) = \bar{w}(u, v) \text{ на } \Gamma^*. \end{cases}$$

При этом очевидно, что

$$\begin{aligned} w(u, v) &= z(\alpha(u, v), \beta(u, v)), \\ g(u, v) &= f(\alpha(u, v), \beta(u, v)), \\ \bar{w}(u, v) &= \bar{z}(\alpha(u, v), \beta(u, v)). \end{aligned}$$

Остается преобразовать производные z :

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \beta}{\partial v} dx - \frac{\partial \alpha}{\partial v} dy \right] + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial v} \frac{1}{D} \left[-\frac{\partial \beta}{\partial u} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial u} dy \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial z}{\partial x} = G(u, v) = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u}}{\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u}} = \frac{A(u, v)}{D(u, v)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = H(u, v) = \frac{\frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u}} = \frac{B(u, v)}{D(u, v)}.$$

Для преобразования вторых производных вычислим

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial A}{\partial u} D - A \frac{\partial D}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial B}{\partial u} D - B \frac{\partial D}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial A}{\partial v} D - A \frac{\partial D}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial B}{\partial v} D - B \frac{\partial D}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{D(u, v)} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{D(u, v)} \left(\frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) = \frac{1}{D(u, v)} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{D(u, v)} \left(\frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right).$$

Эти общие формулы в частных случаях упрощаются. Так, при использовании полярных координат имеем

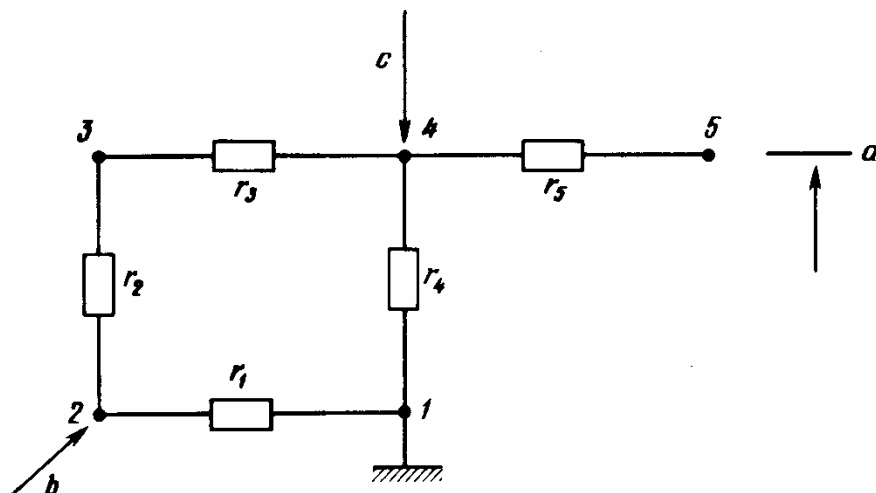
$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Заменой координат можно пользоваться при любом методе решения, но особенно она эффективна в сочетании с методом конечных разностей, где необходима простота области интегрирования.

2.6. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

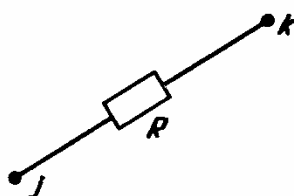
Пусть требуется автоматизировать определение равновесного состояния системы, состоящей из простых элементов (сопротивлений, импедансов, пружин, балок, труб и т. д.).

Рассмотрим сначала частный случай:



В этой схеме имеются пять узлов и пять резисторов и наложены два условия по току ($I_2 = b$ и $I_4 = c$) и два по потенциалу ($v_1 = 0$ и $v_5 = a$). Для любого сопротивления R разность потенциалов и ток связаны уравнениями

$$\begin{cases} u_j - v_k = Ri_{j \rightarrow k} \\ v_k - v_j = Ri_{k \rightarrow j} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{j \rightarrow k} \\ i_{k \rightarrow j} \end{bmatrix}.$$



Отметим, что эта элементарная матрица симметрична и сингулярна.

Определение равновесного состояния проводится за два шага. На первом шаге записываются уравнения для токов (для каждого узла втекающий извне ток равен сумме внутренних токов, вытекающих из этого узла). Это приводит к системе линейных уравнений:

$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4}$	$-\frac{1}{r_1}$		$-\frac{1}{r_4}$		v_1	I_1
$-\frac{1}{r_1}$	$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$	$-\frac{1}{r_2}$			v_2	I_2
	$-\frac{1}{r_2}$	$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$	$-\frac{1}{r_3}$		v_3	I_3
$-\frac{1}{r_4}$		$-\frac{1}{r_3}$	$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}$	$-\frac{1}{r_5}$	v_4	I_4
		$-\frac{1}{r_3}$	$-\frac{1}{r_5}$	$\frac{1}{r_5}$	v_5	I_5

(2.27)

На втором шаге записываются условия для потенциалов ($v_1 = 0$ и $v_5 = a$), что дает

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_2} & 0 \\ -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} & -\frac{1}{r_3} \\ 0 & -\frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{r_5} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} \right) v_1 - \frac{1}{r_1} v_2 - \frac{1}{r_4} v_4, \quad (2.29)$$

$$I_5 = -\frac{1}{r_5} v_4 + \frac{1}{r_5} v_5.$$

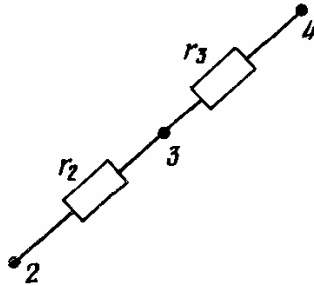
Из регулярной системы (2.28) можно определить потенциалы v_2 , v_3 и v_4 , а из уравнений (2.29) токи I_1 и I_5 , втекающие в узлы, в которых наложены условия по потенциалу.

Из анализа этого примера можно сделать следующие выводы:

1) для двух соединенных параллельно резисторов складываются их проводимости;

2) для последовательно соединенных резисторов складываются их сопротивления. В нашем примере r_2 и r_3 примыкают к узлу 3, в который не втекает внешний ток и на который не подано напряжение. Найдем эквивалентное сопротивление для соединения r_2 и r_3 :

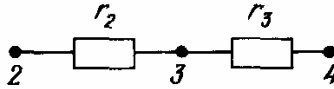
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{1}{r_2} & 0 \\ -\frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} & -\frac{1}{r_3} \\ 0 & -\frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}.$$



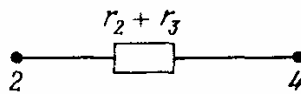
Так как $I_3 = 0$, то $v_3 = \frac{r_3 v_3 + r_2 v_4}{r_2 + r_3}$. Подставляя v_3 в уравнения для I_2 и I_4 , получим

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_2 + r_3} & -\frac{1}{r_2 + r_3} \\ -\frac{1}{r_2 + r_3} & +\frac{1}{r_2 + r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Итак, соединение



можно заменить его эквивалентом



Такая операция называется сжатием внутреннего узла 3 по отношению к внешним узлам 2 и 4. Ниже мы рассмотрим другие применения этой операции.

3) Ясно, что нельзя для одного и того же узла задать внешние условия на напряжение и ток одновременно.

4) Если ни на один из узлов не подано напряжение, то сумма всех внешних токов должна равняться нулю. Физически это очевидно, математически следует из того, что матрица системы (2.27) сингулярна, как и любая элементарная матрица.

5) Каждому узлу, на который подано напряжение, соответствует одно неизвестное и одно уравнение в системе (2.27), но ему же соответствует и одно дополнительное неизвестное — ток, который должен втекать в узел извне, чтобы поддерживать заданное напряжение.

6) Ширина ленты матрицы в системе (2.27) зависит от нумерации узлов, а нумерация сопротивлений не влияет на эту матрицу.

Итак, определение равновесного состояния системы выполняется в пять этапов:

- 1) Пронумеровать сопротивления и узлы.
- 2) Для каждого сопротивления построить характеризующую его элементарную матрицу и аддитивно распределить ее элементы в глобальной матрице, при этом места элементов определяются номерами узлов, которые соединяет данное сопротивление.
- 3) Записать граничные условия для узлов, на которые поданы напряжения.
- 4) Решить систему уравнений и получить значения напряжений в узлах.
- 5) Вычислить дополнительные неизвестные — токи, втекающие в узлы, на которые поданы напряжения.

Эти действия можно распространить на системы, состоящие из импедансов, пружин, балок и даже нелинейных величин, как, например, в гидравлике, где разность входного и выходного давлений гидравлического узла пропорциональна квадрату расхода. Эту зависимость можно записать в форме $P_1 - P_2 = kd^2 = (kd)d$ и искать положение равновесия итеративно:

приняв начальные значения для расходов, вычислить сопротивления kd и, решая систему, получить новые значения расходов и давлений, т. е. использовать итерационные приближения типа $x = f(x)$. Можно также последовательно нагружать систему и переходить от одного состояния к другому, используя малые приращения, как в методе Ньютона — Рафсона.

Эти замечания сохраняют силу и при решении непрерывных задач методом конечных элементов.

2.7. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим задачу (см. разд. 2.4 и 2.5):

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x) = 1 + (e - 1)x, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (P1)$$

Эта формулировка задачи, называемая локальной, не очень удобна для применения метода конечных элементов. Мы введем две другие формулировки, эквивалентные первой, но в большей мере соответствующие этому методу.

Пусть $v(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, принимающая, как и $u(x)$, нулевые значения на границах. Тогда

$$\int_0^1 (-u'' + u)v dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V,$$

и после интегрирования по частям первого слагаемого в левой части получим задачу (вторую формулировку)

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V, \quad (P2)$$

где V — пространство функций с непрерывными производными на отрезке $[0, 1]$ и с нулевыми значениями на его границах.

Введем функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx - \int_0^1 f v dx,$$

который определяет третью формулировку задачи:

$$\text{Найти такую } u(x), \text{ что } J(v) \geq J(u), \quad \forall v \in V. \quad (P3)$$

Действительно, пусть $a(u, v) = \int_0^1 (u' v' + u v) dx$ и $\langle f, v \rangle = \int_0^1 f v dx$,
тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(v - u, v - u) &= \frac{1}{2} a(v, v) - a(u, v) + \frac{1}{2} a(u, u) = \\ &= \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle + \frac{1}{2} a(u, u) + \langle f, u \rangle - a(u, u) = \\ &= J(v) - J(u) \geq 0. \end{aligned}$$

Легко показать, что из (P3) следует (P1):

$$\begin{aligned} J(u + \lambda v) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(u' + \lambda v')^2 + (u + \lambda v)^2] dx - \int_0^1 f(u + \lambda v) dx, \\ \frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda v) &= \int_0^1 [u' v' + \lambda (v')^2 + uv + \lambda u^2] dx - \int_0^1 f v dx. \end{aligned}$$

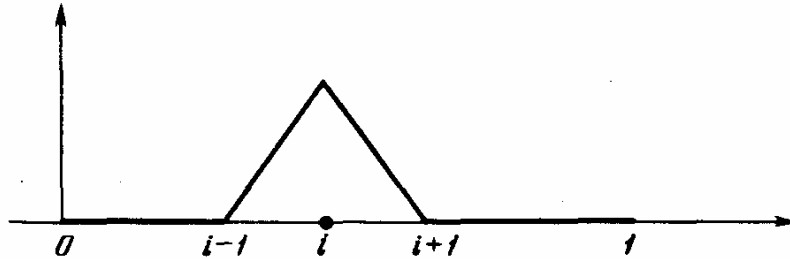
Согласно (P3),

$$\left[\frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda v) \right]_{\lambda=0} = 0 \quad \forall v,$$

поэтому $\int_0^1 (u' v' + uv) dx - \int_0^1 (fv) dx = 0 \quad \forall v$ или $\int_0^1 (-u'' + u - f)v dx = 0 \quad \forall v$,

что означает (P1). Тем самым доказана эквивалентность всех трех формулировок задачи.

Разобьем отрезок $[0,1]$ n внутренними точками $x_i \doteq ih$, $h = \frac{1}{n+1}$ и каждой из них поставим в соответствие функцию $w_i(x)$:



$$\begin{cases} w_i(x) = 0, & \text{если } x \leq (i-1)h, \\ w_i(x) = \frac{x - (i-1)h}{h}, & \text{если } (i-1)h \leq x < ih, \\ w_i(x) = \frac{(i+1)h - x}{h}, & \text{если } ih \leq x < (i+1)h, \\ w_i(x) = 0, & \text{если } x \geq (i+1)h. \end{cases}$$

Функция $w_i(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и кусочно-линейна на отрезках $[kh, (k+1)h]$. Кроме того,

$$w_i(kh) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i, \\ 1, & \text{если } k = i \end{cases}$$

и $w_i(x) = w_{i+1}(x+h)$.

Пусть V_h — векторное пространство, порождаемое линейными комбинациями $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$. Будем искать $u(x)$ в V_h , т. е. в виде

$$u(x) = u_1 w_1(x) + u_2 w_2(x) + \dots + u_n w_n(x).$$

Согласно (P2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v,$$

что дает n линейных уравнений для неизвестных u_1, u_2, \dots, u_n :

$$a(u, w_k) = \langle f, w_k \rangle \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, n,$$

или с учетом определения функций $w_k(x)$

$$u_{k-1} a(w_{k-1}, w_k) + u_k a(w_k, w_k) + u_{k+1} a(w_{k+1}, w_k) = \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} f w_k dx.$$

После вычисления входящих в эту формулу интегралов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) + \frac{h}{6}(u_{k-1} + 4u_k + u_{k+1}) &= \\ &= \frac{h}{6}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Отметим, что выбор базовых функций $w_i(x)$ позволяет получить значения $u(x)$ в узлах

$$u(jh) = u(x_j) = u_j \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание 1. Может показаться, что нулевые граничные условия в (P1) представляют собой весьма частный случай. На самом деле это не так. Если $u(0) = a$ и $u(1) = b$, можно искать $u(x)$ в виде $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$, где $u_0(x) = a + (b-a)x$. Тогда для $u_1(x)$ получим уравнение

$$-u_1'' + u_1 = f(x) - u_0(x)$$

с граничными условиями $u_1(0) = u_1(1) = 0$.

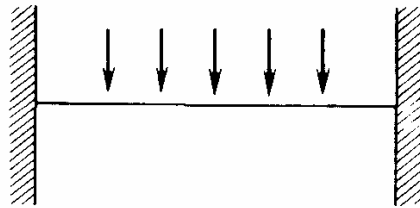
Замечание 2. Если вместо вариационной формулировки (P2) использовать функциональную формулировку (P3), то $J(u)$ выразится в виде квадратичной формы от u_1, u_2, \dots, u_n , минимизация которой приводит к тем же уравнениям.

Замечание 3. В рассмотренном примере функция $u(x)$ линейна на каждом конечном элементе. Можно выбрать квадратичную функцию $u(x)$ на элементе с тремя узлами $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ или даже кубическую на элементе с че-

тырьмя узлами $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$. Можно также использовать кубический конечный элемент с двумя неизвестными u_i и u'_i на каждый узел $\ominus \text{---} \ominus$. Этот случай рассмотрен в следующем примере.

Рассмотрим задачу определения $u(x)$ — деформации балки, закрепленной на двух концах и нагруженной распределенной силой

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 u}{dx^4} = f(x), \\ u(0) = u(L) = 0, \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{cases} \quad (P1)$$



Пусть $\Omega = [0, L]$ и V — пространство определенных на Ω функций, имеющих кусочно-непрерывные первые и вторые производные и удовлетворяющих краевым условиям:

$$V = \{v | v \in C^2(\Omega), v(0) = v(L) = 0, v'(0) = v'(L) = 0\}.$$

Умножив уравнение в (P1) на v и дважды проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^L EI u'' v'' dx = \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V. \quad (P2)$$

Обозначив $a(u, v) = \int_0^L EI u'' v'' dx$, $\langle f, v \rangle = \int_0^L f v dx$, $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle$,

можно записать другую формулировку задачи

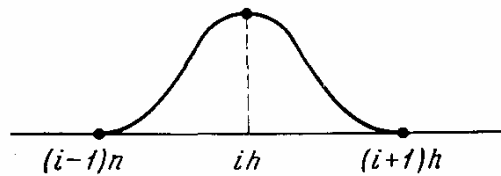
$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \quad (P3)$$

Все три формулировки (P1), (P2) и (P3) эквивалентны. Следует отметить, что в формулировке (P3) $J(u)$ интерпретируется как полная энергия — внутренняя энергия плюс потенциальная энергия внешних сил, а формулировка (P2) — прямое выражение принципа возможных перемещений.

Введем теперь функции, соответствующие разбиению $[0, L]$ на n отрезков

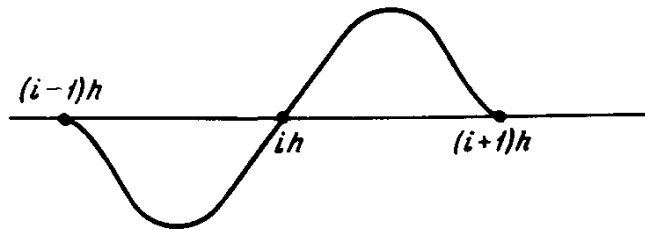
$$h = \frac{L}{n+1}, \quad x_i = ih,$$

$$\begin{cases} w_i(x) = 0, & \text{если } x < (i-1)h, \\ w_i(x) = \frac{1}{h^3} (x - x_{i-1})^2 \{h - 2(x - x_i)\}, & \text{если } (i-1)h \leq x < ih, \\ w_i(x) = \frac{1}{h^3} (x - x_{i+1})^2 \{h + 2(x - x_i)\}, & \text{если } ih \leq x < (i+1)h, \\ w_i(x) = 0, & \text{если } x \geq (i+1)h \end{cases}$$



и

$$\begin{cases} \bar{w}_i(x) = 0, & \text{если } x < (i-1)h, \\ \bar{w}_i(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_i), & \text{если } (i-1)h \leq x < ih, \\ \bar{w}_i(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_{i+1})^2(x - x_i), & \text{если } ih \leq x < (i+1)h, \\ \bar{w}_i(x) = 0, & \text{если } x \geq (i+1)h. \end{cases}$$



Первые производные функций $w_i(x)$ и $\bar{w}_i(x)$ непрерывны, а их вторые производные кусочно непрерывны и имеют разрывы в точках $(i-1)h$, ih и $(i+1)h$.

Отметим, что из определения этих функций

$$\begin{aligned} w_i(x_k) &= \delta_{ik}, & \bar{w}_i(x_k) &= 0, \\ w_i'(x_k) &= 0, & \bar{w}_i'(x_k) &= \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Пусть V_h — множество функций, образуемых линейными комбинациями $w_i(x)$ и $\bar{w}_i(x)$. Будем искать $u(x)$ в V_h , т. е. в виде

$$u(x) = u_1 w_1(x) + \bar{u}_1 \bar{w}_1(x) + u_2 w_2(x) + \bar{u}_2 \bar{w}_2(x) + \dots + u_n w_n(x) + \bar{u}_n \bar{w}_n(x).$$

Согласно (P2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a(u, w_k) = \langle f, w_k \rangle \\ a(u, \bar{w}_k) = \langle f, \bar{w}_k \rangle \end{cases} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

что приводит к системе из $2n$ линейных уравнений с $2n$ неизвестными $u_1, \bar{u}_1, u_2, \dots, \bar{u}_n$. В данном примере эту систему $KU = F$ можно построить, объединяя n элементарных систем, левые части которых записываются в виде

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{EI}{2} (u'')^2 dx = \frac{1}{2} \langle K_e u_e, u_e \rangle,$$

где $u_e' = (u_i, \bar{u}_i, u_{i+1}, \bar{u}_{i+1})$ и

$$K_e = \frac{EI}{h^3} \begin{vmatrix} 12 & 6h & -12h & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{vmatrix},$$

поскольку величины $a(w_i, w_j)$ и $a(\bar{w}_i, \bar{w}_j)$ можно вычислить аналитически. В общем случае, однако, удобнее определять их численно с помощью методов разд. 2.2. Задача, таким образом, сводится к симметричной линейной системе уравнений с полушириной ленты, равной 4, а решение системы дает приближение к $u(x)$, в котором по построению $u(ih) = u_i$ и $u'(ih) = \bar{u}_i$.

Замечание 1. Краевые условия в общем виде не представляют трудностей, поскольку решение можно искать в виде $u(x) \equiv u_1(x) + u_0(x)$, где $u_0(x)$ удовлетворяет заданным условиям.

Замечание 2. Найденная функция, аппроксимирующая решение $u(x)$, является локально кубической на каждом отрезке $[ih, (i+1)h]$, а ее четвертая производная $\frac{d^4 u}{dx^4}$ равна нулю везде, кроме точек $x = ih$, в которых она не определена, что может показаться странным для решения задачи в формулировке (P1). Но если найти точное решение в точках $x_i = ih$ и затем интерполировать его, используя значения u_i и u'_i в узлах, то, согласно (P3), полученное приближенное решение точнее, чем эта интерполяция точного решения, что и доказывает сходимость метода. Аналогичное замечание можно сделать и относительно предыдущего примера, а также любого другого применения метода конечных элементов.

Замечание 3. Если кроме распределенной нагрузки $f(x)$ имеются силы F_p , приложенные в точках $P \in [0, L]$, то в уравнениях к $\langle f, w_k \rangle$ и $\langle f, \bar{w}_k \rangle$ следует добавить величины $F_p w_k(x_p)$ и $F_p \bar{w}_k(x_p)$.

2.8. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Пусть Ω — замкнутая область в плоскости xOy и Γ — ее граница. Требуется найти $u(x, y)$ — решение задачи, определяемой формулировкой

$$\begin{aligned} -\Delta u + q(x, y)u &= f(x, y) \text{ в } \Omega, \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned} \quad (P1)$$

Чтобы перейти от этой локальной формулировки к вариационной формулировке (P2) или функциональной (P3), введем пространство

$$V = \left\{ v \mid u, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega); v = 0 \text{ на } \Gamma \right\}$$

и воспользуемся формулой Грина, обобщающей формулу интегрирования по частям

$$\iint_{\Omega} v \Delta u \, d\omega = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma - \iint_{\Omega} \nabla v \times \nabla u \, d\omega.$$

Пусть

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} (\nabla u \times \nabla v + quv) d\omega,$$

$$\langle f, v \rangle = \iint_{\Omega} fud\omega,$$

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle.$$

Легко показать, что

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad (P2)$$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \quad (P3)$$

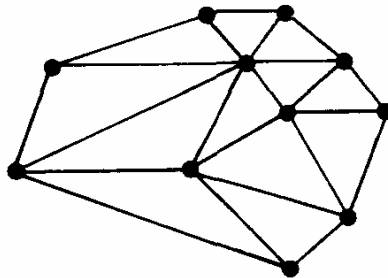
Эквивалентность формулировок (P2) и (P3) следует из формул Эйлера, определяющих условия экстремума интеграла. Приведем некоторые из них:

$$\text{Минимум } J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right),$$

$$\text{Минимум } J(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) = 0,$$

$$\text{Минимум } J(u) = \iint_{\Omega} f(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right).$$

Построим разбиение области Ω на треугольники:



Каждому i -му внутреннему узлу поставим в соответствие функцию $w_i(x, y)$, которая равна 1 в узле, линейно уменьшается до 0 на противоположной стороне каждого треугольника, примыкающего к i -му узлу, и равна 0 на всех остальных треугольниках.

Если искать $u(x, y)$ в виде линейной комбинации $w_i(x, y)$

$$u(x, y) = u_1 w_1(x, y) + u_2 w_2(x, y) + \dots + u_n w_n(x, y),$$

то, согласно (P2), достаточно взять

$$a(u, w_k) = \langle f, w_k \rangle \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

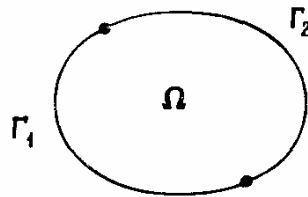
что приводит к системе n линейных уравнений с n неизвестными. В этих уравнениях $a(w_i, w_k) = 0$ на всех треугольниках, кроме тех, у которых узлы i и k являются вершинами. Поэтому соответствующей нумерацией узлов матрицу можно сделать симметричной и ленточной и минимизировать ширину ее ленты.

Полученное приближенное решение $u(x, y)$ будет линейным на каждом из треугольников разбиения и по построению в каждом узле $u(x_i, y_i) = u_i$.

На двумерную задачу можно распространить замечания из разд. 2.7.

Замечание 1. Если задача (P1) сформулирована в более общем виде:

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = f & \text{в } \Omega, \\ u = \alpha & \text{на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \beta & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (P1)$$



то необходимо и достаточно провести следующие изменения:

$$- V = \left\{ v \mid u, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega); v = \alpha \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$\langle f, v \rangle = \iint_{\Omega} f v d\omega + \int_{\Gamma_2} \beta v d\gamma.$$

Замечание 2. Нельзя задавать значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на одной и той же части Γ .

Замечание 3. Полученное приближенное решение кусочно-линейно в Ω , а Δu равно нулю почти везде и не определено на сторонах треугольников разбиения. Тем не менее это хорошее приближение к решению задачи P1. Можно показать, что из всех функций пространства V_h это приближение есть ближайшее к точному решению по метрике

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|, \quad \|v\| = \frac{1}{2} a(v, v)$$

и поэтому оно даже лучше, чем линейная интерполяция точного решения в узлах разбиения.

Замечание 4. Используя более сложные конечные элементы, можно получить квадратичное или кубическое приближенное решение.

Замечание 5. Если кроме распределенной плотности $f(x, y)$ в некоторых точках P имеются точечные возбуждения, то необходимо и достаточно добавить к (f, w_k) величины $F_p w_k(x_p, y_p)$.

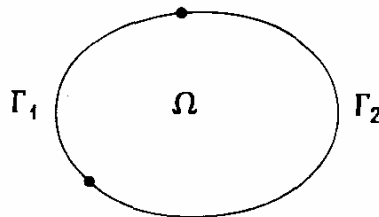
Замечание 6. Легко проверить, что использованный здесь метод относится к типу Галеркина при вариационной формулировке (P2) и к типу Рэлея—Ритца при функциональной формулировке (P3). Формулировки (P2) и (P3) эквивалентны при решении линейных задач, но приводят к различным результатам в нелинейном случае, который рассмотрен в разд. 2.12.

2.9. УРАВНЕНИЯ С КОНТУРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Этот метод, разработанный раньше метода конечных элементов, получил в последнее время интересное развитие по причинам, о которых мы поговорим ниже.

Рассмотрим двумерную задачу, часто возникающую в теории теплопередачи, электростатике и в других областях физики:

$$\begin{aligned} \Delta T &= 0 \text{ в } \Omega, \\ T &= \alpha \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= \beta \text{ на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.30)$$



Известно, что для существования решения в каждой точке $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ необходимо и достаточно наложить условия либо по T , либо по $\frac{\partial T}{\partial n}$, но не по обеим величинам. Если задана T , можно вычислить $\frac{\partial T}{\partial n}$ в той же точке Γ_1 , и наоборот, если задано $\frac{\partial T}{\partial n}$, можно вычислить T в той же точке Γ_2 .

Напомним формулу Грина, обобщающую интегрирование по частям:

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\omega = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma - \int_{\Omega} \nabla v \times \nabla u \, d\omega, \quad (2.31)$$

где $\nabla u = \text{grad } u$, \times — векторное произведение, $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$, n — единичная внешняя нормаль к Γ .

Из выражения (2.31) и

$$\int_{\Omega} u \Delta u \, d\omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u \times \nabla v \, d\omega$$

следует

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, d\omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\gamma. \quad (2.32)$$

Воспользуемся этой формулой и подставим в нее вместо v функцию $T(x, y)$ — решение уравнения $\Delta T = 0$ в Ω , а вместо u функцию G — фундаментальное решение уравнения

$$\Delta G = \delta(P), \quad (2.33)$$

где $\delta(P)$ — функция Дирака, а точка P расположена внутри Ω или на Γ .

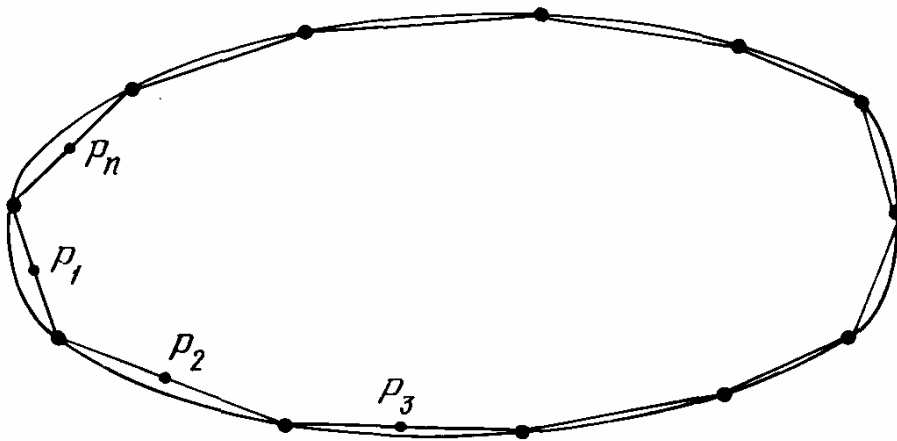
Для двумерной задачи

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2. \quad (2.34)$$

Если точка P расположена внутри области Ω , то

$$T(x_p, y_p) = \int_{\Gamma} \left(T \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial T}{\partial n} \right) \, d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \ln r - T \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right\} \, d\gamma. \quad (2.35)$$

Эта формула позволяет вычислить значение T в любой внутренней точке, если в каждой точке границы Γ известны T и $\frac{\partial T}{\partial n}$, что в нашем случае невозможно. Чтобы устранить эту трудность, разобьем Γ отрезками прямой и для простоты будем считать T и $\frac{\partial T}{\partial n}$ постоянными на каждом из них:



Если точка P находится на Γ , то

$$\frac{1}{2}T(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \ln r - T \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right\} d\gamma. \quad (2.36)$$

Поместив $P = P_j$ в середину i -го отрезка γ_i , получим

$$\pi T_i + \sum_{j=1}^n T_j \int_{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_i) d\gamma = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_j \int_{\gamma_j} \ln r_i d\gamma \quad (2.37)$$

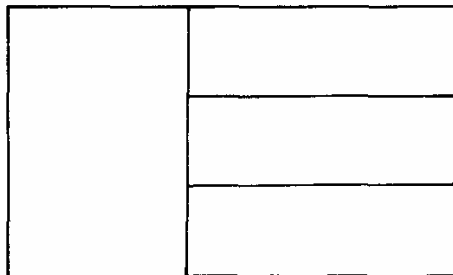
или, введя новые обозначения,

$$\pi T_i + \sum_{j=1}^n A_{ij} T_j = \sum_{l=1}^n B_{il} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_l, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.38)$$

Вычисление интегралов A_{ij} и B_{ij} не представляет особой трудности: $A_{ij} = 0$, так как для функции $\ln r$ нормальная составляющая производной на отрезке равна нулю, $B_{ii} = l_i \ln \frac{l_i}{2} - l_i$, где l_i — длина отрезка γ_i .

Итак, мы получили n уравнений для $2n$ неизвестных T_i и $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_i$, из которых n заданы граничными условиями. Можно вычислить остальные n , решая систему (2.38), а затем с помощью уравнения (2.35), найти решение задачи во всех внутренних точках.

Этот метод, который можно применять к решению и других уравнений физики, позволяет свести задачу на плоскости к задаче на контуре, а задачу в объеме — к задаче на поверхности. Следует отметить, что линейная система, к которой сводится решение уравнения, имеет матрицу, хотя и заполненную, но с размерностью меньшей, чем в методе конечных элементов, и что современные векторные компьютеры успешно решают такие задачи. Разбиение поверхности допускает вариации типа



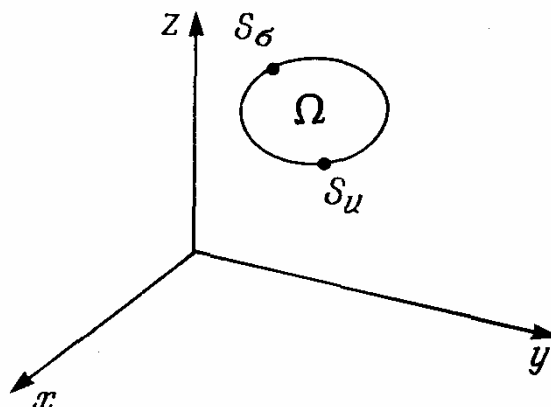
которые в методе конечных элементов возможны только за счет существенных усложнений. Метод контурных интегралов имеет преимущество в тех случаях, когда требуется изменить геометрию объекта, например сделать отверстие. Поэтому он хорошо «взаимодействует» с САПР, в особенности если в математической модели объект описывается его границами.

Метод обеспечивает высокую точность при вычислении сверхнапряжений в углах, трещинах и т. д. Он позволяет легко решать задачи в области, расположенной вне замкнутой кривой. Но этому методу свойственны также и недостатки:

- 1) используются более сложные математические выражения;
- 2) возникают трудности при решении задач с точечными силами и объемными нагрузками;
- 3) непригоден для решения нелинейных задач и исследования переходных явлений.

2.10. СТАТИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрим основную статическую задачу сопротивления материалов. Эта задача сложнее, чем решение трехмерного уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, потому что неизвестным является векторная функция $\vec{u}(x, y, z)$ — вектор смещения, соединяющий начальное и конечное положения произвольной точки упругого тела. При отсутствии начальных смещений и напряжений задача формулируется следующим образом:



Если Ω — объем тела, ограниченного поверхностью $D = S_u \cup S_\sigma = \partial\Omega$, на части которой S_u наложены условия на смещение, а на часть S_σ действуют внешние силы, то¹⁾

$$\text{в } \Omega \begin{cases} \{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \\ \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \\ [B^t]\{\sigma\} + \{f_v\} = 0 \end{cases} \quad (\text{закон Гука}),$$

$$\text{на } S \begin{cases} \{u\} = \{\bar{u}\} & \text{на } S_u, \\ \{\sigma\}\{n\} = \{f_s\} & \text{на } S_\sigma, \end{cases}$$

¹⁾ Символ в фигурных скобках означает вектор, символ в квадратных скобках — тензор или матрицу. — Прим. ред.

где $\bar{f}_v(x, y, z)$ — объемная сила (гравитационная, центробежная и т. д.), $\bar{f}_s(x, y, z)$ — сила, действующая на поверхность S_σ , $u(x, y, z)$ — смещение, заданное на поверхности S_u , $u\{n\}$ — единичная внешняя нормаль к S_σ .

Неизвестными являются вектор $\{u\}$ и две вспомогательные векторные функции $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$:

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx} \rangle,$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx} \rangle.$$

Матрица $[D]$ для изотропного материала имеет вид

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Матрица $[B]$ ранее определенного оператора имеет вид

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Полезно записать деформации $\{\varepsilon\}$ и напряжения $\{\sigma\}$ не в векторной форме, а в виде тензора второго ранга:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Внутренняя энергия элемента объема $d\omega$ записывается в виде

$$dU = \frac{1}{2} \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\omega = \frac{1}{2} \langle \varepsilon \rangle [D] \{ \varepsilon \} d\omega.$$

Полная потенциальная энергия P — сумма потенциальной энергии объемных и поверхностных сил, которая равна их работе W с обратным знаком, и внутренней энергии U

$$P = U - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\omega - \int_{\Omega} \langle u \rangle \{ \bar{f}_v \} d\omega - \int_{S_s} \langle u \rangle \{ \bar{f}_s \} ds.$$

Если добавить к решению $\{u\}$ произвольное, но кинематически допустимое (т. е. равное нулю на S_u) смещение $\{\delta u\}$, то в приближении первого порядка малости получим

$$\delta P = P(u + \delta u) - P(u) = \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\omega - \int_{\Omega} \langle \delta u \rangle \{ \bar{f}_v \} d\omega - \int_{S_s} \langle \delta u \rangle \{ \bar{f}_s \} ds.$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\delta U = \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\omega = \int_S \langle \delta u \rangle [\sigma] \{ n \} ds - \int_{\Omega} \langle \delta u \rangle [B^t] \{ \sigma \} d\omega.$$

Так как $\langle \delta u \rangle = 0$ на S_u , то можно записать

$$\delta P = \int_{S_s} \langle \delta u \rangle ([\sigma] \{ n \} - \bar{f}_s) ds - \int_{\Omega} \langle \delta u \rangle ([B^t] \{ \sigma \} + \bar{f}_v) d\omega$$

и, наконец,

$$\delta P = \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\omega - \int_{\Omega} \langle \delta u \rangle \{ \bar{f}_v \} d\omega - \int_{S_s} \langle \delta u \rangle \{ \bar{f}_s \} ds = 0.$$

Последнее выражение представляет собой принцип возможных перемещений, который показывает, что из равновесия следует $\delta P = 0$, и наоборот. Принцип приводит к формулировке задачи типа метода Галеркина и позво-

ляет получить столько уравнений, сколько требуется, при условии что $\{\delta u\}$ кинематически допустимы. Кроме того,

$$\delta^2 P = \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle [D] \{\delta \varepsilon\} d\omega > 0.$$

Это принцип минимума полной потенциальной энергии P , который приводит к формулировке типа Рэля — Ритца: точное решение u минимизирует P .

Как уже было показано, эти две формулировки позволяют применить метод конечных элементов. Предположим, что мы располагаем разбиением области на конечные элементы. В трехмерном пространстве простейшим конечным элементом является четырехгранник. Для любого четырехгранника с вершинами i, j, k, l можно определить функцию

$$\{u\} = \{u_i\} N_i(x, y, z) + \{u_j\} N_j(x, y, z) + \{u_k\} N_k(x, y, z) + \{u_l\} N_l(x, y, z),$$

где $\{u_p\}$ — узловые значения неизвестных в каждой вершине P , а $N_p(x, y, z)$ — однозначно определяемый полином первой степени, равный 1 в вершине P и 0 на противоположной этой вершине грани данного элемента. Таким образом, задача сводится к вычислению конечного множества узловых значений неизвестных $\{u_p\}$ для каждого элемента и определению функций $\{u\}$, принадлежащих классу C^0 во всей области Ω . Разбиение области на конечные элементы позволяет записать объемные интегралы, которые входят в выражение для потенциальной энергии P , в виде

$$\int_{\Omega} = \sum_{\text{по всем элементам}} \int_{\text{по элементу}}$$

В результате получаем P как квадратичную функцию узловых значений, коэффициенты которой можно вычислить, применяя численное интегрирование

$$P = \frac{1}{2} \langle u_{1x} u_{1y} u_{1z} u_{2x} \dots u_{nz} \rangle [K] \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{nz} \end{Bmatrix} - \langle u \rangle \{F\} + \text{const.}$$

Для вычисления равновесного состояния достаточно положить

$$[K] \{u\} = \{F\}.$$

Решая это уравнение, получаем функцию $\{u\}$ для каждого элемента, а из нее — деформации и напряжения.

Линейные четырехгранники, выбранные нами произвольно, могут быть заменены более сложными конечными элементами.

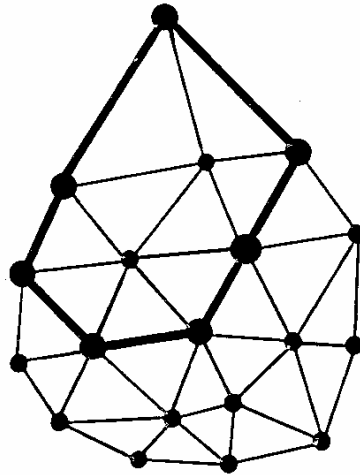
2.11. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

Четырехгранный линейный элемент имеет три неизвестные переменные на каждый узел и поэтому характеризуется элементарной матрицей $[K_e]$ размерностью 12×12 и вектором внешних сил размерностью 12. Глобальная матрица $[K]$ и правая часть $\{F\}$ строятся объединением элементарных матриц и векторов с учетом условий на S_u .

Элемент k_{ij} матрицы $[K]$ — это реакция i -го неизвестного на смещение, равное 1 для j -го неизвестного и 0 для остальных. На неизвестные переменные узла P оказывают влияние только неизвестные переменные тех узлов, с которыми P связан общим элементом. Поэтому оптимальной нумерацией узлов можно уменьшить ширину ленты матрицы $[K]$, которая по построению симметрична и положительно определена.

Если задача имеет одну или несколько симметрий, можно моделировать только половину задачи, а полное решение получить из симметрии. Возможна ситуация, когда число неизвестных и ширина ленты слишком велики для ЭВМ, на которой проводятся вычисления. В таких случаях применяется еще одно средство — суперэлементы или субструктуры:

Суперэлемент



Этот подход основан на сжатии внутренних узлов (разд. 2.6) и состоит в объединении внутренних конечных элементов с элементами, примыкающими к границе.

Рассмотрим пример отделения неизвестных, соответствующих внутренним узлам, приняв для простоты, что эти узлы не нагружены:

$$K_{ii} u_i + K_{ij} u_j = 0,$$

$$K_{ji} u_i + K_{jj} u_j = f_j.$$

Эту систему можно решать, положив

$$(K_{jj} - K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij}) u_j = f_j \text{ и } K_{ii} u_i = -K_{ij} u_j.$$

Субструктуры уровня 1 могут быть разделены на субструктуры уровня 2 и т. д.

Этот метод представляет особый интерес, если сами субструктуры многократно повторяются, если работа по исследованию модели распределена между несколькими лицами и если изменения модели производятся только внутри определенных субструктур, не затрагивая остальную модель. Однако при этом требуется большая дисковая память для хранения промежуточных результатов вычислений.

2.12. НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА

В предыдущих задачах предполагались малые смещения. В реальных задачах присутствуют нелинейные эффекты, обусловленные как геометрией (большие смещения, большие вращения и контакты), так и свойствами материалов (трение, нелинейная упругость, пластичность, ползучесть и т. д.). В таких случаях удобно применять разбиение внешних условий (смещения, объемные и поверхностные силы) на малые части и решать задачу в несколько этапов. На каждом этапе внешние условия берутся с множителем λ таким, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 1$, и нелинейная задача записывается в виде системы

$$K(u^{k+1})[u^{k+1} - u^k] = F^{k+1} - F^k,$$

которая решается последовательными линейными приближениями.

На практике в системах САПР вычисления такого рода могут выполняться только в благоприятных случаях, когда основная линейная задача проста и решается быстро.

2.13. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим простейшее из эволюционных уравнений — уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.39)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

которое имеет точное решение $\varphi(x - at)$.

Легко представить различные конечно-разностные схемы для этого уравнения ($\tau = \Delta t$, $h = \Delta x$):

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\tau}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0, \quad (2.40)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\tau}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0 \text{ (схема Годунова)}, \quad (2.41)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad (2.42)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + \frac{a\tau}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad (2.43)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n + \frac{a\tau}{h}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad (2.44)$$

$$u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{a\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \text{ (схема Лакса)}, \quad (2.45)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = \frac{a^2\tau^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \text{ (схема Вендроффа)}. \quad (2.46)$$

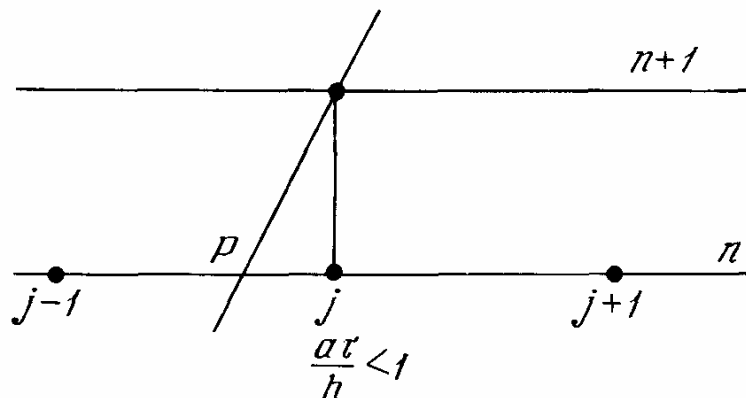
Все эти схемы согласуются с уравнением. Так, например, для схемы Годунова

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^{n+\theta_1},$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j-\theta_2}^n.$$

Отсюда $\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + O(\tau, h).$

Но одной согласованности мало. Если провести через точку $((n+1)\tau, jh)$ характеристику уравнения и



отметить на ней точку P , то видно, что положение этой точки соответствует схеме Годунова только при условии $\frac{2\tau}{h} < 1$, а схеме (2.40) не соответ-

ствует никогда.

Условие сходимости $\frac{a\tau}{h} < 1$, которое называется условием КФЛ (Курант, Фридрихс, Леви), требует, чтобы не только $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, но и шаги разностной сетки по времени и координате были согласованы друг с другом.

Обозначив $\alpha = \frac{a\tau}{h}$, можно записать схему Годунова в виде

$$u_j^{n+1} = (1 - \alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n,$$

а схему Лакса в виде

$$u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} = \frac{(1 - \alpha)}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{1 + \alpha}{2}(u_{j-1}^n - u_{j-2}^n).$$

Отсюда видно, что при выполнении условия КФЛ ($\alpha < 1$) монотонные изменения u_j^n передаются u_j^{n+1} .

Рассмотрим погрешность конечно-разностного решения $e_j^n = u_j^n - u(jh, n\tau)$. Для схемы Годунова

$$e_j^{n+1} = (1 - \alpha)e_j^n + \alpha e_{j-1}^n + O(\tau, h)$$

$$\text{и } E_{n+1} = \max_j (e_j^{n+1}) \leq E_n + c\tau h.$$

Отсюда $E_n \leq E_{n-1} + c\tau h \leq E_{n-2} + 2c\tau h \leq \dots \leq nc\tau h$, что и доказывает сходимость при $h \rightarrow 0$, если $\alpha < 1$.

Схему Вендроффа можно получить, записав

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + O(\tau^3),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n = -a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n = -\frac{a}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n = \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{a^2}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Схемы (2.40) и (2.42) неустойчивы и поэтому не применяются.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в стержне длиной L :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (2.47)$$

Методом конечных разностей ее решают по схеме Кранка — Никольсона:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - \frac{\tau\sigma}{2h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \\ = u_j^n + \frac{\tau\sigma}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Чтобы перейти к конечным элементам, введем пространство $V\{v(x), v$ кусочно-непрерывны на $[0, L], v(0) = v(L) = 0\}$

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \sigma \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \\ + \sigma \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует эквивалентная (2.47) формулировка задачи:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + a(u, v) = 0, \quad \forall v \in V, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (2.48)$$

где $\left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, v \right\rangle = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx$ и $a(u, v) = \sigma \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$.

Легко показать единственность решения (2.48). Пусть u_1 и u_2 — два решения, тогда, обозначив $w = u_1 - u_2$ и положив $v = w$, получим

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, w \right\rangle + a(w, w) = 0,$$

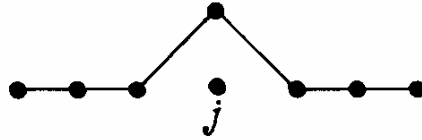
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle w, w \rangle + a(w, w) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0.$$

Так как $w(0) = 0$, то $w \equiv 0$, поэтому $u_1 = u_2$.

Разобьем отрезок $[0, L]$ промежуточными точками x_1, x_2, \dots, x_j , где $x_j = jh, j = 1, 2, \dots, J, h = \frac{L}{J+1}$, и каждому x_j поставим в соответствие

функцию $w_j(x)$, введенную в разд. 2.7:

$$w_j(x_k) = \delta_{jk}.$$



Пусть V_h — множество линейных комбинаций функций $w_j(x)$, аппроксимирующее V . Если искать решение $u(x, t)$ в виде $u(x, t) = \sum_{j=1}^J v_j(t) w_j(x)$, то, согласно (2.48), получим J уравнений

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w_k \right\rangle + a(u, w_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, J.$$

Отсюда следует система

$$\sum_{j=1}^J \langle w_j, w_k \rangle v_j'(t) + \sum_{j=1}^J a(w_j, w_k) v_j(t) = 0 \quad (2.49)$$

и эквивалентная ей задача

$$\begin{cases} \frac{h}{6} M y'(t) + \frac{\sigma}{h} K y(t) = 0, \\ \frac{h}{6} M y(0) = F, \end{cases} \quad (2.50)$$

где $y(t)$ — вектор $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_J(t)\}$, M — трехдиагональная матрица со строками $(1, 4, 1)$, K — трехдиагональная матрица со строками $(-1, -2, -1)$, $F_i = \langle f(x), w_i(x) \rangle$.

Уравнение (2.50) можно решать методом Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \{ \theta y'_{n+1} + (1 - \theta) y'_n \},$$

который устойчив при $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, а при $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ устойчив, если $\frac{\sigma \tau}{h^2} < \frac{1}{6(1 - 2\theta)}$.

Решим таким же способом задачу о колебании струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (2.51)$$

Явная трехуровневая конечно-разностная схема для этой задачи

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

устойчива при выполнении условия КФЛ $\frac{a\tau}{h} < 1$.

Для применения метода конечных элементов изменим формулировку задачи на эквивалентную

$$\begin{cases} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + \int_0^L a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dv}{dx} dx = 0 \quad \forall v(x) \in V, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (2.52)$$

Аппроксимация решения в V_h : $u(x, t) = \sum_{j=1}^J v_j(t) w_j(x)$ дает J уравнений при $j = 1, 2, \dots, J$

$$\sum_{j=1}^J \langle w_j, w_k \rangle v_j''(t) + \sum_{j=1}^J a(w_j, w_k) v_j(t) = 0.$$

Функции $v_j(t)$ находятся решением системы

$$\begin{cases} \frac{h}{6} M y''(t) + \frac{a^2}{h} K y(t) = 0, \\ \frac{h}{6} M y(0) = F (F_i = \langle f(x), w_i(x) \rangle \Rightarrow y_i(0) = v_j(0) \approx f(x_i)), \\ \frac{h}{6} M y'(0) = G (G_i = \langle g, w_i \rangle \Rightarrow y_j'(0) = v_j'(0) \approx g(x_i)). \end{cases} \quad (2.53)$$

2.14. ОПТИМИЗАЦИЯ

При использовании описанных выше методов часто возникает необходимость поиска оптимума и оценки чувствительности полученного решения. Чувствительностью решения называется изменение целевой функции при единичном изменении исходной величины. Эта характеристика показывает, насколько устойчиво решение при случайных вариациях данных.

Автоматизация поиска оптимума приводит к задаче нахождения минимума или максимума функции $J(x)$, определенной в пространстве R^n при ограничениях $\varphi_i(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, p < n$) или без них.

Для решения оптимизационной задачи без ограничений применяют следующие методы:

- Метод релаксации, который эффективен, если функция $J(x)$ выпукла и дифференцируема:

$$\text{оптимизировать } J(x, u_2, u_3, \dots, u_n) \Rightarrow u_1 = x,$$

$$\text{оптимизировать } J(u_1, x, u_3, \dots, u_n) \Rightarrow u_2 = x \text{ и т. д.}$$

Метод сводится к последовательности оптимизаций по одной переменной, которые могут проводиться различными способами — дихотомией, последовательностью Фибоначчи и т. д.

- Методы спуска $u_{k+1} = u_k - \rho_k d_k$, к которым относятся:

— спуск по градиенту с оптимальным шагом: $d_k = \nabla J(u_k)$, а ρ_k определяется оптимизацией $J(u_k + x d_k)$ по одной переменной x ;

— спуск по градиенту с малым фиксированным шагом: $\rho_k = \text{const}$;

— спуск по сопряженному градиенту: $u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^k \alpha_i \nabla J(u_i)$.

Среди неквадратичных следует отметить методы Флетчера и Полака—Рибьера.

- Метод Ньютона. Он используется редко (хотя и имеет квадратичную сходимость), потому что не всегда можно быть уверенным в выполнении условий его сходимости:

$$\text{из } \nabla J(u + \delta u) = \nabla J(u) + \nabla \nabla J(u) \delta u + \dots$$

$$\text{следует } \nabla \nabla J(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -\nabla J(u_k).$$

Для оптимизации с ограничениями применяются следующие методы:

- Метод релаксации, который эффективен, если для всех v в допустимой области решений выполняется условие $\nabla J(u)(v - u) \geq 0$.

- Метод проекции градиента: $u_{k+1} = P\{u_k - \rho_k \nabla J(u_k)\}$.

- Метод штрафных функций: $J_\varepsilon(u) = J(u) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^p \max\{\varphi_i(u), 0\}$,

отыскивается u_ε , оптимизирующее J_ε и $u_\varepsilon \rightarrow u$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Метод неопределенных множителей Лагранжа:

Пусть, например, требуется минимизировать выражение $(x^2 + y^2 + z^2)$ при условии $x + y + z \geq 1$. Будем минимизировать величину

$$\mathcal{L}(x, y, z, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \mu(x + y + z - 1),$$

считая μ известным. Получим $2x - \mu = 2y - \mu = 2z - \mu = 0$ или

$$x = y = z = \frac{\mu}{2},$$

$$G(\mu) = \mathcal{L}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \mu\right) = -\frac{3}{4}\mu^2 + \mu.$$

Максимизируя $G(\mu)$, получим $\mu = \frac{2}{3}$, откуда $x^* = y^* = z^* = \frac{1}{3}$.

Для применения всех этих методов требуется, чтобы целевая функция $J(u)$ и функции ограничений были дифференцируемы, что не всегда соблюдается при использовании численных методов. Поэтому ниже мы приводим программу поиска минимума функции с автоматическим выбором направления и шага и без вычисления производных. Эта программа очень проста, устойчива и не использует никаких особенностей минимизируемой функции, но работает довольно медленно.

Оптимизационные задачи, как и нелинейные, могут решаться в системах САПР только тогда, когда они просты и время вычислений невелико.

```

SUBROUTINE MINF(N,FUNCT,VOISIN,EPSIL,X,FX)
*          E   F   E       E   M S
*
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
EXTERNAL  FUNCT
DIMENSION X(1)
*
```

+ минимизация функции FUNCT(N,X) N неизвестных
+ X: на входе — начальное приближение, на выходе — решение
+ VOISIN: окрестность начального приближения для поиска решения
+ EPSIL: нижняя граница величины шага

```

DIMENSION Y(100),S(100)
IF(N.GT.100) RETURN
DELTA=VOISIN
RO=0.1D0
DO 1 K=1,N
1 S(K)=DELTA
  FX=FUNCT(N,X)
2 FY=FX
  DO 3 K=1,N
3 Y(K)=X(K)
  ITER=ITER+1
  CALL MINIF(N,FUNCT,Y,S,FY)
  IF(FY.LT.FX) GO TO 6
4 IF(DELTA.LT.EPSIL) RETURN
  DELTA=RO*DELTA
  DO 5 K=1,N
5 S(K)=RO*S(K)
  GO TO 2
6 DO 7 K=1,N
  IF(S(K)*(Y(K)-X(K)) .LT. 0.0D0) S(K)=-S(K)
  TETA=X(K)
  X(K)=Y(K)
```

```

7 Y(K)=Y(K)+Y(K)-TETA
  FX=FY
  FY=FUNCT(N,Y)
  CALL MINIF(N,FUNCT,Y,S,FY)
  IF(FY.GE.FX) GO TO 2
  DO 8 K=1,N
  IF(DABS(Y(K)-X(K)) .GT. 0.5D0*DABS(S(K))) GO TO 6
8 CONTINUE
  GO TO 4
  END

```

```

SUBROUTINE MINIF(N,FUNCT,X,S,FX)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(1),S(1)
  DO 3 K=1,N
  X(K)=X(K)+S(K)
  F=FUNCT(N,X)
  IF(F.GE.FX) GO TO 1
  FX=F
  GO TO 3
1 X(K)=X(K)-S(K)-S(K)
  F=FUNCT(N,X)
  IF(F.GE.FX) GO TO 2
  FX=F
  S(K)=-S(K)
  GO TO 3
2 X(K)=X(K)+S(K)
3 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

FUNCTION F(N,X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(2)
  A=X(1)
  B=X(2)
  F=A*A+100.0D0*B*B
  RETURN
  END

```

```

PROGRAM MAIN
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  EXTERNAL F
  DIMENSION X(2)
  X(1)=100.0D0
  X(2)=200.0D0
  CALL MINIF(2,F,10.0D0,0.01D0,X,FX)
  WRITE(6, '(/1X,3G25.8)') X,FX
  END

```


Глава 3

Реализация численных методов в САПР

3.1. ПОСТРОЕНИЕ РАЗБИЕНИЯ

Существенным преимуществом метода конечных элементов является возможность адаптировать его к любой геометрической форме исследуемой области с помощью соответствующего разбиения. Ниже кратко рассмотрены методы, которые используются для выполнения разбиения.

Разбиение с вспомогательной программой. С помощью вспомогательной интерактивной программы определяются узлы на линиях, поверхности и объемы. Эта операция упрощается, если имеется численное описание формы объекта. Необходимо также располагать дополнительными функциями для разрезания, сшивки, уточнения и т. д. Этот метод используется чаще всего.

Разбиение с обучением. Если есть запись предыдущего сеанса, его можно автоматически повторить, внося определенные изменения. Возможности этого метода ограничены.

Библиотека подансамблей. Следуя определенным правилам, можно составить библиотеку подансамблей, разбитых на конечные элементы, и затем собирать из них нужные разбиения.

Разбиение с помощью вычислений. В некоторых случаях можно запрограммировать автоматическое построение разбиения исходя из заданных простых характеристик: толщины, высоты, диаметра и т. д.

Автоматическое разбиение. Этот способ представляет наибольший интерес в сочетании с САПР, дающей численное определение границы. Задача заполнения двумерной области треугольниками решена полностью, существует и решение задачи заполнения трехмерной области четырехгранниками. Другие задачи такого рода еще нуждаются в исследовании.

Модификация ансамблей. Исходя из уже существующего разбиения, легко выполняются изменение масштаба и преобразования симметрии. Можно проводить и более сложные изменения с локальными или глобальными преобразованиями. Если имеющееся разбиение расположено в кубе, составленном из расположенных параллельно осям и эквидистантных полюсов, то с помощью метода Безье можно вычислить параметрические координаты каждого узла и, меняя положение полюсов, управлять перемещениями узлов, которые при этом сохраняют свои параметрические координаты.

Разбиение по соответствию. Проводится разбиение куба на шестигранники и устанавливается соответствие ребер, граней и внутренности куба с подобными частями области, в которой строится разбиение. Полученный результат часто нуждается в уточнении.

Разбиение с помощью физической имитации. Допустим, что решается задача вычисления линий тока в веществе, помещенном в постоянное электрическое поле. Разбиение на шестигранники можно построить с помощью изопотенциальных поверхностей и линий тока, задавая точки и участки входа и выхода внешнего тока. Но для решения этой задачи требуется иметь начальное разбиение, что приводит к итерациям.

Адаптивное разбиение. Это более развитый метод, заключающийся в переопределении разбиения в процессе вычислений в зависимости от природы исследуемого явления.

Разбиение с помощью экспертной системы. Можно увеличить степень автоматизации процесса построения разбиения, формируя команды, выполняющие разбиение в соответствии с геометрической ситуацией, которая определяет данные, и со списком правил, которые определяют действия системы в конкретных ситуациях. Пользователь принимает решения только в самых сложных ситуациях. Пользователь-эксперт может вносить в список новые правила. Этот многообещающий подход к построению разбиения еще находится в стадии исследований.

3.2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

После того как задача решена численно, полученные результаты отображаются визуально. Для этого применяются, как и на этапе построения разбиения, ЭВМ с развитыми графическими средствами и высоким уровнем интерактивности, поэтому используемая САПР должна обладать соответствующими характеристиками. Отметим, что не всегда удается разместить все результаты в базе данных САПР и тогда приходится прибегать к помощи специализированных систем.

К графическим функциям относятся следующие: изображение линий, граней, скрытых частей объекта, различных видов; изображение прозрачных объектов; управление цветом; линии уровня на поверхности; разрезы; линии уровня в разрезе, поверхности уровня; линии тока в векторном поле; трассировка векторного поля; симметрии; мультипликация динамических результатов; измерение положений точек и расстояний; идентификация заданного объекта среди многих других; выделение видимых и невидимых объектов; управление видами; составление твердой копии или видеозаписи; автоматическое повторение некоторых действий.

Чтобы показать одну из типичных графических функций этого этапа, мы приводим ниже программу вычисления линий уровня функции $f(x, y)$ в прямоугольнике с противоположными вершинами в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Эта очень надежная программа может работать с произвольным разрешением и не использует больших таблиц в основной памяти. Она легко адаптируется к случаю, когда функция задана в узлах прямоугольной сетки и может служить для трассировки уровней на поверхности с численным параметрическим определением. Все линии уровня строятся с заданным разрешением даже в самых трудных случаях.

```

SUBROUTINE ISOF(FON,X0,Y0,X1,Y1,NX,NY,NF,KF,IDEF,IFIN,NBC)
      F E E E E E E E E E S S

```

- * Вычисление линий урона функции двух переменных
- * в прямоугольнике плоскости (x, y)
- * При каждом обращении вычисляются положения точек,
- * в которых функция равна нулю
- * —FON: функция двух переменных
- * —X0, Y0: координаты левого нижнего угла прямоугольника
- * — X1, Y1: координаты правого верхнего угла прямоугольника
- * — NX: число отрезков, на которые делится (X0, X1) — максимум 1024
- * — NY: число отрезков, на которые делятся (Y0, Y1)
- * — NF : номер устройства выходного файла
- * — KF: код файла (считается, что файл открыт до обращения
- * и не будет закрыт после обращения)
- * . < 0: файл прямого доступа
- * . = 0: неформатированный последовательный файл
- * . > 0: форматированный последовательный файл
- * — IDEF: номер первой записи в файле, если KF < 0
- * — IFIN: номер последней записи в файле, если KF < 0
- * —NBC: число линий уровня
- * Полное число точек: IFIN — IDEF + 1
- * В выходной файл помещается последовательность записей (I, X, Y),
- * где точка (X, Y) принадлежит I-той линии
- * Для построения кривой следует соединить точки в порядке их
- * следования в файле
- * В данной версии все вещественные переменные
- * имеют обычную точность

```

DIMENSION ZD(1025),ZF(1025),IB(1025)
MX=NX+1
IF(MX.GT.1025) RETURN
MY=NY+1
EX=(X1-X0)/FLOAT(NX)
EY=(Y1-Y0)/FLOAT(NY)
IY=1
X=X0

```

```

      IFIN=IDEF-1
      DO 10 I=1,MX
        ZF(I)=FON(X,Y0)
        X=X0+FLOAT(I)*EX
10    IB(I)=0
      NBC=0
      YF=Y0

```

- * поиск ветвей на y = Y0

```

    JA=-1
    I=0
    XF=X0
    X=X0
    IF(ZF(1))51,55,51
51 I=I+1
    XF=X0+EX*FLOAT(I)
    IF(NX-I)70,52,52
52 IF(ZF(I+1))59,53,59
53 X=XF
    IF(JA)54,57,56
54 NBC=NBC+1

    CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,NBC,X0,YF)
    IB(I)=NBC
    IF(NX-I)51,51,55
55 JA=0
    NBC=NBC+1
    GO TO 58
56 IB(JA)=0
57 JA=I
58 IB(I+1)=NBC
61 CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,NBC,X,Y0)
    GO TO 51
59- IF(ZF(I)*ZF(I+1))60,62,62
60 CALL ISOF1(XF-EX,Y0,ZF(I),XF,Y0,ZF(I+1),X,Y)
    JA=-1
    NBC=NBC+1
    IB(I)=NBC
    GO TO 61
62 JA=-1
    GO TO 51
70 IF(JA)100,100,71
71 IB(NX)=0
*
* переход к следующей полосе
*
100 YD=YF
    IGO=1
    YF=Y0+FLOAT(IY)*EY
    XD=X0
    DO 101 I=1,MX
    ZD(I)=ZF(I)
    ZF(I)=FON(XD,YF)
101 XD=X0+FLOAT(I)*EX
*
* следование по известным ветвям
*
    DO 133 I=1,NX
    IF(IB(I))132,133,133
132 IB(I)=0
133 CONTINUE
    I=1

```

```
102 J=I
    JA=0
    L=4
    IF(IB(I))134,134,103
103 IF(ZD(I))120,111,120
111 IF(I-1)134,114,112
112 IF(IB(I-1)+2)113,114,113
113 IB(I)=0
    GO TO 134
114 K=0
    GO TO 300
120 IF(ZD(I+1))131,121,131
121 K=1
    GO TO 300
131 K=0
    L=5
    GO TO 300
134 I=I+1
    IF(NX-I)200,102,102
*
* поиск новых ветвей
*
200 IGO=2
    I=1
    XF=X0
201 XD=XF
    XF=X0+EX*FLOAT(I)
    K=3
    L=5
    JA=0
    IF(IB(I))210,202,210
202 CALL ISOF2(ZD,ZF,XD,XF,YD,YF,I,J,K,L,X,Y)
    IF(J)210,203,203
203 NBC=NBC+1
    IB(I)=NBC
    CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,NBC,X,Y)
    IF(K)210,207,204
204 IF(L-2)210,205,206
205 JA=-1
206 K=0
    J=I
    GO TO 300
207 IF(L-2)210,210,208
208 K=2
    L=1
    J=I
    GO TO 300
210 I=I+1
    IF(NX-I)400,201,201
```

```
*
* поиск 2-й точки на контуре квадрата
*
```

```
300 XF=XO+EX*FLOAT(J)
    XD=XF-EX
    CALL ISOF2(ZD,ZF,XD,XF,YD,YF,J,JN,K,L,X,Y)
    IF(JN)301,310,320
301 IF(L-2)302,360,302
302 IB(J)=-2
    IF(JA)360,360,303
303 IB(JA)=-1
    GO TO 360
310 JN=J
    JL=IB(J)
    IF(L-2)311,342,311
311 IB(J)=-1
    GO TO 342
320 IF(NX-JN)310,321,321
321 IF(J-JN)323,340,323
323 IF(IB(JN))310,340,322
322 IF(ZD(JN))325,324,325
324 IB(JN)=IB(J)
    J=JN
    GO TO 340
325 JL=IB(JN)
    CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,JL,X,Y)
    JL=IB(J)
    IB(J)=-1
    IB(JN)=-1
    J=JN
    GO TO 342
340 JL=IB(J)
    IB(JN)=IB(J)
342 CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,JL,X,Y)
    IF(JA)350,352,351
350 JA=0
    IF(J-1)354,354,355
354 NBC=NBC+1
    CALL ISOF3(KF,NF,IFIN,NBC,XF,YO)
    IB(1)=NBC
    GO TO 353
355 IB(J)=IB(J-1)
    GO TO 353
351 IB(JA)=-1
352 JA=J
353 IF(J-JN)349,360,349
349 J=JN
    GO TO 300
360 IF(J-I)362,362,361
361 I=J
362 GO TO (134,210),IGO
400 IY=IY+1
    IF(NY-IY)401,100,100
401 RETURN
    END
```

```
SUBROUTINE ISOF1(XD, YD, ZD, XF, YF, ZF, X, Y)
C=-ZD/(ZF-ZD)
X=XD+C*(XF-XD)
Y=YD+C*(YF-YD)
RETURN
END

SUBROUTINE ISOF2(ZD, ZF, XD, XF, YD, YF, I, J, K, L, X, Y)
DIMENSION ZD(1), ZF(1)
DO 100 M=1, L
IGO=M+K
GO TO (1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3), IGO
1 IF(ZD(I+1)*ZF(I+1))10, 100, 100
10 K=0
L=3
J=I+1
CALL ISOF1(XF, YD, ZD(I+1), XF, YF, ZF(I+1), X, Y)
RETURN
2 IF(ZF(I+1))100, 20, 100
20 K=0
L=2
J=I+1
X=XF
Y=YF
RETURN
3 IF(ZF(I)*ZF(I+1))30, 100, 100
30 K=-1
J=I
CALL ISOF1(XD, YF, ZF(I), XF, YF, ZF(I+1), X, Y)
RETURN
4 IF(ZF(I))100, 40, 100
40 K=3
L=2
J=I-1
X=XD
Y=YF
RETURN
5 IF(ZD(I)*ZF(I))50, 100, 100
50 K=2
L=3
J=I-1
CALL ISOF1(XD, YD, ZD(I), XD, YF, ZF(I), X, Y)
RETURN
100 CONTINUE
J=-1
RETURN
END

SUBROUTINE ISOF3(KF, NF, IFIN, I, X, Y)
IFIN=IFIN+1
IF(KF)1, 2, 3
1 WRITE(NF'IFIN) I, X, Y
RETURN
```

```
2 WRITE(NF) I,X,Y  
  RETURN  
3 WRITE(NF,4) I,X,Y  
4 FORMAT(1X,I4,2G15.7)  
  RETURN  
  END
```

3.3. ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Для вычислений при решении научных задач и для САПР используются либо мощные ЭВМ с развитыми графическими терминалами, либо рабочие станции и в обоих случаях эффективная сеть. Элементы основного программного обеспечения описаны ниже.

Операционная система. Выполняет следующие функции:

- управление памятью и организацию виртуальной памяти;
- управление пользователями;
- управление приоритетами;
- управление процессами пользователей;
- пакетную обработку;
- телеобработку;
- анализ времени выполнения;
- обслуживание системы локальных или дистанционных последовательных и индексно-последовательных файлов, их защиту и распределение;
- защиту памяти;
- функционирование редактора текста, ассемблера, Фортрана, редактора связей, командных файлов;
- локальные связи и телекоммуникации;
- управление архивами.

Локальная система баз данных. Содержит объекты вычислений (данные и результаты) и должна обеспечивать хранение информации различных типов (целые и действительные числа, символы, указатели) с различной структурой (списки, векторы, таблицы, графы). Кроме того, она должна допускать динамическое определение вновь образуемых структур, управление хранящимися в памяти объектами как в диалоговом режиме, так и с помощью программ и процедур, и добавление к основной информации разнообразных определяющих признаков, таких, например, как наблюдаемость, обнаружимость, назначенный относительный приоритет, защищенность, синоним или внешнее имя, графический уровень, локальная метка, внешний блок, цвет, штрих, яркость, мерцание, автор, даты (например, создания, модернизации и обращения), номер версии, наличие шифра, короткие и длинные комментарии, связь с номенклатурой, допуски, состояние поверхности, виды обработки и т. д.

Графическая система. Следует выбирать либо специализированную систему с хорошими характеристиками, либо систему, предназначенную для конструирования (GDDM, TCS, BENSON), либо в конце концов любую

стандартную систему (GKS или PHIGS). Дружественная САПР, как правило, дает такую возможность.

Интерактивность. Для достижения высокого уровня интерактивности необходимо иметь следующие возможности:

- управлять режимом работы (интерактивный, пакетный, тест, макрокоманды, обработка ошибки);
- вести рабочий журнал;
- считывать имеющуюся на данный момент документацию;
- интерпретировать команды с учетом констант, переменных, структур, косвенной адресации, коррекции и модификации команд и управления, если команда не полна;
- определять и создавать макрокоманды;
- иметь код возврата команды;
- автоматизировать начало и конец сеанса;
- давать эхо-сигнал размещения данных в базе данных;
- иметь опции для работы при отказах;
- вести статистику.

Современная тенденция развития средств программирования в САПР состоит в том, чтобы, используя эти программные средства, избегать непрерывного усложнения программ и ориентироваться на ограниченный набор простых команд, действующих на типизированные объекты, расположенные в базе данных. Но для этого требуется большая база данных, которой не обладают существующие системы; поэтому для выполнения необходимых действий обычно используют элементарные команды, объединенные в макрокоманды.

3.4. СВЯЗИ

В настоящее время архивное хранение и связи одной системы с другой осуществляются в форме специализированных файлов. Существенного упрощения связей можно достичь, используя стандарты. Так, например, стандарт IGES ориентирован на элементарные объекты САПР. Гораздо более полный и эффективный стандарт SET (стандарт AFNOR Z68300) дает возможность определять объемы, линии геометрических изображений и разбиения для метода конечных элементов.

3.5. ТЕСТИРОВАНИЕ

Тестирование вычислительного метода состоит в проверке точности его результатов во всей допустимой области изменения данных. Для этого используют либо задачи с уже полученными аналитически или численно решениями, либо уже проверенный метод, либо экспериментальные данные, либо обратный процесс, который, исходя из полученных результатов, при-

водит к соответствующим исходным данным. Так, например, двумерному уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ удовлетворяют все линейные комбинации следующих функций:

$$1, x, y, \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}, \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}, \frac{x^4}{12} - \frac{x^2y^2}{2};$$

$$\frac{x^3y}{6} - \frac{xy^3}{6}, \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{6}, \dots$$

Поэтому метод решения этого уравнения можно проверить, задавая различные области в плоскости xOy , дискретизируя их различными способами и налагая граничные условия типа Дирихле или фон Неймана, с тем чтобы с большей или меньшей точностью получить заранее заданное решение.

Глава 4

Разбиения для метода конечных элементов

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Метод конечных элементов находит все более широкое применение для численного решения самых разных задач. Первый этап решения задачи этим методом состоит в дискретизации рассматриваемой области на треугольники, четырехугольники, четырехгранники и т. д. Такое разбиение несет геометрическую информацию о покрытии области элементами, с каждым из которых связано определенное число численных значений, необходимых для последующих вычислений (построение матриц, блокирование некоторых степеней свободы, решение систем, визуальное представление и т. д.). Эту информацию удобно определять как *структуру данных*, содержащую в сжатой и доступной форме все величины (геометрические и числовые).

Многочисленные методы построения разбиений для дву- и трехмерных областей с геометрической точки зрения подразделяются на три основных класса:

- построение разбиения, осуществляемого подходящим преобразованием отображения разбиения области с геометрически простой формой;
- построение разбиения, осуществляемого подходящим преобразованием уже существующего разбиения;

- прямое, элемент за элементом, построение разбиения, начиная с задания распределения точек в области или на ее границе.

Из-за ряда ограничений разделить область на элементы, пользуясь только каким-то одним способом, можно только в исключительных случаях, поскольку метод построения разбиения должен:

- давать возможность обрабатывать сложные геометрические конфигурации;
- минимизировать выполняемую работу и ограничивать максимальное число требуемых данных;
- обеспечивать надежность результатов;
- наилучшим образом использовать возможности применяемых алгоритмов, которые в разной степени приспособлены к рассматриваемым геометрическим условиям;
- давать результат, пригодный для дальнейшего использования и содержащий всю необходимую информацию в форме, обеспечивающей быстрый и удобный доступ к ней.

Эти соображения приводят к определению общей методологии построения разбиения, основанной на анализе задачи «сверху вниз» и последующем выполнении различных операций «снизу вверх». Таким образом, задача сводится к последовательности более простых подзадач, которые решаются как независимые модули, одна за другой, а группировка их решений дает конечный результат. Следовательно, необходимо иметь связный модульный набор средств построения разбиения, включающий наряду с алгоритмами собственно разбиений всю окружающую среду для манипуляций с разбиениями, их модификации и визуального представления.

Полученное в результате разбиение, т. е. соответствующая структура данных, предоставляет данные для всех последовательных этапов метода конечных элементов.

4.2. РАЗБИЕНИЕ И СТРУКТУРА ДАННЫХ

Для любой задачи разбиение должно содержать все сведения, необходимые на всех этапах решения. К этим сведениям относятся:

- геометрическая информация: разбиение должно включать как можно более точное описание геометрического покрытия области, в которой проводятся вычисления;
- информация об интерполяции конечными элементами: разбиение должно определять выбранный способ интерполяции (число узлов в элементе, их список, их положения и т. д.);
- физическая информация: описание характеристик материалов, нагрузок, сил, источников тепла и т. д., при этом величины, содержащиеся в разбиении, должны допускать реализацию заданных краевых условий.

Этим требованиям удовлетворяет внутреннее представление разбиения в виде набора величин и таблиц, которое включает список составляющих

геометрических элементов. Каждый элемент описывается следующими параметрами:

- тип элемента: отрезок, треугольник, четырехугольник, четырехгранник, пятигранник, шестигранник или специальный элемент
- топология элемента;
- список вершин;
- число и список узлов;
- координаты вершин;
- номер подобласти или материала элемента. Указание этого номера позволяет проводить необходимую обработку по схеме:

номер подобласти ↔ вид обработки;

- ссылочные номера для всех позиций элемента. Так, например, трехмерный элемент в качестве этих позиций имеет грани, ребра и вершины, а двумерный — стороны и вершины. Каждой такой позиции приписывается свой ссылочный номер, что позволяет проводить их обработку по схеме:

ссылочный номер ↔ вид обработки.

Номер подобласти дает возможность, во-первых, приписывать каждому материалу его физические характеристики и, во-вторых, вычислять силы, приложенные к этому материалу, что обычно выполняется путем интегрирования по области ($\int_{\Omega} \dots$).

Кроме выполнения чисто геометрической роли, ссылочный номер служит для соотнесения той или иной части границы с тем или иным способом обработки таким же образом, как и номер подобласти. Ссылочный номер точки обычно указывает на заданные граничные условия, а ссылочные номера ребер и граней — на интегрирование по границе ($\int_{\Gamma} \dots$).

Для хранения этой информации вводится структура данных, которая состоит из набора таблиц определенной формы. Так, например, в программе Modulef эта структура типа NOPO содержит шесть таблиц. В качестве примера мы приводим ниже последнюю из них, описывающую элементы.

Цикл по элементам от $I = 1$ до числа элементов

- | | |
|---|---------|
| • код геометрии элемента | NGGE |
| 1: узел, 2: отрезок, 3: треугольник, 4: четырехугольник,
5: четырехгранник, 6: пятигранник, 7: шестигранник,
8: специальный элемент | |
| • число слов, необходимых для хранения ссылочных номеров граней, ребер и вершин | NMAE |
| • номер подобласти элемента | NDSDE |
| • число узлов элемента | NNO |
| Цикл по J от 1 до NNO | |
| номер J-го узла элемента | NONO(J) |
| Конец цикла | |

* если число узлов и число точек совпадают, то переход на (1)

• число точек элемента	NPO
Цикл по J от 1 до NPO	
номер J-й точки элемента	NOPOI(J)
Конец цикла	
(1) *если NMAE = 0, то переход на конец цикла по элементам	
• указатель уровня информации о ссылочных номерах граней, ребер и вершин	INING
INING = 3: приводятся только ссылочные номера всех вершин элемента	
INING = 2: приводятся ссылочные номера всех вершин и ребер элемента	
INING = 1: приводятся ссылочные номера всех граней, вершин и ребер элемента	
Цикл по J от 2 до NMAE	
ссылочный номер вершин, если INING = 3	
ссылочный номер ребер и вершин, если INING = 2	
ссылочный номер граней, ребер и вершин, если INING = 1	
Конец цикла	
Конец цикла по элементам	

Такая структура данных появляется на выходе всех модулей, строящих разбиение, а затем с помощью различных вспомогательных средств ее содержимое модифицируется, визуализируется, распечатывается и используется.

4.3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗБИЕНИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Для построения разбиения чаще всего применяются следующие методы:

- M1: построение разбиения «вручную» с представлением всей необходимой информации в виде структуры данных;
- M2: построение покрытия области делением нескольких крупных элементов на более мелкие;
- M3: построение покрытия области элементами, начиная с задания распределения точек на ее границе;
- M4: построение покрытия области на основе облака точек, распределенных внутри области;
- M5: построение разбиения с помощью геометрического (симметрия, локальное или глобальное деление, ...) и/или топологического преобразования уже существующего разбиения;
- M6: построение трехмерного разбиения с помощью такой обработки двумерного разбиения, которая позволяет получать трехмерные элементы из двумерных.

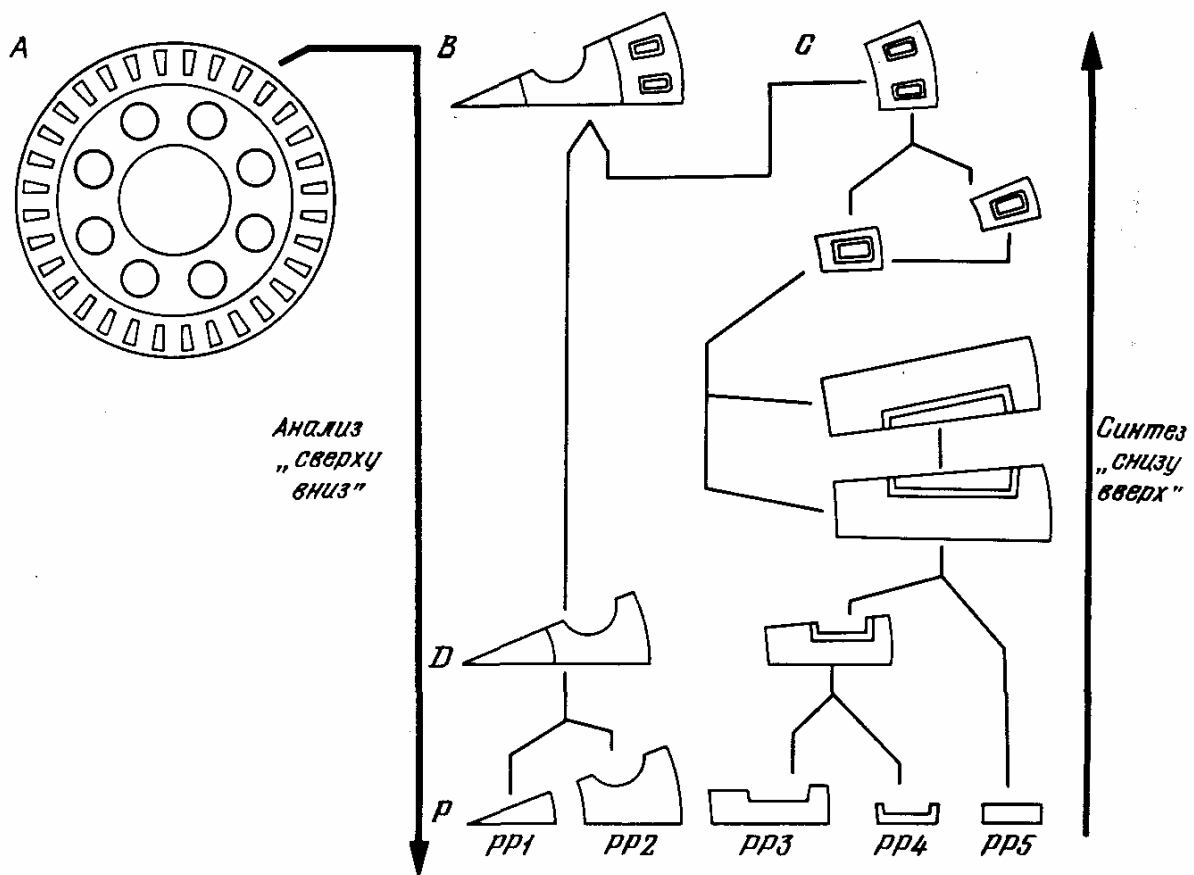


Рис. 4.1. Анализ методом «сверху вниз».

А — полная область; В — использование вращений и симметрий;
С, D — разделение на простые части; P — первичные части.

Легко проверить, что все эти методы, кроме M1, относятся к одному из описанных выше классов.

Встретившись со сложной задачей, инженер должен проанализировать ее «сверху вниз» (рис. 4.1) и выделить простым и логичным способом те части объекта, на которых он будет эффективно строить разбиение, руководствуясь следующими требованиями:

- части должны соответствовать особенностям алгоритмов разбиения;
- для сведения к минимуму работы части должны быть такими, чтобы разбиение одних частей можно было получить как простое геометрическое преобразование разбиения других частей.

Первичные части, на которых строится разбиение, являются результатом деления всей области на геометрически простые подобласти. Для выполнения этого деления используются несколько возможностей:

- повторяемость структуры области (симметрия, трансляция, вращение) для определения первичных частей, на которых можно просто построить разбиение, и отделение их от других частей, для которых нужно использовать преобразования;
- искусственное деление области на геометрически более простые зоны, из которых формируются первичные части.

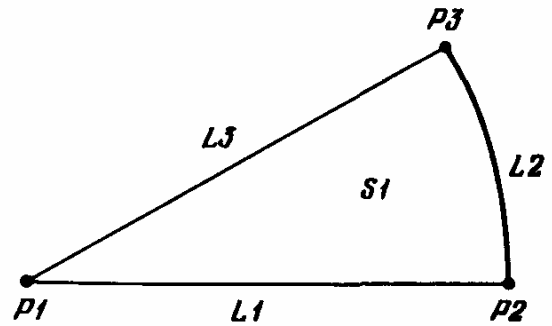


Рис. 4.2. Пример первичной части.

Результатом этого этапа работы являются первичные части для построения на них разбиения. Эти части просты и приспособлены к алгоритмам разбиения.

Следующий этап — построение «снизу вверх» — состоит в том, чтобы из простых частей составить разбиение всей области. Каждая первичная часть тоже описывается «снизу вверх»: сначала задаются точки, на основе описаний точек строятся линии, а на основе описаний линий — поверхности. Так, например, для определения первичной части $PP1$ (рис. 4.2) достаточно трех точек $P1$, $P2$ и $P3$. Если эти точки заданы, контур первичной части может быть описан линиями $L1$, $L2$ и $L3$, на которые можно нанести необходимое число промежуточных точек. Линия $L2$, например, соединяющая точки $P2$ и $P3$, геометрически определяется кривой $f(x, y) = 0$ и имеет n промежуточных точек, которые наносятся каноническим делением стороны $P2P3$.

Такой естественный способ представления данных в форме «снизу вверх» дает ряд преимуществ:

- сложные элементы (объемы) строятся из более простых элементов (поверхности — из линий, а линии в свою очередь — из точек), что позволяет легко проводить требуемые модификации;
- каждая из позиций (точки, линии, поверхности, объемы) содержит в сжатой форме всю необходимую информацию (тип геометрии, номер под-области, ссылочный номер);

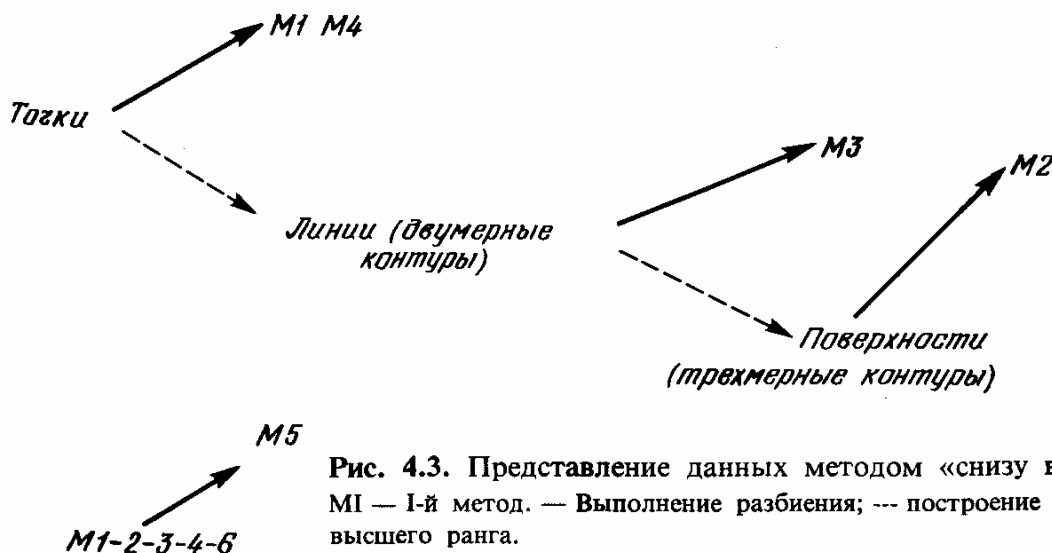


Рис. 4.3. Представление данных методом «снизу вверх». $M1$ — I-й метод. — Выполнение разбиения; --- построение позиций высшего ранга.

• упрощается сшивка частей, поскольку зоны сшивки (линии в двумерном и поверхности в трехмерном пространствах) точно и однозначно определены и имеют меньшую сложность (одномерны в двумерном и двумерны в трехмерном пространствах).

Общая схема представления данных «снизу вверх» приведена на рис. 4.3.

4.4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗБИЕНИЯ

4.4.1. Метод М1: разбиение вручную

Некоторые области можно грубо определить, если дать описание нескольких крупных элементов. Такое разбиение затем подвергается дальнейшей обработке с помощью, например, метода М5, чтобы получить более мелкую сетку. Ниже приведен пример, показывающий применение этого простого метода в двумерном пространстве (рис. 4.4). Такое разбиение, описываемое малым числом данных (3 крупных элемента) дает, однако, хорошее представление об области.

Каждый из крупных элементов затем делится на N^2 элементов¹⁾ того же типа с помощью промежуточных точек, расположенных либо на границе, либо внутри элемента (рис. 4.5).

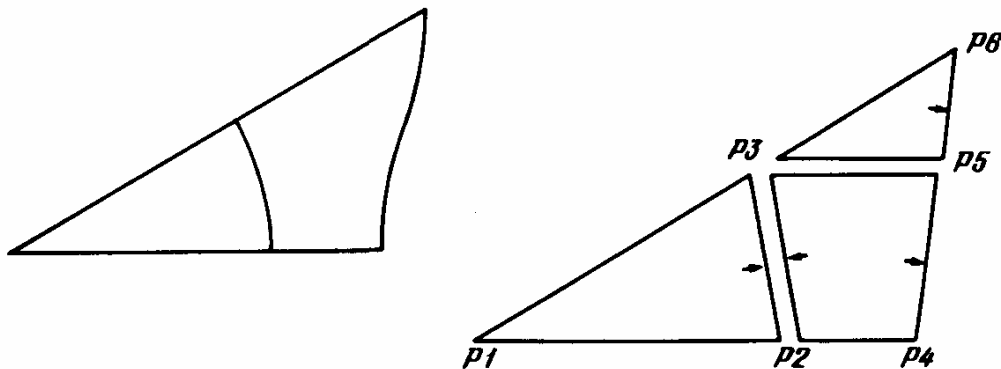


Рис. 4.4. Область (слева) описывается тремя крупными элементами (справа).

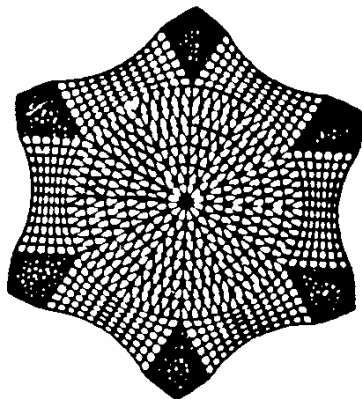


Рис. 4.5.

¹⁾ N — число элементов, на которое делится одномерная составляющая объекта (граница двумерного объекта, ребро и т. п.). — Прим. ред.

4.4.2. Метод M2: использование преобразования

Этот метод применяется к областям, которые топологически идентичны классическим геометрическим фигурам (треугольники, четырехугольники, четырехгранники, пятигранники, шестигранники и т. д.), и выполняется в несколько этапов:

- 1) распределение точек на контуре реальной области отображается на контур эталонной фигуры с помощью соответствующего преобразования;
- 2) тривиальным образом выполняется разбиение эталонной фигуры;
- 3) разбиение эталонной фигуры отображается на реальную область с помощью обратного преобразования.

На рис. 4.6—4.8 схематически изображена эта последовательность операций для случая, когда эталонной фигурой служит прямоугольник. Полученные в результате четырехугольники могут быть различными способами разделены на треугольники.

Преобразование F_T определяется выражением

$$F_T(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{y})f_1(\hat{x}) + \hat{x}f_2(\hat{y}) + \hat{y}f_3(\hat{x}) + (1 - \hat{x})f_4(\hat{y}) - ((1 - \hat{x})(1 - \hat{y})a_1 + \hat{x}(1 - \hat{y})a_2 + \hat{x}\hat{y}a_3 + (1 - \hat{x})\hat{y}a_4),$$

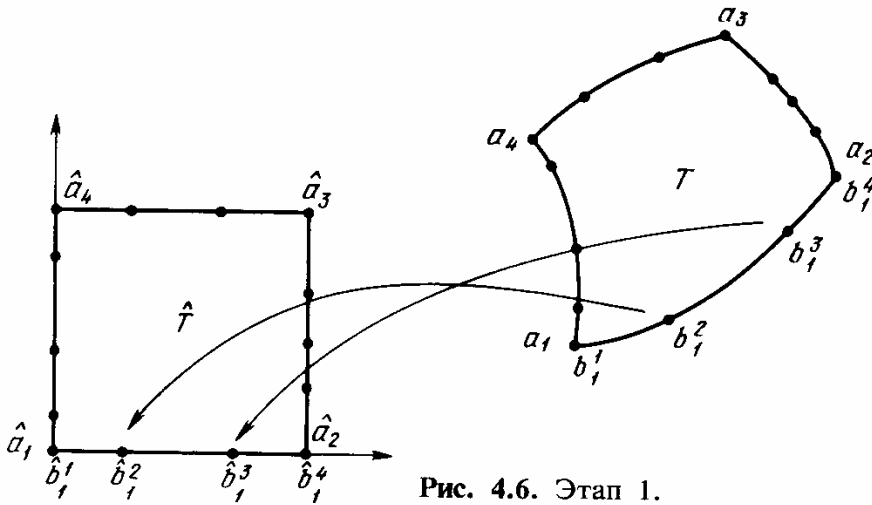


Рис. 4.6. Этап 1.

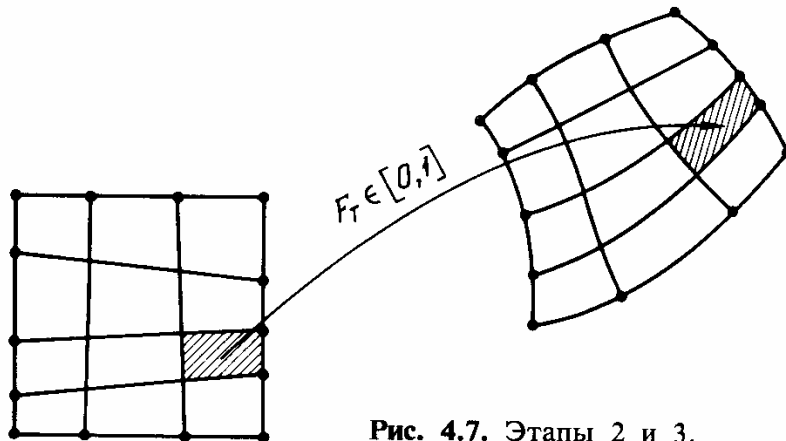


Рис. 4.7. Этапы 2 и 3.

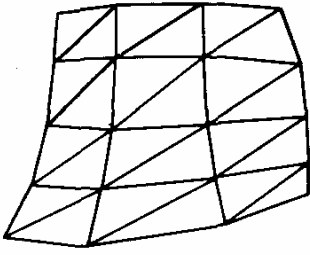


Рис. 4.8. Окончательное разбиение на треугольники.

где a_i — 4 вершины реальной области, \hat{a}_i — 4 вершины на эталонном прямоугольнике \hat{T} , \hat{x} , \hat{y} — текущие координаты на \hat{T} , f_i — параметризация сторон реальной области ($i = 1, \dots, 4$).

Для шестигранника разбиение представлено на рис. 4.9. Преобразование F_T имеет вид

$$F_T(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\alpha_1\phi_1(\hat{x}, \hat{y}) + \alpha_2\phi_2(\hat{y}, \hat{z}) + \alpha_3\phi_3(\hat{y}, \hat{z}) + \\ + \alpha_4\phi_4(\hat{x}, \hat{y}) + \alpha_5\phi_5(\hat{y}, \hat{z}) + \alpha_6\phi_6(\hat{z}, \hat{x})) / \sum_{i=1}^6 \alpha_i,$$

где функции $\alpha_i = \alpha_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ определяются выражениями

$$\alpha_i = (1 - \hat{x}_{i-1}) \frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_i + \hat{x}_{i-1}} \frac{1 - \hat{x}_i}{1 - \hat{x}_i + \hat{x}_{i-1}} \frac{\hat{x}_{i+1}}{\hat{x}_{i+1} + \hat{x}_{i-1}} \frac{1 - \hat{x}_{i+1}}{1 - \hat{x}_{i+1} + \hat{x}_{i-1}}$$

при $i = 1, 2, 3$,

$$\alpha_{i+3} = \hat{x}_{i-1} \frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1}} \frac{1 - \hat{x}_i}{2 - \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}} \frac{\hat{x}_{i+1}}{\hat{x}_{i+1} + 1 - \hat{x}_{i-1}} \frac{1 - \hat{x}_{i+1}}{2 - \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1}},$$

где $\hat{x}_1 = x$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$ и $\hat{x}_3 = \hat{z}$ ($\hat{x}_0 = \hat{z}$, $\hat{x}_4 = \hat{x}_1 = x$).

На поверхности \hat{T} $F = \phi_i$, где ϕ_i — приближенное или точное описание поверхности T (рис. 4.10).

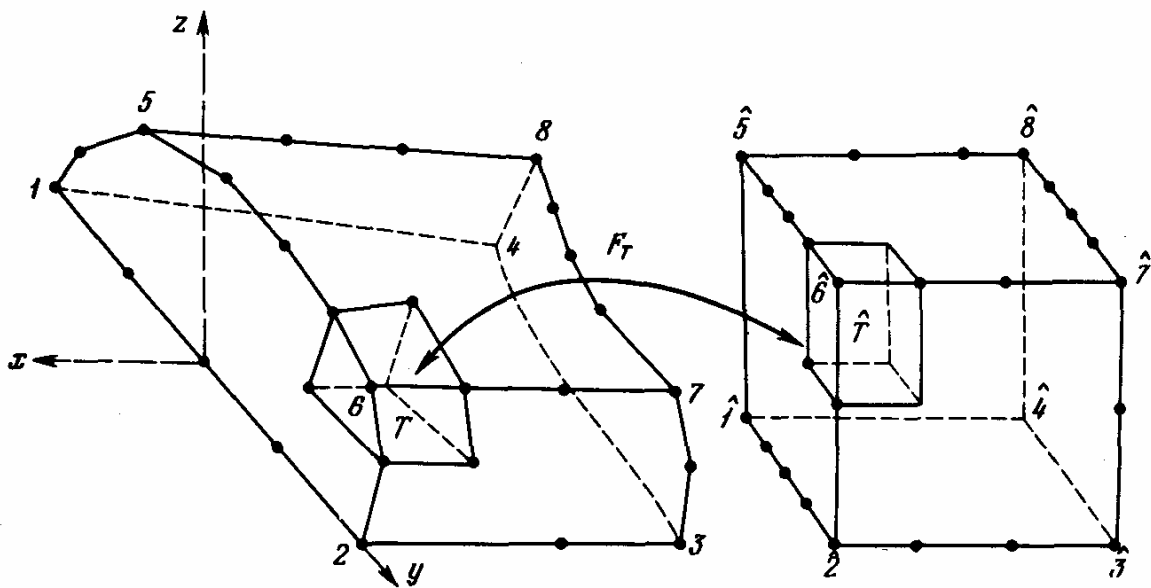


Рис. 4.9.

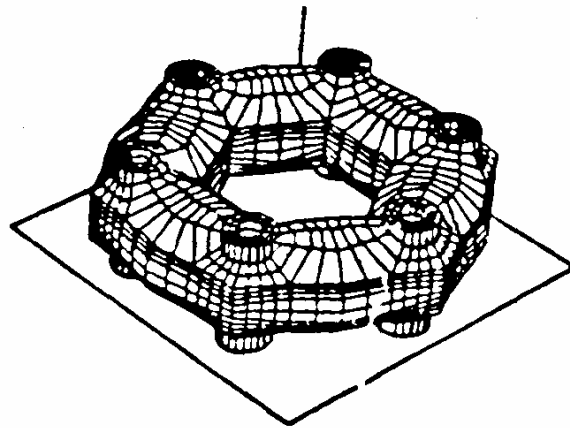


Рис. 4.10.

В результате получаем разбиение области на шестигранники, каждый из которых может быть затем разделен на 2 пятигранника или на 5 или 6 четырехгранников.

4.4.3. Метод М3: прямое построение

Для построения покрытия области элементами используется задание точек на ее контуре. Существует несколько методов, относящихся к этому классу, одни из которых состоят в построении внутренних точек и элементов с помощью эмпирической процедуры качественного анализа данных, а другие формируют внутренние точки и элементы, основываясь на строгих геометрических теоремах. Метод Вороного, применение которого для двумерного пространства мы кратко описываем ниже, относится ко второму типу.

Метод состоит в следующем: исходя из имеющегося разбиения области на треугольники с вершинами в данных p точках, строится разбиение с учетом $p + 1$ -й точки. Это разбиение образуется соединением новой точки с окружающими ее точками старого разбиения и удалением некоторых сторон треугольников старого разбиения. Метод инициализируется построением треугольника по трем точкам, не лежащим на одной прямой. В качестве исходных данных можно задать распределение точек либо внутри области, либо на ее границе. В первом случае описанный выше процесс повторяется до исчерпания списка точек, во втором случае сначала строится разбиение на основе только точек на границе, а затем это разбиение корректируется добавлением точек в барицентры «неправильных» элементов.

Этот же метод применяется к трехмерным областям и дает покрытие области четырехгранниками, которое определяется либо распределением точек внутри области, либо списком граней, описывающих ее границу.

4.4.4. Метод М4: облако точек

Это частный случай описанного выше метода Вороного. Одним из интересных его применений является возможность строить разбиение на основе заранее заданных точек, которые получаются в результате предварительных вычислений или с помощью редактора точек.

4.4.5. Метод М5: геометрические или топологические модификации

Мы не будем останавливаться на методах, которые с помощью классических геометрических преобразований (перенос, симметрия, вращение, изменение масштаба) позволяют получить из исходного разбиения его отображение. Более интересны алгоритмы глобального и локального дробления.

С помощью глобального дробления (измельчения) каждый элемент делится на N^n элементов того же типа (n — размерность пространства). Алгоритм глобального дробления должен учитывать геометрию области и для этого допускать выполнение проекций на ее границы (рис. 4.5). Алгоритм для трехмерных областей, основанный на просмотре всех возможных вариантов, позволяет делить шестигранники на пятигранники или на 5 или 6 четырехгранников.

Локальное дробление дает возможность делить элементы согласно выбранной стратегии. На приведенных ниже рисунках показаны примеры дробления треугольников и четырехугольников относительно одной или нескольких точек (рис. 4.11 и 4.12).

При проведении локального дробления возникают трудности, связанные с управлением зоной дробления: если к стороне одного из элементов добавлена одна точка, то ее необходимо учесть и в смежном элементе. Эта проблема становится еще острее в случае трехмерной области.

4.4.6. Метод М6: трехмерное разбиение на основе двумерного

Многие трехмерные первичные части после их разделения становятся подобны цилиндрам. В таких случаях для построения трехмерного разбиения достаточно иметь двумерное разбиение основания цилиндра и данные о составляющих его слоях.

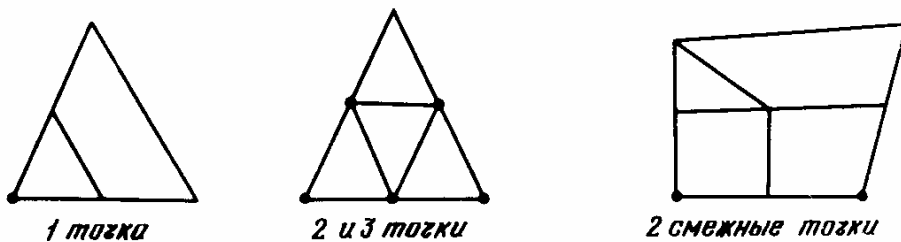


Рис. 4.11.

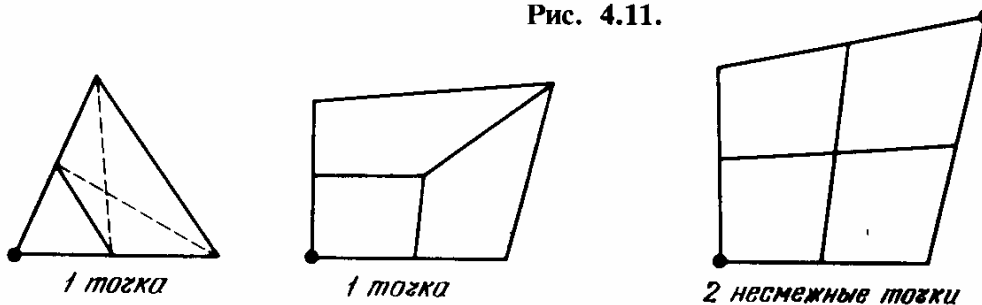


Рис. 4.12.

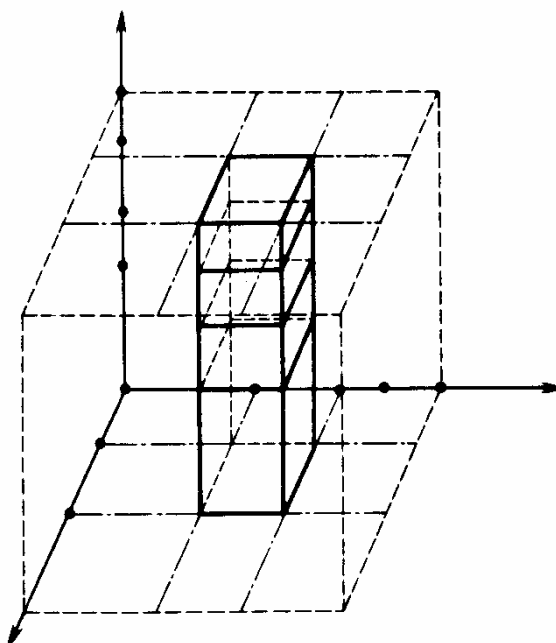


Рис. 4.13.

Если в основании лежит прямоугольная сетка, определяемая n_1 точками на оси x и n_2 точками на оси y , то, задав число слоев n_3 , можно построить трехмерное разбиение на шестигранники, которые затем делятся на пятигранники или четырехгранники (рис. 4.13). В общем случае каждый треугольник основания используется для построения соответствующих пятигранников, а четырехугольник — шестигранников (рис. 4.14). Последующей обработкой методом М5 из них получают четырехгранники (рис. 4.15).

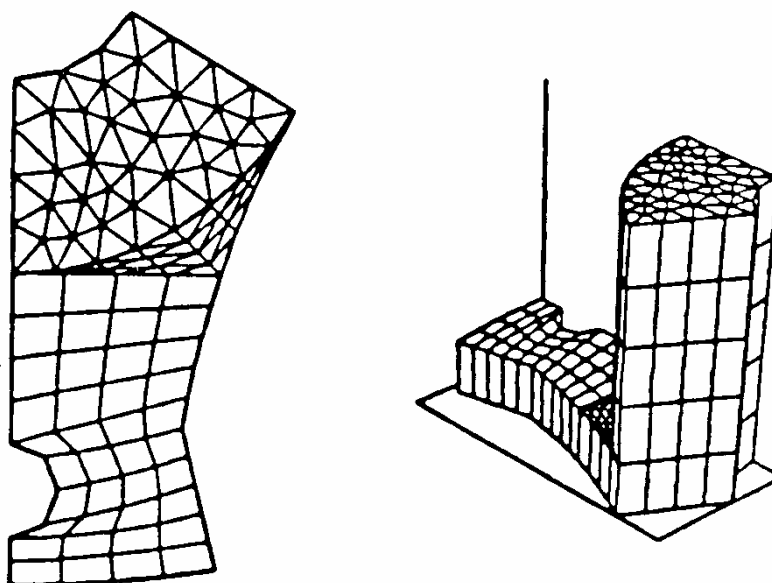


Рис. 4.14.

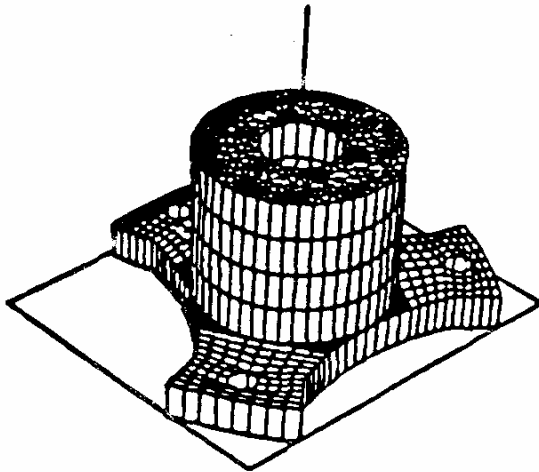


Рис. 4.15.

4.4.7. Дополнительные особенности

Для получения более регулярного разбиения иногда используют алгоритмы регуляризации, которые обычно основаны на методе барицентров: каждая точка смещается к барицентру фигуры, образованной прилегающими к ней элементами. Часто применяемая операция сшивки двух разбиений использует кодирование и декодирование положений точек, что позволяет быстро и надежно определять идентичные точки сшиваемых разбиений. Кроме того, этот алгоритм проверяет качество сшивки, обнаруживая возникающие дефекты (пустые места, образовавшиеся из-за неправильного соединения точек, ребер или граней).

Некоторые методы решения задач нуждаются в «оптимальной» нумерации узлов разбиения. Нумерация на выходе алгоритмов разбиения обычно не обладает свойством оптимальности, а если и обладает, то это свойство теряется после сшивки отдельных частей в одно целое. Поэтому необходимо воспользоваться одним из методов нумерации, простейший из которых метод Гиббса заключается в минимизации разности номеров соседних узлов.

4.5. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ. КОНТРОЛЬ. ПРИМЕРЫ

Качество полученного разбиения оценивается визуально или определением площадей элементов (площадь вычисляется как векторное произведение): если хотя бы одна из площадей отрицательна, то разбиение выполнено неправильно. Визуальный осмотр полезен и в тех случаях, когда отрицательных площадей нет.

Программа визуального представления разбиения должна давать возможность:

- 1) изображать элементы сплошными линиями различной толщины или штрихами;
- 2) изображать деформированные заданным образом элементы при решении задач теории упругости;

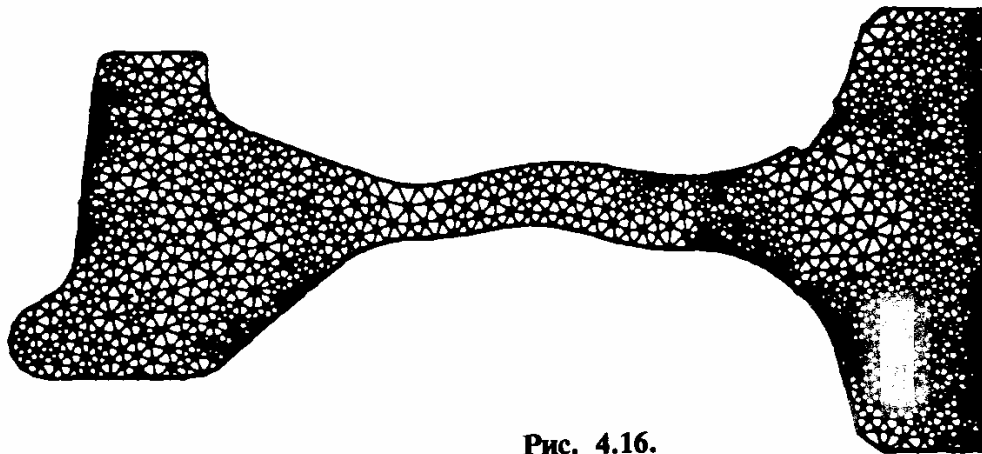


Рис. 4.16.

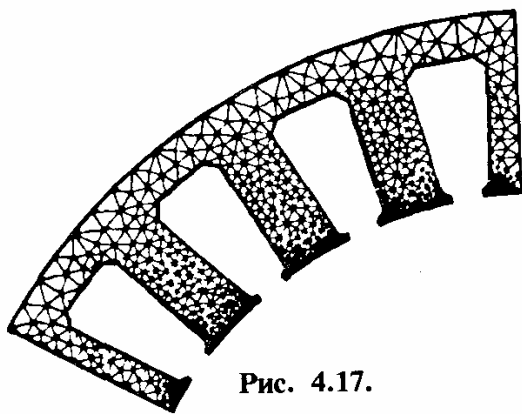


Рис. 4.17.

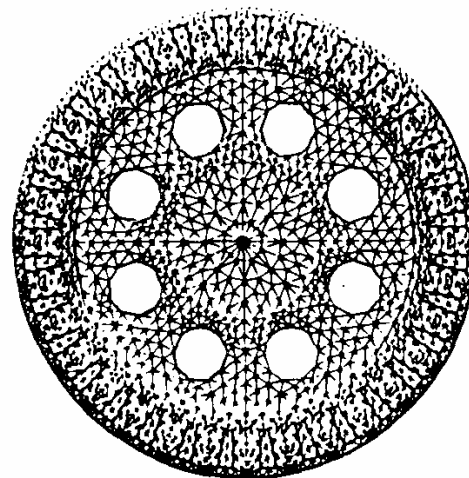


Рис. 4.18.

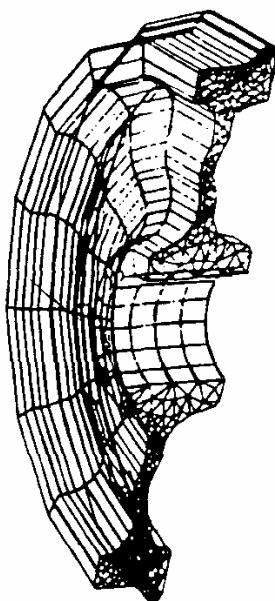


Рис. 4.19.

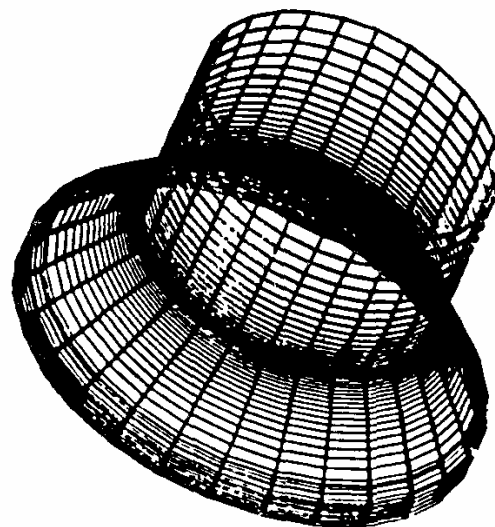


Рис. 4.20.

- 3) одновременно п.1 и п.2;
- 4) надписывать номера вершин, узлов и элементов;
- 5) надписывать ссылочные номера позиций (узлов и ребер) и подобластей;
- 6) делать разрезы;
- 7) писать легенды и т. д.

Полезным средством при оценке результатов является цвет, особенно в трехмерном пространстве.

В дополнение к примерам на рис. 4.5, 4.10 и 4.15 мы приводим несколько результатов, полученных с помощью средств построения разбиения программы Modulef (рис. 4.16—4.20).

4.6. ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ

Для решения конкретной задачи методом конечных элементов строится ее модель в виде системы уравнений в частных производных и этим уравнениям придается вариационная форма. Затем непрерывная модель дискретизируется согласно выбранному пространству конечных элементов. Поэтому первый этап решения задачи состоит в разбиении пространства на элементы и в определении интерполяции, соответствующей пространству конечных элементов.

На втором этапе задаются нагрузки, источники, характеристики материалов и другие величины, позволяющие вычислить элементарные матрицы и соответствующие им правые части. Из элементарных матриц строятся глобальные матрицы, которые затем перестраиваются, чтобы учесть граничные условия. Полученная в результате система линейных уравнений решается прямым или итерационным методом. Результаты решения обычно подвергаются дальнейшей обработке для более удобного их представления (изображение деформаций, линий уровня, напряжений и т. д.).

Примеры построения разбиений и решения прикладных задач приведены на рис. 4.21—4.26.

Заключение

Подход «сверху вниз» при анализе задачи методом разбиения на составные части позволяет решать сложные проблемы простым модульным способом, а подготовка данных «снизу вверх» обеспечивает гибкость их использования. Реализация этих подходов средствами вычислительной техники приводит к созданию связного пакета модулей, который предназначен для решения задач и может быть расширен включением новых методов по мере их появления.

Современные САПР решают геометрические задачи (определение фигур, их размещение, взаимодействия, смещения, проекции и т. д.) и поэтому дают возможность изучать кинематические задачи без связи с динамикой и облегчают разбиение задачи на части.

Каждое физическое явление имеет свои особенности, и тем не менее САПР предоставляет все средства, необходимые для моделирования физи-

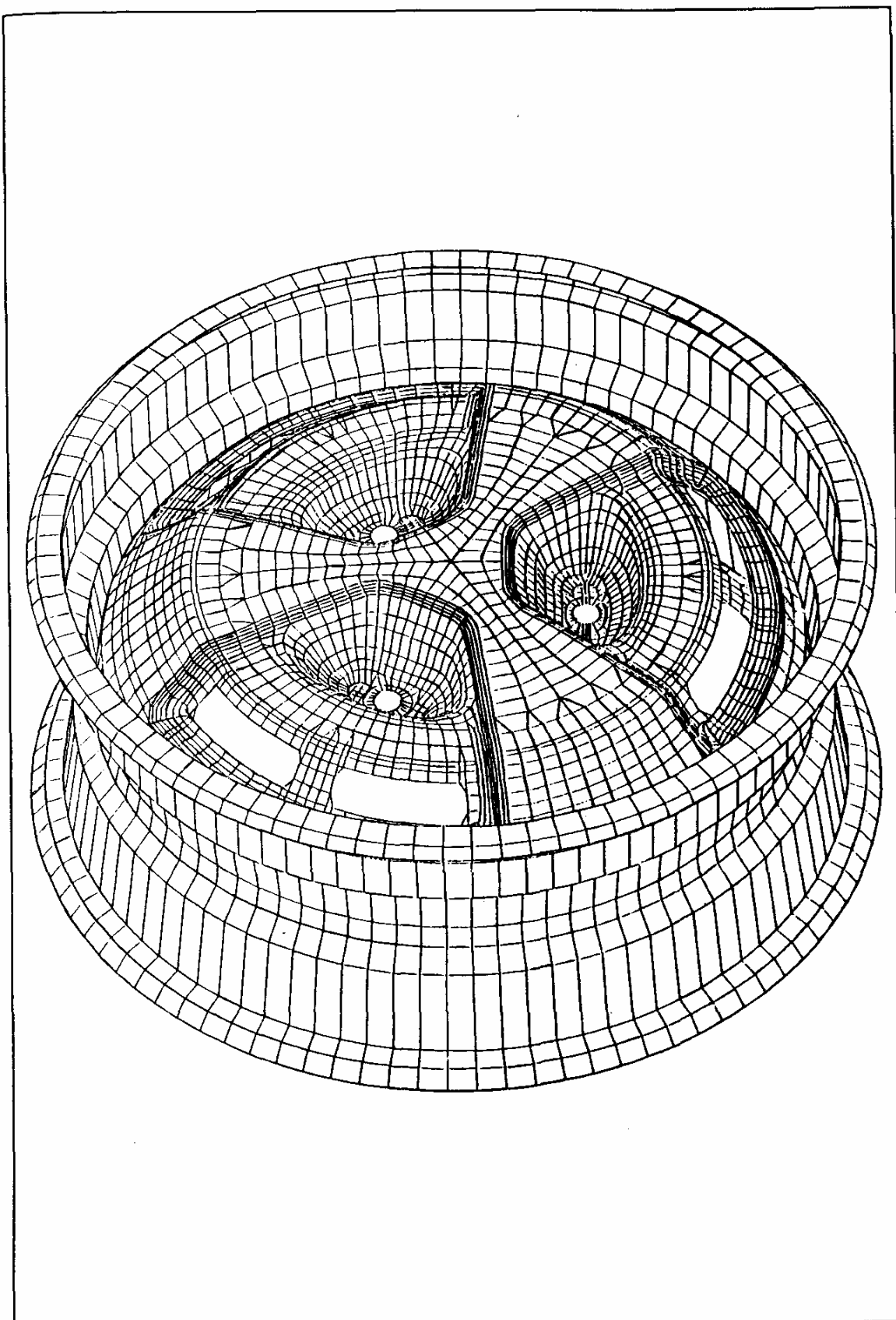


Рис. 4.21. Разбиение колеса.

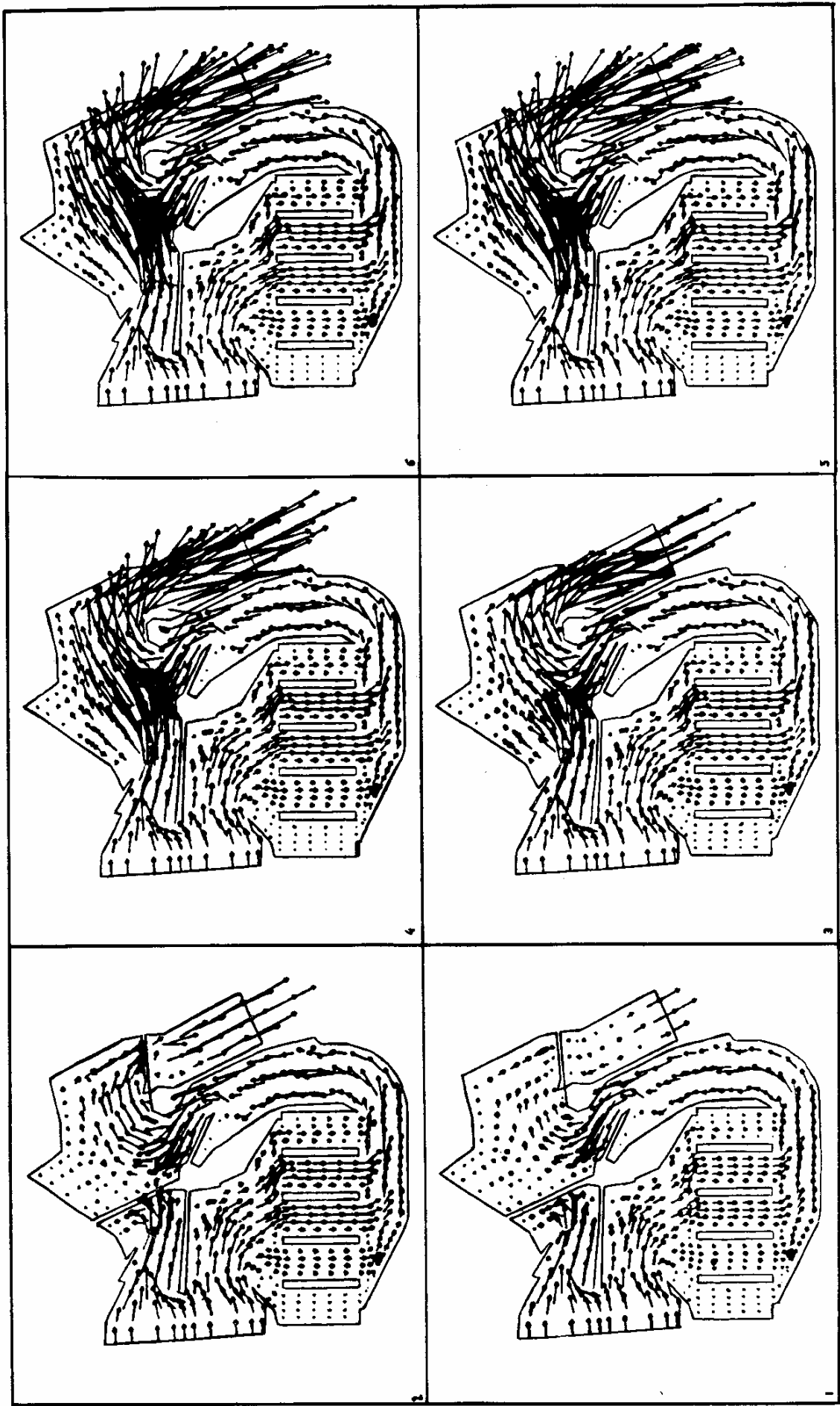


Рис. 4.22. Имитация работы нагревателя воздуха методом конечных элементов.

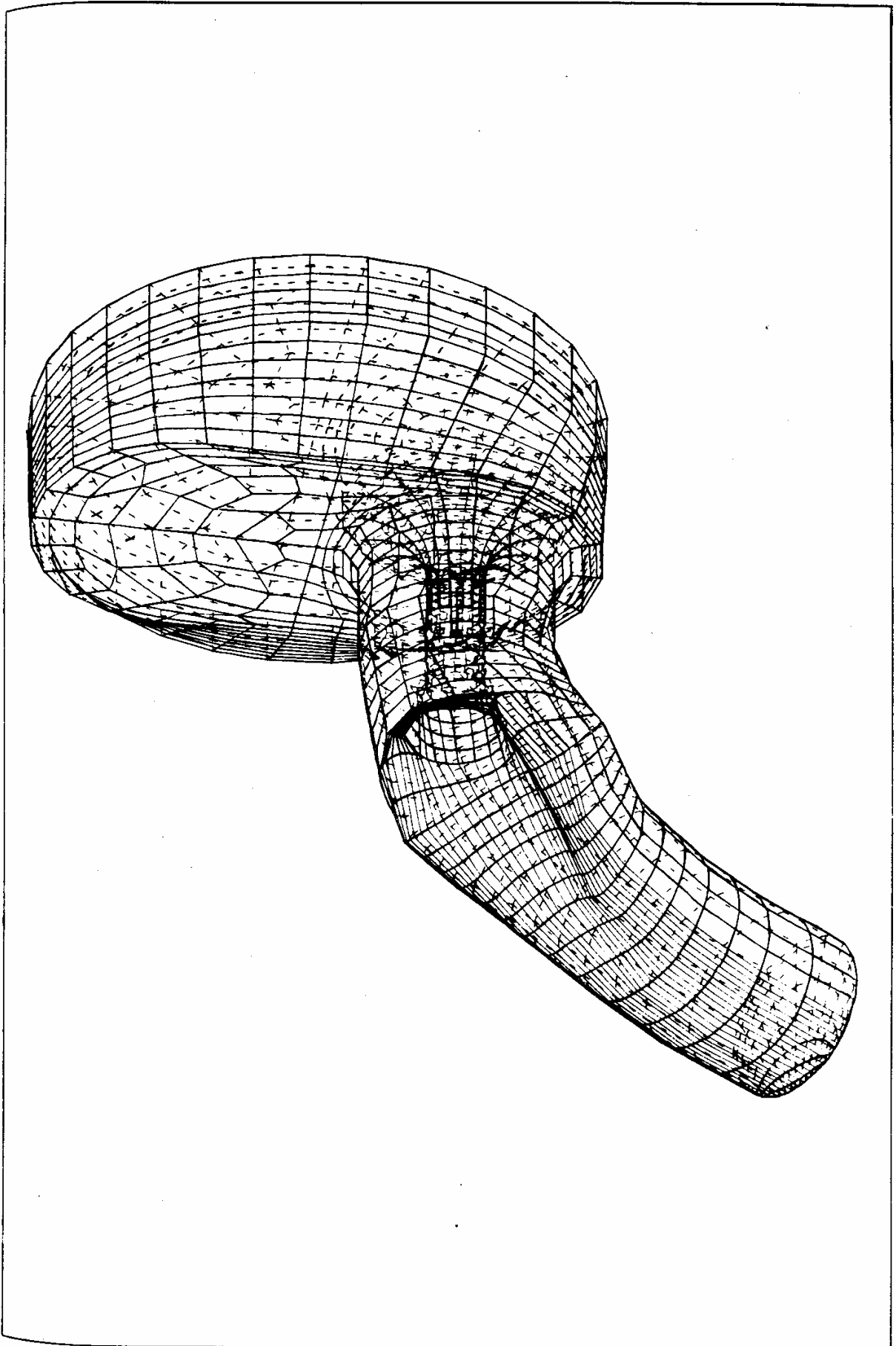


Рис. 4.23. Разбиение области вокруг впускного клапана для расчета потока газа методом конечных элементов.

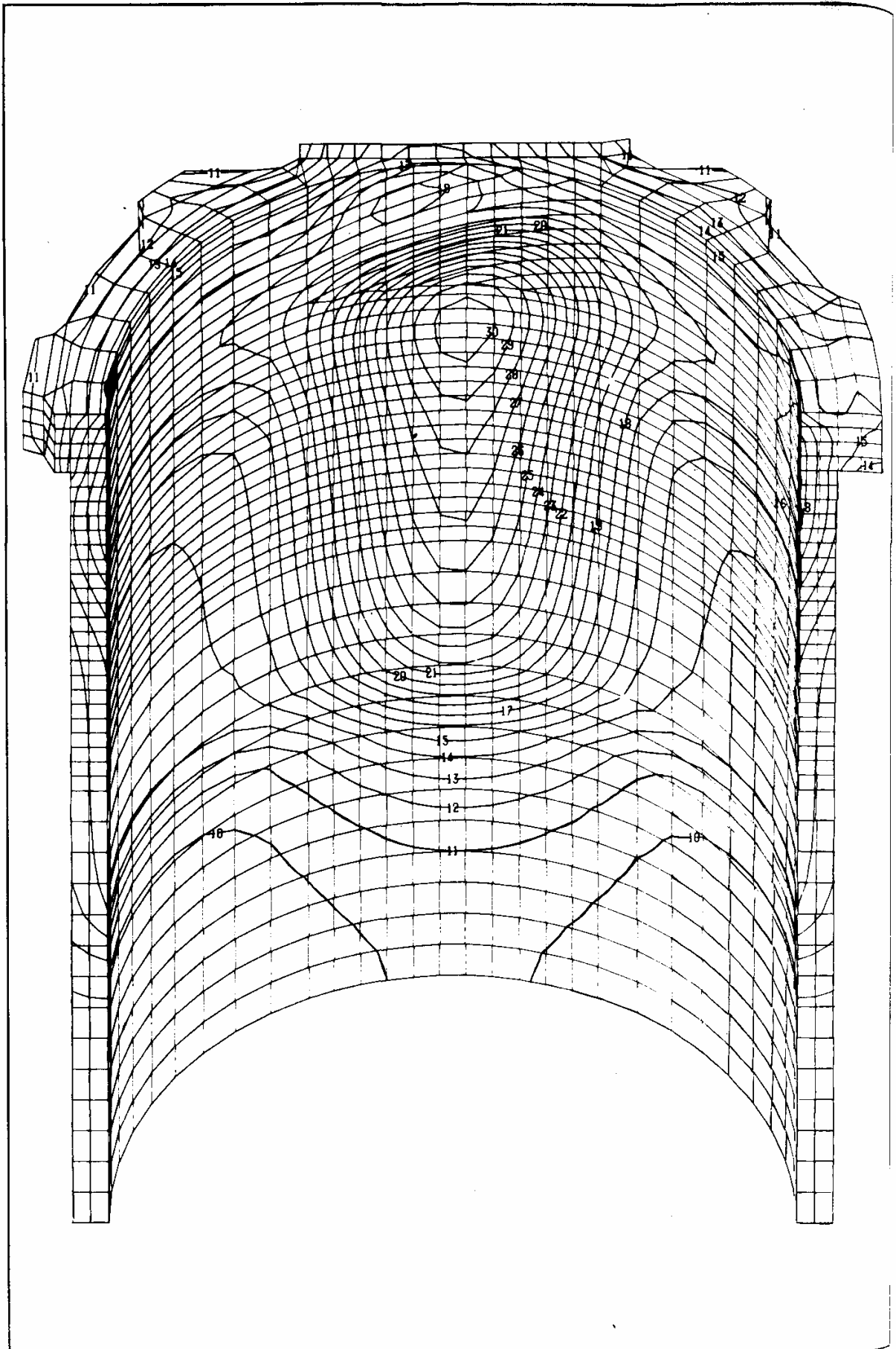


Рис. 4.24. Расчет методом конечных элементов и трассировка карты температур в блоке цилиндров двигателя.

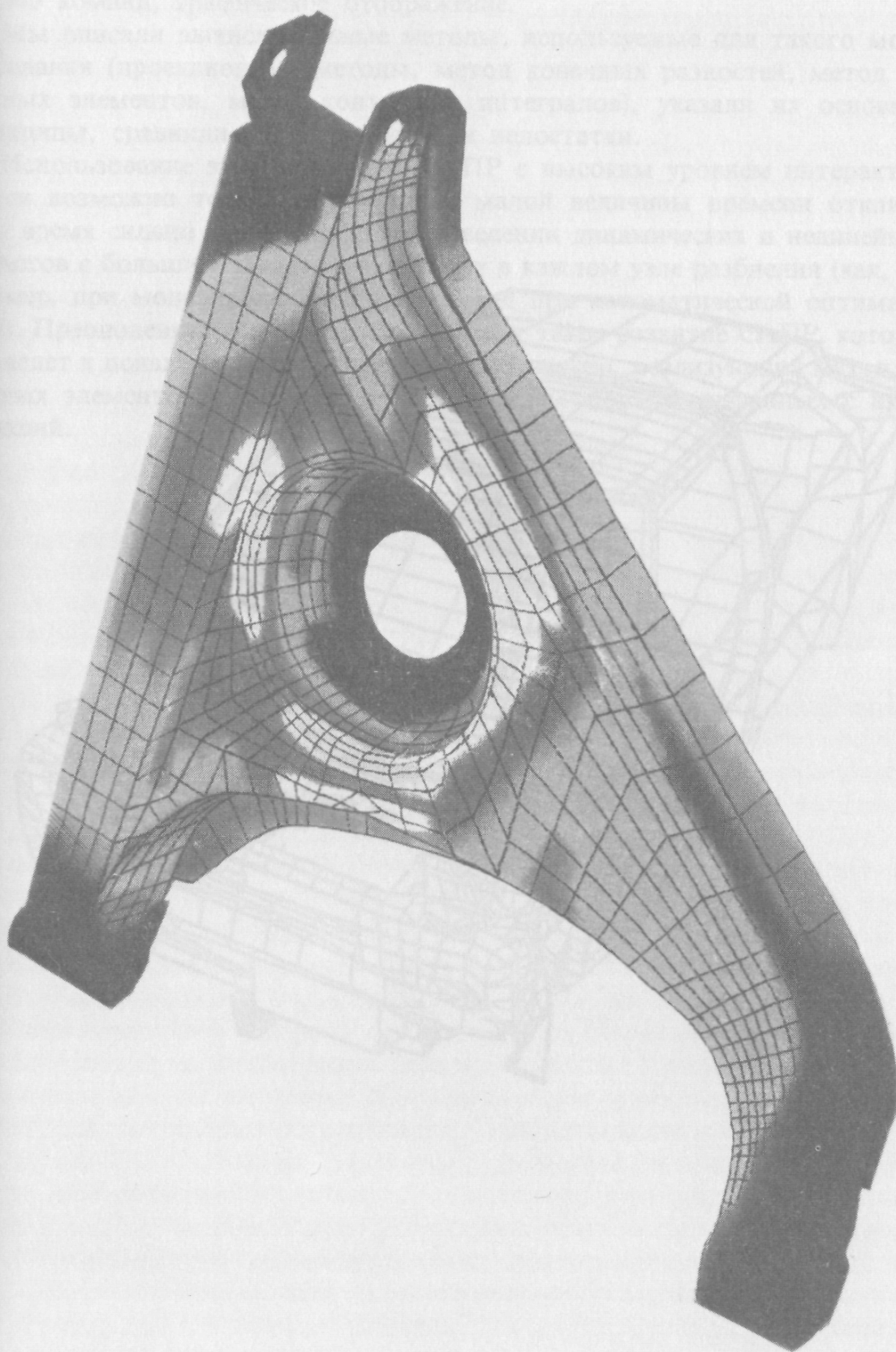


Рис. 4.25. Расчет методом конечных элементов и трассировка напряжений.

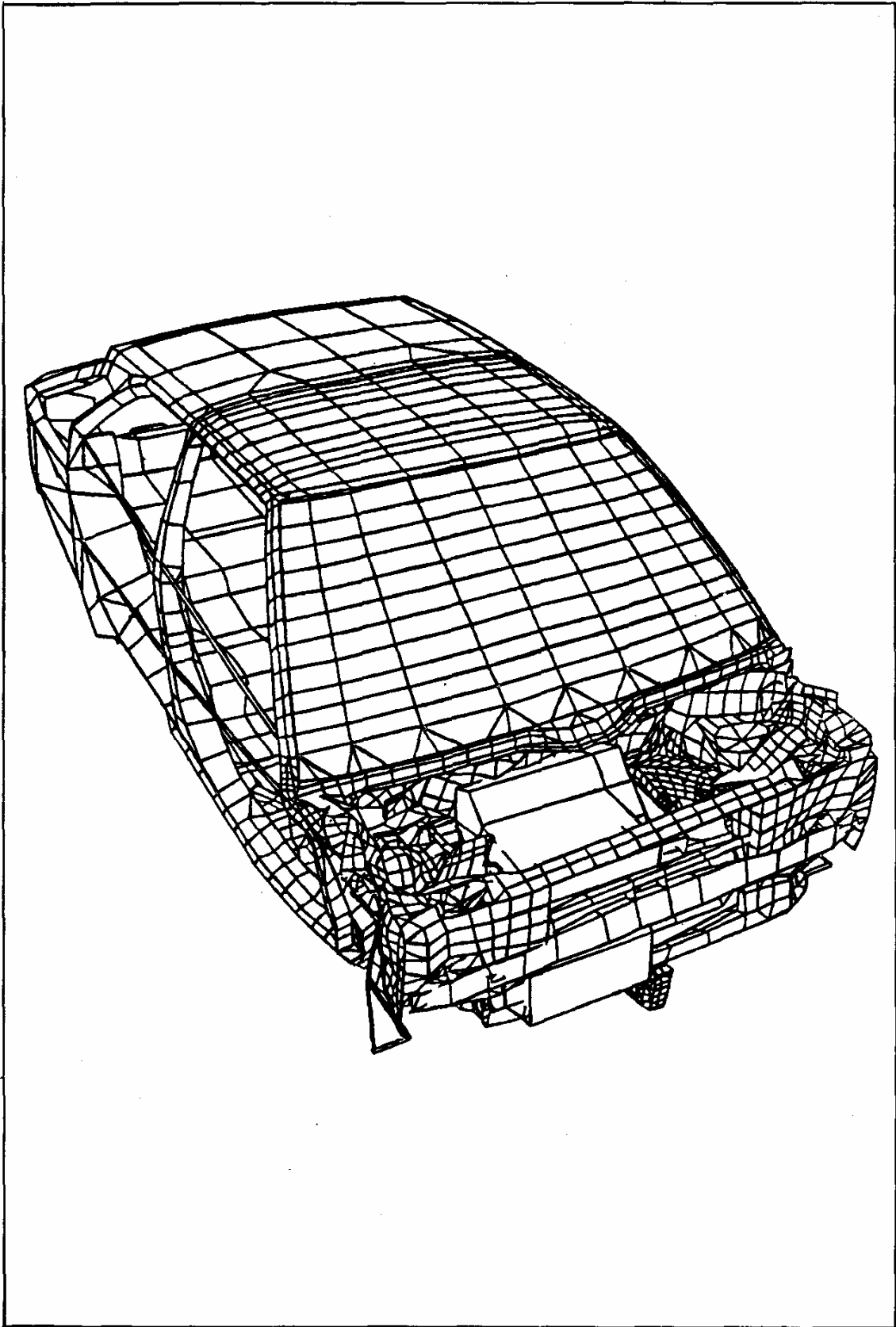


Рис. 4.26. Имитация методом конечных элементов лобового столкновения автомобиля.

ческих явлений в интерактивном режиме — услуги базы данных, интерпретацию команд, графическое отображение.

Мы описали вычислительные методы, используемые для такого моделирования (проекционные методы, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод контурных интегралов), указали их основные принципы, сравнили их достоинства и недостатки.

Использование этих методов в САПР с высоким уровнем интерактивности возможно только при условии малой величины времени отклика. Это время сильно возрастает при проведении динамических и нелинейных расчетов с большим числом неизвестных в каждом узле разбиения (как, например, при моделировании сгорания или при автоматической оптимизации). Преодолению этого разрыва поможет такое развитие САПР, которое приведет к появлению специализированных систем, реализующих метод конечных элементов с численным определением форм и связанных с ними функций.

Часть 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

П. Безье

Предисловие

Памяти моего деда, инженера-механика, моего отца, инженера-механика, и моей сестры, инженера-химика, доктора наук.

П.Б.

Эта книга предназначена тем кто хочет углубить свои познания в теории САПР, но главным образом тем, кто уже использует САПР в своей работе и у кого рано или поздно возникает необходимость внести дополнения в математическое обеспечение, которым они располагают.

Задачи САПР. Разделы математики, используемые в САПР, представляют собой главным образом векторное [67] и тензорное исчисления; очевидно, что всегда применяется информатика, без помощи которой было бы невозможно вести разработки, требующие часто громадного количества вычислений как для определения формы объекта, так и для расчетов процессов, описываемых законами механики непрерывных сред или динамики жидкостей.

САПР во французском языке обозначается CAO (Conception Assistées par Ordinateur). В настоящее время распространено также обозначение CFAO (Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur) — проектирование и производство с помощью ЭВМ, т. е. в первоначальное понятие было включено и производство. Действительно, было бы ошибочно рассматривать проектирование как чисто интеллектуальную операцию, так как оно всегда требует двумерного или очень часто трехмерного представления полученных результатов, необходимого для проведения экспериментов или просто для того, чтобы служить основой эстетического восприятия.

С недавнего времени к этому сокращению стали присоединять другие буквы, обозначающие, например, управление, осуществляемое на различных стадиях производства продукции. Список присоединяемых букв можно продолжить, ибо автоматизированные системы в любом сочетании создают определенные преимущества при минимальных затратах.

Роль ЭВМ. Для выполнения чертежных работ требуется, чтобы ЭВМ имели специальные средства для вычисления координат точек, расположенных на траекториях, а также для осуществления таких геометрических операций, как переносы, повороты, изменения масштаба, построение различных видов проекций и сечений. При обработке материалов необходимо в реальном времени учитывать геометрические характеристики применяемо-

го инструмента. Для предварительных расчетов координат точек поверхности, на которых осуществляется линейная интерполяция, и для вычисления направляющих косинусов нормали и их последующего использования требуется хранить в памяти ЭВМ большое количество чисел. Важной задачей является определение перемещения инструмента в реальном времени с учетом размеров обрабатываемого образца. Отсюда ясно, почему часто используется вычисление координат в реальном времени, применяемое в непосредственном числовом управлении исполнительными устройствами от чертежных устройств до фрезерных станков.

Параметрические формы. Рассмотрим эволюцию основных математических методов, применяемых в САПР. Начиная с 1960 г., когда стало быстро нарастать число публикаций по САПР, в большинстве работ использовалось декартово представление, казавшееся наиболее приемлемым для реальных приложений. Однако затем получили признание методы, использующие параметрическое представление, во-первых, они обладают большой гибкостью, а, во-вторых, выполнение поворотов естественным образом приводит декартово представление к параметрическому.

Разнообразие задач и решений. Системам автоматизированного проектирования посвящено громадное число работ — подробный список литературы содержит бы тысячи названий. Число предлагаемых систем также весьма велико. Чтобы представить себе их полный объем, можно рассмотреть типы решаемых задач, имеющих существенные различия.

В первую очередь следует представить объекты, которые по традиции описываются с помощью прямых и окружностей. Разработаны квазиобобщенные методы подобного описания, однако некоторые приемы сопряжения имеют недостаточно строгое обоснование.

Затем следует остановиться на методах определения формы объектов, основанных на многократной последовательной подгонке. Условия эксплуатации подобных объектов требуют строгих и однозначных методов решения таких задач; в качестве примера можно привести расчеты корпусов судов и скоростных транспортных средств: самолетов, поездов, автомобилей [5, 7, 17, 18].

Предметом обработки могут служить также объекты, основным назначением которых является удовлетворение эстетических требований, сформулированных либо самим разработчиком, либо теми, кто имеет к этому отношение. В подобных случаях могут быть использованы ранее полученные решения с небольшими уточнениями, но разработчик может также выразить свои требования с помощью машинных инструкций в цифровой форме. В работе [79] показана возможность выражения эстетических свойств математическими средствами через изменение кривизны. Эта попытка тем более похвальна, что заранее ясна ее безнадежность: нельзя надеяться, что она позволит установить критерий, который во всех случаях заменит человеческое суждение.

Наконец, существуют поверхности, от которых требуется, чтобы они содержали определенное число фиксированных точек и были непрерывны, что приводит к неопределенности формулировки задачи и внесению эле-

ментов субъективности в ее решение. Для таких случаев можно провести аналогию с задачами топографии, когда требуется провести изолинии, проходящие через точки, координаты которых были предварительно определены на поверхности.

Очевидно, что условия четырех предыдущих задач весьма различны, поэтому не стоит удивляться разнообразию предлагаемых решений. Тем более, что использование возможностей информатики может только увеличить число вариантов.

Области применения. Можно без преувеличения сказать, что появление САПР привело к радикальному изменению основ промышленного производства, которое на протяжении многих веков развивалось скорее путем совершенствования средств, чем основных принципов. Плотники наносили свои чертежи на землю строительных площадок, каретники — на стены своих мастерских, греческие каменотесы — на стены храмов и памятников в процессе их возведения.

На смену чувствительной к влаге бумаге пришли материалы из пластмассы и лакированного железа; карандаш был заменен золотым граверным резцом, а лекала из грушевого дерева — гибкими рейками из материалов, полученных в результате достижений органической химии; для изготовления моделей теперь вместо ценных пород дерева применяются пластмассы, так как свойства деревянных моделей не были вполне удовлетворительными, несмотря на специально предпринимаемые меры; разработаны совершенные оптические устройства для точного воспроизведения контуров на алюминиевых листах; но при этом остаются неизменными подходы описательной геометрии, разработанные в начале 19-го века.

Разработчики принципиально новых технических средств отдают себе отчет в том, что они создают гораздо более дорогостоящую аппаратуру, чем раньше (при использовании традиционных методов). Угломер, линейка, циркуль, лекало, рейсмус, ножницы, зубило, стамеска, шабер, напильник, штангенциркуль, транспортир, отвес должны уступить место системам автоматического регулирования, программно-управляемой аппаратуре и лежащим в их основе ЭВМ.

Не вызывает сомнения, что почасовая стоимость работы автоматизированного оборудования окажется весьма высока, и невозможно заранее предсказать, что пропорционально ей уменьшится время разработки новых изделий, неразрывно связанное с трудностями организации производства. При разработке новых моделей автомобилей, кораблей или самолетов, кроме всего прочего, приходится рассчитывать на добрую или недобрую волю операторов, а также других работников всех рангов, которых еще требуется убедить посвятить себя служению машине, разрушающей старые привычные представления. Очевидно также, что для организации промышленного производства необходимо тщательно взвесить и финансовые возможности. Часто трудно удержать равновесие между смелостью и хладнокровием.

Терминология. Технический язык, в особенности если он относится к таким современным областям как электроника и информатика, часто использует слова англосаксонского происхождения.

Общая характеристика книги. Выше уже говорилось о том, что к настоящему времени опубликовано очень большое число работ, посвященных математическим свойствам кривых и поверхностей. Многие из них представляют собой шаг вперед в изучении свойств параметрических пространств, но все они пока еще не нашли применения в индустриальном мире, хотя и весьма вероятно, что это случится рано или поздно. По этому поводу иногда шутят, что существуют проблемы, для которых еще не найдено решение, но каждое решение рано или поздно находит свою задачу. При изложении материала книги мы ограничились наиболее типичными и часто используемыми решениями. Основные идеи решения проблем и полученные результаты представляются более важными, чем изложение полных математических выкладок, которые уже приведены в литературе. Список литературы, который трудно было бы сделать полным, содержит ссылки на основные работы, а также на материалы некоторых международных конференций.

Список литературы. Список литературы содержит менее двухсот имен авторов, но к нему легко можно было бы добавить еще несколько сотен. Среди цитируемых прежде всего следует упомянуть тех, кого следует считать предвестниками. Это Шёнберг (Schoenberg) [131, 132], который возродил интерес к параметрическим пространствам, Дж. Фергюсон (Ferguson) [60], который опубликовал начиная с 1964 г. работы по определению бикубического разбиения, Кунс (Coons) [48], с именем которого связано, несомненно, наиболее универсальное из известных решений, и П. Кастельжо (Casteljaou) [37], фундаментальные работы которого в течение долгого времени использовались только в пределах одного предприятия.

Хотелось бы отметить всех тех, кто внес заметный вклад в исследование свойств параметрического представления. Среди многих других упомянем R. Barnhill, B. Barsky, E. Cohen, de Boor, W. Gordon, R. J. McDermott, R. Riesenfeld из Соединенных Штатов Америки; Bernard, D. Bonhomme, J. M. Brun, Chillou, J. Fririon, P. Germain-Lacour, Hamon, H. Lagrange, A. Massalo, M. Neuve-Église, P. Pardo, C. Riaux, G. Ris, P. Sablonnière, Théron, D. Vernet, M. Véron из Франции; A. A. Ball, M. J. Cox, R. A. Forrest, J. A. Gregory, C. Lang, M. Sabin из Великобритании; J. Hatvany, Horvath, T. Varady из Венгрии; Galeotti, Martinelli, Nicolo из Италии; Hosaka и Higashi из Японии; E. Mehlum из Норвегии; W. Böhm, G. Farin, Piegl и Spur из Федеративной Республики Германии; Chang G. Z. и Wu J. H. из Китайской Народной Республики; J. J. Daulte, Engeli и E. Matthias из Швейцарии.

Пьер Безье

Глава 1

Введение

1.1. ЗАДАЧИ САПР

Для недостаточно компетентного человека САПР представляется прежде всего средством получения чертежей, так как именно этот результат наиболее заметен для непосвященного. На самом деле не меньшую роль, чем черчение, играют и другие проблемы, в частности, вычисление ограничений на размеры¹⁾, деформаций и частоты вибраций, а также все, что касается производства изделий: определение совокупности операций обработки и траекторий движения инструментов.

1.2. ГЕОМЕТРИЯ, СТАТИКА И ДИНАМИКА

Объект можно считать определенным только тогда, когда его форма зафиксирована в законченной чертеже с указанными размерами и допусками. Куда бы ни выводилось изображение — на бумагу, экран или голограмму, оно содержит только небольшую часть огромного объема исходной информации.

Естественно, первым шагом проектирования является более или менее подробный чертеж, но вскоре возникают проблемы, обусловленные механикой сплошных сред. Полный расчет ограничений или деформаций позволяет уточнить, по крайней мере предварительно, некоторые из основных размеров проектируемого объекта и, таким образом, уточнить исходный чертеж.

Шаг за шагом на основе проведенных расчетов вносятся поправки в чертежи, достигается углубленное понимание явлений, имеющих отношение к решаемой проблеме. Метод конечных элементов [68] позволяет уточнить величину и распределение ограничений и главным образом вероятность локальных концентраций напряжений, плохо поддающуюся определению другими средствами.

К этим же задачам относятся, естественно, и расчеты деформаций и частот вибрации, важность которых постоянно возрастает, так как условия передачи вибрации в течение долгого времени определялись с большой долей субъективности. Так, необходимо устанавливать поглощающие покрытия, а не пытаться разделить собственные частоты вибраций перегородок и частоту звука, издаваемого механизмами.

¹⁾ Подразумевается ограничения на размеры, связанные с допустимыми деформациями и напряжениями. — *Прим. ред.*

Если в проект входят гидравлические элементы, то на предварительном этапе их можно описывать в двумерном пространстве и представлять на экране или графопостроителе. Для выполнения расчетов может потребоваться проведение экспериментов. В таких случаях необходимо использовать макеты, которые можно подвергать соответствующим воздействиям.

Для решения эстетических задач часто требуется изготовить трехмерный макет, на основе которого можно вынести то или иное суждение. Для выполнения макета на предварительном этапе можно выбрать мягкий и недорогой материал типа полистиролового или полиуретанового пенопласта, но на конечной стадии необходимо использовать более твердые и долговечные материалы, такие как гипс или пластмасса, которые можно шлифовать и лакировать для придания сходства с реальными объектами.

Таким образом, оборудование, необходимое для функционирования САПР, должно включать средства получения изображений на электронно-лучевых экранах и графопостроителях, размеры которых могут меняться от небольших рулонных машин до гигантских столов; размеры последних могут превышать десятки метров [39, 78, 91, 103, 107].

В это оборудование часто входит один или несколько станков для выполнения фрезерных работ, а также для сверления, расточки и нарезания резьбы. Их технические характеристики могут меняться в очень широких пределах. В одних случаях размеры обрабатываемых деталей редко превышают 200 мм, в других — в масштабе 1:1 может обрабатываться макет большого автомобиля. Используемые материалы — самые разнообразные — от полистиролового пенопласта до титана. Для деталей, испытываемых в сверхзвуковых аэродинамических трубах, используется прессованная древесина, гипс, пластмасса, специальные сплавы цинка, дюралюминий, сталь.

Требования к мощности и скорости резания в значительной степени зависят от поставленной задачи, но не следует забывать, что быстрота изготовления макета является основным преимуществом САПР. Разработаны станки, имеющие исключительно большую производительность; некоторые из них при весе более 30 т имеют скорость обработки, превышающую 200 мм/с; для этого требуется особенно точное и эффективное выполнение числовых команд.

Уточним, что на полной длине автомобиля вполне допустимы отклонения в несколько миллиметров, однако для отдельных деталей допустимыми являются отклонения в несколько десятых долей миллиметра. Для аэродинамической трубы обычно допустимы отклонения в десятую долю миллиметра, а для элементов оптики — до десятков микрон.

1.3. ПРОИЗВОДСТВО: ПОДГОТОВКА И ОРГАНИЗАЦИЯ

На этапе проектирования какой-либо системы в первую очередь принимаются в расчет характеристики, которыми она должна обладать, в частности ее производительность [36, 107, 118, 129, 138, 146]. Но нельзя прене-

бегать и теми проблемами, которые возникают на этапе производства, к ним относятся:ковка, формовка, литье, пайка, обработка, сборка, контроль, испытания и обслуживание. Отсюда следует необходимость проведения всех работ специалистами-производственниками, начиная от разработки методов и подготовительных работ до самого производства.

Для изготовления кузнечных штампов, получения отливок, проектирования узлов с механическими или сварными соединениями деталей нужно заранее выбрать позицию детали в литейной форме, определить профиль соединяемых поверхностей, учесть возникающие деформации, усадку за счет отвердевания и охлаждения, предусмотреть необходимые припуски для последующего устранения поверхностных дефектов, связанных с включением окислов и песка, наличием раковин, пузырьков и других нарушений структуры.

Необходимо также определить (с помощью модельщиков и специалистов литейного и кузнечного производства) контрольные точки, по отношению к которым будет производиться оптимальный расчет детали для дальнейшей обработки на станках. Затем необходимо установить последовательность изготовления детали операция за операцией, включая точное вычисление траектории движения каждого инструмента в процессе обработки.

Основным назначением САПР является как можно более тщательная и полная подготовка производства, ведущаяся в конструкторских бюро с помощью ценных архивных материалов и информатики. При этом до минимума сокращается время изготовления изделия, сводится к минимально возможному пределу вероятность возникновения непредвиденных ситуаций. И это легко объяснить, так как стоимость производства является на много более высокой, чем стоимость средств, используемых для его подготовки.

И наконец, нельзя упускать из вида, что контроль является неотъемлемой частью производства и часто требует больших затрат, но за счет хорошей подготовки и организации автоматизированного производства его стоимость может быть снижена.

Глава 2

Кривые и поверхности

2.1. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ. ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Первые работы, посвященные обработке кривых и поверхностей сложной формы, были выполнены, по-видимому, после 1942 г. совместно фирмами IBM и Bendix-Aviation и касались формы лопаток газовых турбин.

Затем к 1955 г. по программам АРТ была осуществлена двумерная обработка профилей, состоящих исключительно из отрезков прямых и дуг окружностей.

Это еще не была система автоматизированного проектирования, так как речь шла только о том, чтобы реализовать вполне традиционными методами с помощью числовых команд известные зависимости.

2.1.1. «Аналитические» зависимости

За исключением исследований, проводившихся в авиационной промышленности США, большая часть работ, относившихся к САПР, имела целью обеспечить разработчиков и инженеров средствами черчения известных механических объектов исключительно традиционными методами — с помощью линейки и циркуля [113]. Еще не стоял вопрос о решительном отказе от методов, имеющих тысячелетние традиции и берущих свое начало от архитекторов Вавилона, землемеров Александрии и каменотесов средних веков.

Таким образом, основными геометрическими телами были параллелепипеды, пирамиды, цилиндры и конусы вращения, сферы и торы, которые часто называются «аналитическими», однако вряд ли можно надеяться, что использование этого прилагательного получит одобрение у математиков.

Проблема состояла в объединении этих тел с помощью сложения или вычитания и в привлечении информатики для выполнения операций описательной геометрии, переносов, поворотов, сечений, наложений. В гл. 3 рассмотрены проблемы, которые возникают при определении сшивающих поверхностей и для решения которых недостаточно только линейки и циркуля. В самом простом случае такими поверхностями являются огибающие сферы постоянного радиуса, которые обеспечивают плавное изменение касательной при переходе от одной сшиваемой поверхности к другой. В более сложном случае радиус сферы может изменяться в определенных пределах, причем закон изменения радиуса отражает только искусство автора применяемого метода.

2.1.2. Экспериментальные зависимости

В большинстве случаев с помощью тел, называемых аналитическими, нельзя описать реальные механические объекты. На протяжении долгого времени выход из этого положения состоял в представлении объекта с помощью произвольно проведенных линий, взаимное сопряжение которых осуществлялось специалистами очень высокой квалификации: модельщиками, литейщиками, изготовителями штампов.

Для классификации подобных зависимостей трудно было подобрать подходящие определения. Использовались такие выражения, как поверхности двойной кривизны, поверхности переменной кривизны, искривленные

поверхности. В англоязычной литературе использовались такие термины, как *space-curves*, *sculptured surfaces*, *twisted surfaces*, *free-form surfaces*.

На самом деле единственным общим свойством всех этих зависимостей является полное отсутствие какого бы то ни было предварительного математического определения, даже частичного, в результате чего решение задачи начиналось с выполнения последовательных шагов аппроксимации и заканчивалось вручную, каждый шаг подгонки основывался на результатах экспериментов или просто на указаниях дизайнера. Из-за недостатка информации такие зависимости иногда назывались «экспериментальными».

Несмотря на отмеченное выше общее свойство, назначение зависимостей могло быть совершенно различным: одни имели отношение к объектам из области техники, другие выполняли эстетические функции, третьи служили в основном для описания пространственных свойств объектов.

Зависимости, используемые в технике. О техническом изделии судят прежде всего по коэффициенту полезного действия, но, очевидно, нельзя пренебрегать и его себестоимостью. Коэффициент полезного действия может иметь самые разные выражения. Для балки, например, это соотношение допустимой нагрузки и массы использованного для ее изготовления бетона, для колеса турбины или реактора, винта корабля — отношение затраченной и полезной энергии, для транспортных средств — самолета, ракеты, автомобиля, поезда, корабля — коэффициент трения.

Проблема состоит в математически точном воспроизведении формы изделия, исходя из координат многочисленных точек, расположенных на его поверхности, измеренных более или менее совершенными инструментами, начиная от рейсмуса и складного метра до самых совершенных приборов, например лазерных или фотограмметрических. Измерение наклонов касательных тоже может быть использовано для этой цели, однако оно не дает точности, сравнимой с измерением линейных координат.

Часто с помощью метода математического сглаживания удается выявить аномалии в значениях координат последовательных точек. Причинами их могут быть локальные выбросы, а также несовершенство изготовления макета. В этом случае небольшая коррекция результатов измерений, в результате которой достигается более совершенная математическая непрерывность, равносильна проведению более точных измерений на предыдущем этапе. Если попытаться выразить в цифрах требования к относительной точности, то можно назвать число 10^{-4} , или одну десятую миллиметра на метр, что на практике не всегда легко обеспечить. Для деталей, подвергающихся механическим напряжениям, эта величина может быть существенно увеличена, тем более, что вычисления деформаций методами механики сплошных сред не обеспечивают такой высокой точности.

Зависимости, определяемые эстетическими требованиями. Форма изделия, задуманная дизайнером, должна удовлетворять трем главным условиям, расположенным в порядке убывания важности, а именно:

1. Нравиться дизайнеру.
2. Нравиться генеральному директору и административному совету.
3. Нравиться потребителю.

Желательно, также, чтобы при этом производственные затраты не приводили к существенному увеличению себестоимости продукции. Требуемая точность изготовления должна быть порядка 10^{-3} , что соответствует 4 мм на полной длине легкового автомобиля или 0,5 мм на ширину сиденья. Эта точность вполне достижима, однако с точки зрения производства для обеспечения сборки деталей без дополнительных затруднений может возникнуть необходимость приведенную выше цифру разделить на четыре.

Зависимости, называемые «топографическими». Это определение было предложено для обозначения зависимостей, часто встречающихся в промышленном производстве. Для того чтобы применить законы планиметрии к географической карте, необходимо получить координаты точек, расположенных на естественных линиях: линиях одинакового уровня, тальвегах, уровнях подъема воды и т. д. Затем их необходимо объединить наиболее точным образом, хотя после этого нельзя утверждать, что положение линий не может измениться, например, за счет процессов эрозии. Также и определенные механические детали, в частности выполненные из листового металла, должны, с одной стороны, состыковываться с соседними деталями, а с другой — не иметь точек соприкосновения или перекрытия с другими, подвижными или неподвижными элементами. В последнем случае нужно учитывать свободный ход подвижных элементов.

2.2. СХЕМЫ ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ

В разд. 2.1 мы рассмотрели основные проблемы, которые возникают перед разработчиком САПР. К настоящему времени предложено множество путей их решения, что вполне естественно и свидетельствует об актуальности исследований. Наиболее типичные общепринятые решения приведены в разд. 3.1—3.3 и гл. 4 достаточно подробно, здесь же мы дадим только краткое описание идей.

2.2.1. Булевы комбинации

Сначала были разработаны системы, в которых основную роль играли геометрические тела, определенные выше как аналитические. Комбинируя затем эти простые базовые тела с помощью операций гомотетии, сложения и вычитания, находят пересекающиеся объемы, удаляют излишки материала в тех местах, где должны располагаться отверстия, пазы для шпонок, пустоты, облегчающие конструкцию. С помощью ЭВМ определяются и запоминаются линии пересечений, а затем и пределы движения инструментов при станочной обработке. При определении радиусов кривизны в зоне сшивки поверхностей приходится решать специальные проблемы, которые рассмотрены в разд. 3.1.

2.2.2. Переход от классической к современной форме представления данных. Интерполяция

Когда хотят выразить в цифровой форме полученные ранее классические, т. е. принципиально не предназначенные для ЭВМ, данные, то, естественно, начинают с измерения координат точек, расположенных на поверхности, удаление которых друг от друга зависит от сложности воспроизводимого объекта. Следующий этап после преобразования данных в цифровую форму заключается в разработке алгоритма, т. е. автоматической процедуры нахождения единственного решения на основе имеющихся данных.

Решение отыскивается путем последовательного выполнения определенных элементов обработки. Сначала с помощью дуг кривых попарно соединяются соседние точки, затем находятся элементы поверхностей, соединяющие эти кривые, сохраняющие в местах сшивки непрерывность более или менее высокого порядка: непрерывность угла наклона касательной, кривизны, а иногда и градиента кривизны. На практике это достижимо только в идеальном случае. Алгоритм дает удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда обрабатываемые кривые являются достаточно гладкими, иначе решение может быть полностью ошибочным.

Теперь остается только определить дополнительные условия либо в форме дополнительных точек, через которые должны проходить найденные зависимости, либо в форме заданных касательных к уже известным точкам, либо в более редких случаях в форме заданных радиусов кривизны. Дополнительные условия могут определяться также и самим разработчиком.

Видно, что даже для случая интерполяции, когда отыскивается поверхность, проходящая через заданные точки, процедура далека от того, чтобы быть действительно алгоритмической. Начальные условия обработки сегмента поверхности могут зависеть от результатов обработки предыдущего сегмента; таким образом, малейшие искажения, внесенные в начале обработки, могут накапливаться и приводить к нежелательным последствиям. В некоторых системах [71, 72, 120] этот недостаток устранен; в них обрабатываются кривые, разделенные на множество отрезков, без сохранения на их границах непрерывности тех или иных свойств (например, кривизны).

Алгоритмический метод может быть распространен и на поверхности. Наиболее известным примером является метод Кунса [48, 49], но при этом, для того чтобы получить хороший результат, необходимо, вообще говоря, использовать неопределенную подгонку.

2.2.3. Прямой подход. Аппроксимация

Методы характеристических многоугольников и сеток¹⁾ часто называют аппроксимирующими, несмотря на то что в этих методах кривая или по-

¹⁾ Точное значение этих терминов поясняется в разд. 4.1.1 и 4.2.1.

верхность проходит точно через заранее заданные точки. Основное отличие этого метода от интерполяции заключается в том, что он дает необходимую свободу для применения векторных производных и определения кривизны линий и поверхностей.

Таким образом, для моделирования кривых и поверхностей не нужно увеличивать число опорных точек, что упрощает последующие вычисления и хранение данных. Очевидно, что промежуточные вершины характеристических многоугольников и сеток не располагаются на моделируемых кривых и поверхностях, как и для интерполяционных систем, использующих векторные производные более или менее высокого порядка. Оптимальным был бы такой метод обработки, который сочетал бы интерполяцию предварительно определенной зависимости на редко расположенных точках с аппроксимацией для последующего уточнения результатов.

2.2.4. Алгоритм

Желательно иметь в распоряжении такую систему, которая при минимальном вмешательстве оператора позволяла бы изготавливать чертежи проектируемого изделия в двух- и трехмерном представлении. Пока такая возможность может быть реализована только для чрезвычайно простых объектов с применением методов интерполяции или прецизионной экстраполяции.

2.3. УСЛОВИЯ, УЧИТЫВАЕМЫЕ ПРИ ПОИСКЕ РЕШЕНИЯ

В предыдущих разделах показаны основные цели создания первых САПР. Отметим их большое разнообразие и как следствие большое число и разнообразие предложенных решений. Тем не менее попробуем сформулировать некоторые общие понятия [8, 9, 12, 13].

2.3.1. Разнообразие зависимостей

Для создания изображения многих механических деталей все еще используются только отрезки прямых и дуги окружностей и существуют системы, возможности которых этим и ограничиваются. С другой стороны, можно добиться значительного упрощения описания кривых, поверхностей и пространств, если использовать их параметрическое представление. В настоящее время появляется все больше такого математического обеспечения, которое, за исключением очень частных случаев, не делает различия в обработке кривых и поверхностей, заданных как в «аналитическом» виде, так и в параметрическом.

2.3.2. Пространственные кривые

По традиции чертежи выполняются с помощью плоских кривых и причины этого очевидны:

1. При восстановлении размеров объекта по имеющемуся макету удобно блокировать одну из степеней свободы измерительного устройства, определяя, таким образом, координаты точек, расположенных в одной плоскости.

Это, разумеется, много проще, чем измерение размеров объекта от руки с помощью щупа вдоль определенной характерной линии, четкость локализации которой не всегда удовлетворительна. Кроме того, на точность измерений влияют положение источника освещения и даже угол зрения оператора.

2. Чертеж представляет собой одну проекцию, по которой можно сразу восстановить размеры объекта.

3. Пространственная кривая является пересечением двух цилиндров и имеет директрисы своих плоских проекций.

4. Пространственную кривую всегда можно разбить на большое число очень коротких отрезков дуг окружностей (или парабол) [64], таких что различие между ними будет несущественно.

Однако такой подход обладает и недостатками:

1. Независимо от того, каким целям служат получаемые зависимости (техническим или эстетическим), исходным материалом для них служит воображение разработчика: оно формирует некий остов, состоящий из главных линий, которые редко бывают плоскими. Например, в одном случае это могут быть линии, описывающие динамические явления в жидкости, в другом — линии, описывающие общий вид разрабатываемого дизайнером объекта.

2. Перевод в цифровую форму зависимостей, построенных классическим образом, является дорогостоящей операцией, которая не всегда точно отражает намерения разработчика. Это в конечном итоге приводит к дополнительным дискуссиям, поправкам, задержкам и издержкам. Вероятно, будет возрастать число таких систем автоматизированного проектирования, с помощью которых разработчик сможет точно выражать свои желания и намерения с помощью аппаратных, а главным образом программных средств.

3. Выполнение таких операций, как последовательные повороты, изменения масштаба или линейные преобразования с пространственной кривой, заданной с помощью своих проекций, является трудоемкой операцией и часто приводит к задержкам в выполнении работы.

В заключение отметим, что именно программное обеспечение должно выполнять геометрическую обработку объектов, построенных на основе прямых и окружностей и представленных в параметрическом виде.

2.3.3. Доступность

Еще в течение долгого времени использование САПР будет требовать взаимодействия многочисленных специалистов различных направлений. При этом необходимо, чтобы САПР в целом и получение геометрических зависимостей в особенности были непосредственно доступны представите-

лям всех специальностей. Для большинства из них нет необходимости в глубоком понимании свойств параметрических пространств и тем более в их доказательстве. Напротив, необходимо чтобы у них было интуитивное восприятие явлений, связанных с операциями над векторами, а не над коэффициентами, чтобы их профессиональные знания больше были связаны с геометрией, чем с анализом [6]. Несомненно, на широкое применение некоторых систем оказывает отрицательное влияние тот факт, что, несмотря на совершенство применяемых математических методов, у пользователей возникают трудности с их освоением.

2.3.4. Быстрота реакции

Когда САПР только начинали создаваться, основными областями применения ЭВМ являлись управление и вычисления. Таким образом, необходима была тщательная подготовка для решения поставленных задач, проведение вычислений только тогда, когда становятся доступными соответствующие данные. Работы в этой области последовательно развивались, для представления результатов использовались такие формы, как чертежи, диаграммы или числовые таблицы [84, 92, 93].

Затем появилась возможность получать более точные результаты, однако она длительное время оставалась мало привлекательной для специалистов, которые накопили уже значительный опыт без машинного изготовления чертежей и выполнения операций описательной геометрии. Задержка была тем более долгой, что в то время существовала тенденция к территориальной и административной концентрации средств информатики, предлагалось даже обращаться к мощным вычислительным центрам, расположенным за границей. Все это приводило к тому, что средством передачи данных служили перфоленты и магнитные ленты, так как передача цифровых данных по проводным линиям связи не обеспечивала требуемой надежности.

САПР получили развитие только потому, что пользователи располагали автономными средствами информатики, позволяющими за несколько минут получать чертежи и за несколько часов — трехмерные макеты [39]. Для достижения этой цели необходимо было значительно поднять производительность чертежных устройств и станков, и к настоящему времени получены впечатляющие результаты. Однако нельзя полагать, что все возможное в этой области уже сделано, ибо прогресс остановить нельзя. Достаточно напомнить, что чертеж, на выполнение которого еще недавно требовалось две недели, теперь подготавливается за 15 мин и это кажется еще слишком долго!

Хороший метод не требует кропотливой предварительной работы. Напротив, быстрота реакции вычислительной системы дает возможность выполнить несколько попыток и сразу же внести необходимые поправки. Для специалиста по-прежнему остается незаменимым двух- или трехмерный чертеж, дополненный необходимыми цифрами, причем не всегда легко отразить в числах достижения в области графических средств.

2.3.5. Стоимость САПР

Любые оценки производственной деятельности основаны на экономических критериях. Нетрудно подсчитать стоимость использования САПР: затраты на аппаратное и программное обеспечение, издержки производства, заработная плата, на основе которых любой бухгалтер может определить стоимость километра проведенных линий или тонны стружки.

Однако преимущества автоматизированных систем гораздо труднее поддаются экономическим оценкам. Как оценить стоимость сокращения сроков поставки на рынок новой продукции или способность в максимальной степени учитывать тенденции меняющегося и неустойчивого рынка? Другие преимущества, более очевидные, но плохо поддающиеся такой оценке, связаны с увеличением точности, что в некоторых случаях существенно сокращает сроки новых разработок.

Те, кто желает приобрести систему автоматизированного проектирования, должны обеспечить адекватность поставленной цели и используемых средств, а также учитывать основные тенденции в развитии техники и быстро меняющейся конъюнктуры мирового рынка.

Глава 3

Системы

В разд. 2.1 и 2.2 говорилось о большом разнообразии зависимостей, подлежащих определению (их больше, чем может представиться в начале работы). Что же касается используемых методов, то их можно разбить на три категории:

1. Конструирование с помощью сочетания простых твердых тел, называемое объемным моделированием.
2. Интерполяция на предварительно определенных линиях и точках.
3. Прямое проектирование с помощью последовательных приближений с использованием ЭВМ в диалоговом режиме.

3.1. ОБЪЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В разд. 2.1.1 говорилось о том, что для определения формы почти всех механических объектов используется метод объемного сочетания простых тел, образованных с помощью отрезков прямых и дуг окружностей. Если этот метод непригоден, для определения формы объекта сначала находится ряд последовательных (обычно плоских) сечений, для построения которых используют шаблоны, обычные и гибкие лекала, а затем выполняется интерполяция на найденных сечениях, которая требует привлечения специалистов-модельщиков, литейщиков или слесарей-сборщиков высокой квалифи-

кации. Необходимость точного соблюдения посадочных размеров накладывает также определенные требования на способ обработки заготовок и на сглаживание острых кромок с помощью фасок или фигурных закруглений.

Программное обеспечение объемного моделирования перекладывает на ЭВМ выполнявшуюся ранее специалистами задачу — определение формы детали с помощью сочетания или совмещения элементарных тел [28, 29, 47, 80, 83, 100, 101, 108, 110].

3.1.1. «Аналитические» зависимости

К этой категории относятся тела, используемые в объемном моделировании: прямоугольные параллелепипеды, цилиндры и конусы вращения, сферы и торы. Если строго придерживаться определений, то к этому списку следовало бы добавить прямые и наклонные призмы, гиперболические параболоиды, пирамиды, гиперболоиды вращения и коноиды, но большая часть из них практически никогда не использовалась. Отметим также, что из-за необходимости учета таких элементов проектирования, как литейные и кузнечные формы, специалисты часто используют еще одно тело, называемое «кучей песка», однако при этом всегда известно, по какую сторону поверхности раздела находится твердое тело. Использование поверхностей типа листа Мебиуса не допускается!

3.1.2. Булевы комбинации

Если придерживаться правил булевой алгебры, можно осуществлять комбинирование тел с помощью таких операций, как пересечение, объединение, исключение, дополнение и т. д. Реально используют главным образом объединение (или сложение) и исключение (или вычитание), много реже используется пересечение и практически никогда — дополнение [3].

Из рис. 3.1 без дополнительных объяснений ясен смысл операций сло-

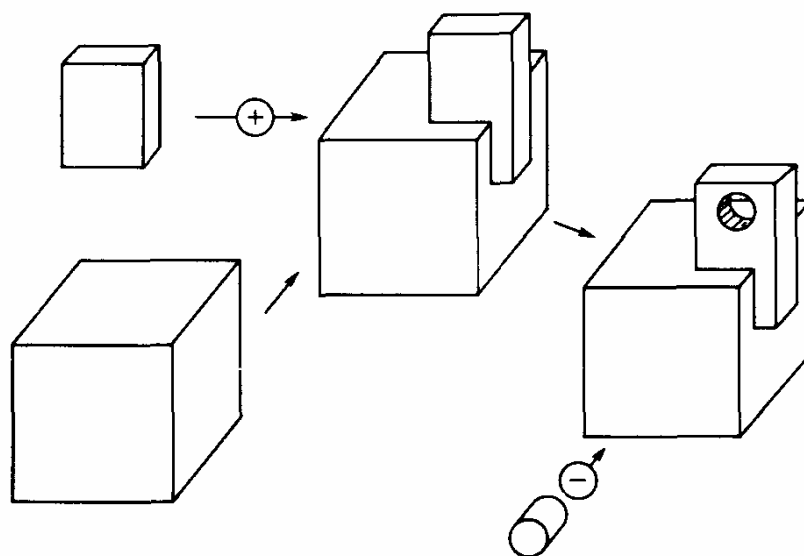


Рис. 3.1. Выполнение булевых операций с аналитическими телами.

жения и вычитания. Комбинируя эти элементарные операции, можно без труда представить выемки, выступы, фаски, скругления и т. д.

3.1.3. Ограничительные линии

Практическая реализация вычитания какого-либо тела соответствует удалению материала в процессе обработки детали (рис. 3.2). В этом случае линия пересечения двух поверхностей представляет собой прямой результат работы режущего инструмента и ее предварительного определения не требуется. При выполнении сложения (рис. 3.3) необходимо знать точную длину последовательно выполняемых проходов режущего инструмента по образующим пересекающихся поверхностей. Расчет ограничительных линий не представляет трудностей, так как элементарные тела имеют простые формы.

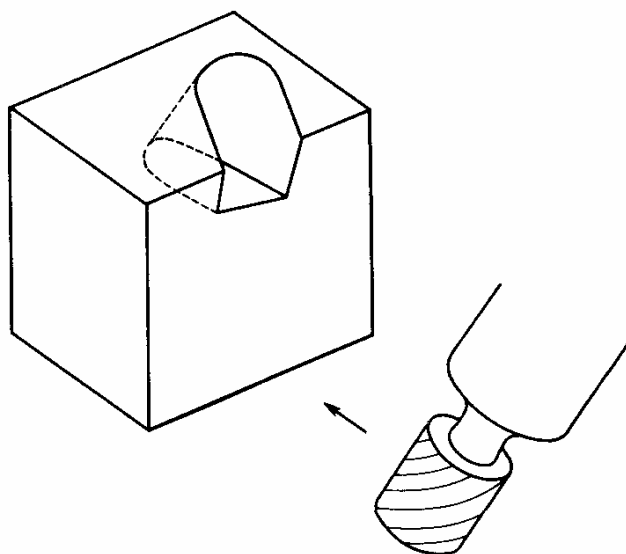


Рис. 3.2. Естественное выполнение булевого вычитания с помощью режущего инструмента.

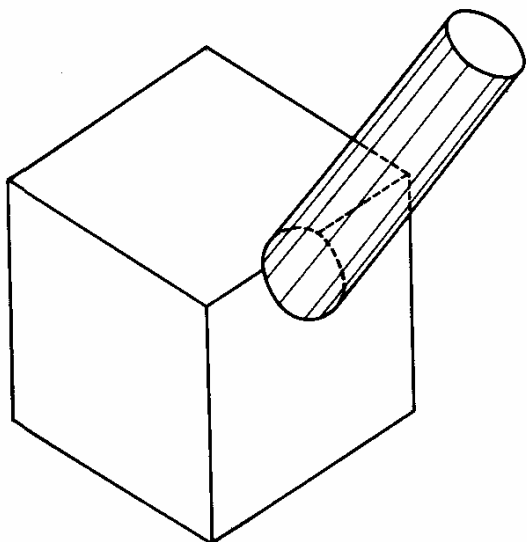


Рис. 3.3. Пересечение аналитических тел.

Чаще всего координаты точек, расположенных на ограничительной линии, загружаются в память ЭВМ. Точки располагаются достаточно близко друг к другу, для того чтобы с помощью линейной интерполяции можно было вычислить конечную точку любой образующей.

3.1.4. Поверхности сшивки

Наиболее простой способ определения поверхности сшивки заключается в использовании сферы (рис. 3.4), которая перемещается, оставаясь касательной к двум сшиваемым поверхностям F_1 и F_2 . Очевидно, что траектория движения центра сферы является линией пересечения L двух поверхностей F'_1 и F'_2 , параллельных сшиваемым поверхностям и отстоящим от них на величину радиуса сшивки.

Вспомогательная сшивающая поверхность должна быть полностью определена, так как ее нельзя обработать сразу на всю длину инструментом типа фрезы со сферическим концом, кроме того, необходимо знать предельную точку каждой образующей сопрягаемых поверхностей, а также потому, что при обработке сопряженной детали поверхность сшивки является выпуклой и не может быть обработана инструментом с вогнутым профилем. Характеристическая линия охватывающей поверхности представляет собой дугу окружности с центром в точке P на кривой L и расположена между двумя перпендикулярами, опущенными из точки P на F_1 и F_2 .

Отсюда следует, что в памяти ЭВМ должна храниться информация относительно достаточно большого числа точек, для того чтобы можно было выполнить простую линейную интерполяцию. Информация должна содержать декартовы координаты точек, а также направляющие косинусы нормалей к поверхности, которые необходимы для учета собственного радиуса режущего инструмента и возможного припуска на обработку.

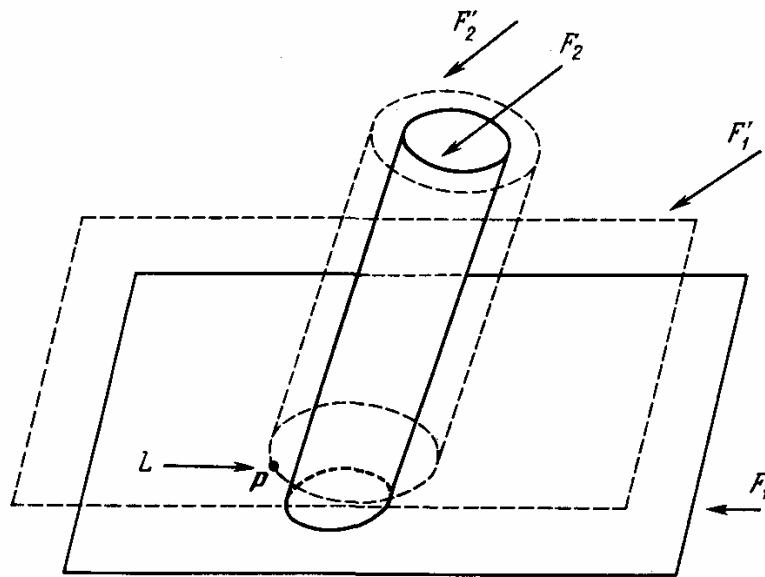


Рис. 3.4. Положение центра сшивающей сферы.

Если задается такой метод сшивки, при котором радиус сшивающей поверхности является переменным и изменяется в определенных пределах, то обычно не требуется точное определение закона его изменения. Расчеты при этом усложняются, но принцип нахождения поверхности сшивки остается без изменения.

3.1.5. Использование параметрических методов описания поверхностей

Не всегда можно определить форму объектов, используя только комбинации «аналитических» тел. В последнее время все чаще и чаще возникает необходимость в построении систем, в которых наряду с объемным моделированием используется также и параметрический способ описания поверхностей. Подобные системы используются пока редко, но есть все основания полагать, что рано или поздно они завоевывают всеобщее признание.

3.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В разд 2.2 показано, насколько искусственным является различие, которое часто проводят между интерполяцией и аппроксимацией. Однако в дальнейшем это различие будет сохранено для того, чтобы не нарушать общепринятую терминологию при обсуждении применяемых методов [25, 30, 62, 63, 137, 143].

3.2.1. Сплайны

Принцип построения

В сопромате показывается, что если однородный брус закрепить в двух произвольных точках и придать его оси заданный наклон в этих точках, то форма кривой оси бруса описывается полиномом третьей степени. При этом делается очень небольшое число упрощающих предположений о трении и об энергии.

Предположим, что кубическая парабола, заданная в параметрической форме

$$P(u) = \sum_{i=0}^3 a_i u^i. \quad (3.1)$$

проходит через две точки (рис. 3.5), обозначенные соответственно $P(0)$ и $P(1)$, в которых известны значения производных $\frac{dP}{du}(0)$ и $\frac{dP}{du}(1)$. Это означает, что заданы четыре необходимых и достаточных условия для определения четырех коэффициентов в выражении (3.1).

Отметим, что измерение наклона касательной к кривой обычно не представляет больших трудностей. Кроме того, параметрическая производная

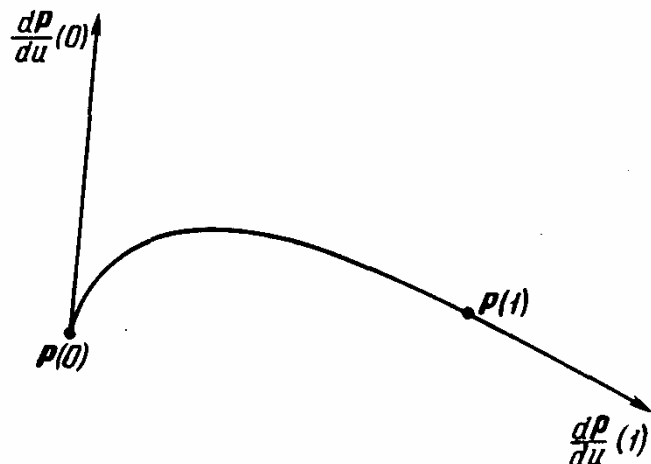


Рис. 3.5. Определение сплайна.

является вектором и для известного (хотя бы в принципе) аргумента должна обладать определенным модулем. Во всяком случае, если определены четыре условия, то вычисление коэффициентов в выражении (3.1) выполняется довольно просто:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(0) &= \mathbf{a}_0 \\
 \mathbf{P}(1) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \\
 \frac{d\mathbf{P}}{du}(0) &= \mathbf{a}_1, \\
 \frac{d\mathbf{P}}{du}(1) &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из выражений (3.2) следует

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(1) &= \mathbf{P}(0) + \frac{d\mathbf{P}}{du}(0) + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \text{ и} \\
 \frac{d\mathbf{P}}{du}(1) &= \frac{d\mathbf{P}}{du}(0) + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3.
 \end{aligned}$$

Отсюда можно вывести

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &= \mathbf{P}(0), \\
 \mathbf{a}_1 &= \frac{d\mathbf{P}}{du}(0), \\
 \mathbf{a}_2 &= 3[\mathbf{P}(1) - \mathbf{P}(0)] - 4\frac{d\mathbf{P}}{du}(0) - \frac{d\mathbf{P}}{du}(1), \\
 \mathbf{a}_3 &= 2[\mathbf{P}(0) - \mathbf{P}(1)] + \frac{d\mathbf{P}}{du}(0) + \frac{d\mathbf{P}}{du}(1).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

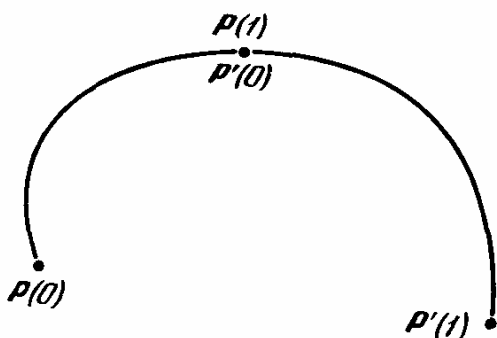


Рис. 3.6. Условия сшивки двух дуг.

Определив кубическую параболу (рис. 3.6) между точками $P(0)$ и $P(1)$, для нахождения следующей дуги кривой между точками $P'(0)$ и $P'(1)$ необходимо в точках $P'(0)$ и $P(1)$ приравнять значения самой кривой и ее первых производных и задать значение вектора $\frac{d\mathbf{P}'(1)}{du}$. Таким образом, шаг за шагом определяется последовательность дуг кубической кривой, соединяющей точки P, P', \dots, P^n и имеющей непрерывные касательные в этих точках.

Только что описанный метод не является полностью пригодным для алгоритмизации, поскольку не определены правила нахождения производных в точках, через которые проводится сплайн. Более того, если две последовательные дуги имеют сильно отличающиеся длины, то автоматическое принятие условия

$$\frac{d\mathbf{P}^n}{du}(1) = \frac{d\mathbf{P}^{n+1}}{du}(0) \quad (3.4)$$

может привести к неприемлемым отклонениям в поведении кубических кривых, для устранения которых в соотношение (3.4) следует внести поправочный коэффициент.

Можно предложить вариант, в котором в точке $P(0)$ задается вторая производная, а в качестве четвертого условия сохраняется только значение кривой в точке $P(1)$. Затем находятся $d\mathbf{P}(1)/du$ и $d^2\mathbf{P}(1)/du^2$ и им приравниваются величины, относящиеся к следующей параболе, соответственно $d\mathbf{P}'(0)/du$ и $d^2\mathbf{P}'(0)/du^2$. Таким образом, последовательные дуги являются касательными друг к другу в общих точках.

Хотя теоретически оба метода эквивалентны друг другу, тем не менее следует согласиться с тем, что управлять формой кривой проще, задавая значения первых производных на ее концах, а не значения второй производной в начальной точке.

В принципе исходные данные для определения кривой (или набор дуг кривой) определяются точками, через которые она проходит, но задача, поставленная таким образом, имеет бесконечное число решений. Отсюда следует, что необходимо сформулировать дополнительные условия для получения единственного решения. В пределе используют даже метод наименьших квадратов, слегка изменяя значения координат исходных точек.

Многочисленные работы, в которых исследовалась проблема сплайнов, были направлены на решение двух главных задач:

- Расширить множество обрабатываемых кривых.
- Увеличить число ограничений, накладываемых на последовательность дуг, для лучшего определения общей зависимости, получаемой с их помощью.

Следует отметить, что большая часть опубликованных работ касается плоских кривых. Это можно объяснить двумя причинами: во-первых, с помощью плоских кривых выполняются почти все промышленные чертежи, а, во-вторых, в распоряжении исследовательских центров и технических служб имеются графопостроители и устройства на основе электронно-лучевых трубок. Более того, информацию в виде плоских изображений гораздо проще передавать.

Расширение множества обрабатываемых кривых

Для дуги кубической кривой, заданной своими граничными точками, прежде всего необходимо определить ориентацию касательных в этих точках, а кроме того, и модуль векторной производной. Из рис. 3.7—3.10 видно, как изменение только модуля этой величины позволяет получить большое разнообразие результатов [55, 104, 122].

Еще один метод заключается в том, что сначала на прямой $P(0)P(1)$ определяется такая точка R (рис. 3.11), что

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(0) + [\mathbf{P}(1) - \mathbf{P}(0)]u,$$

а затем через точку S , для которой выполняется условие

$$S(u) = \mathbf{R}(u) + k[\mathbf{P}(u) - \mathbf{R}(u)],$$

проводится кубическая кривая или даже парабола. Обычно коэффициент k является константой, однако он может быть и функцией от u .

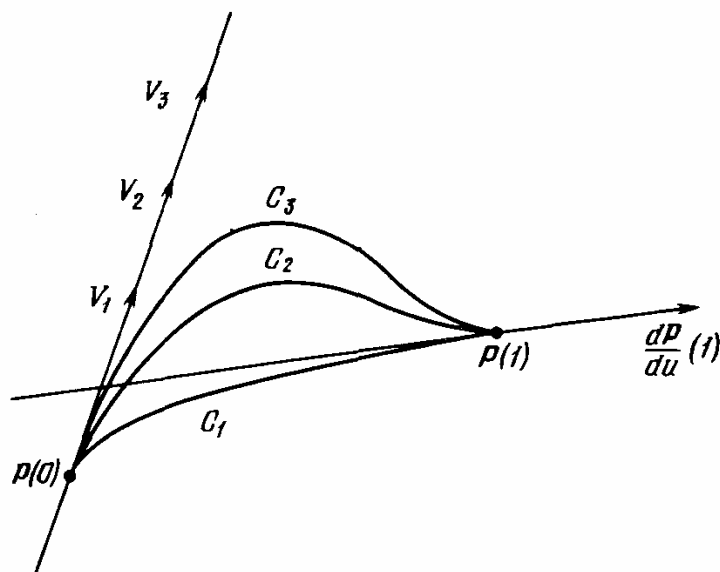


Рис. 3.7. Влияние изменения модуля производной в граничных точках.

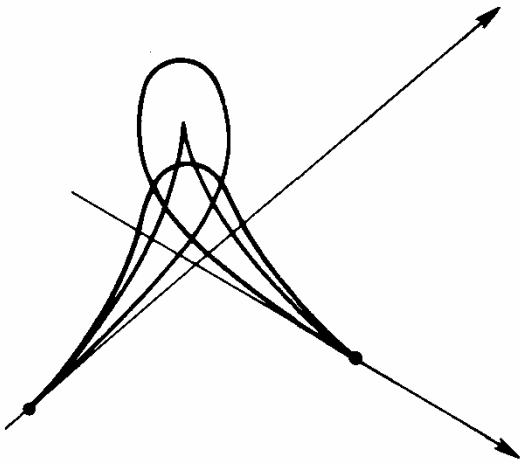


Рис. 3.8. Влияние изменения модуля производной в граничных точках.

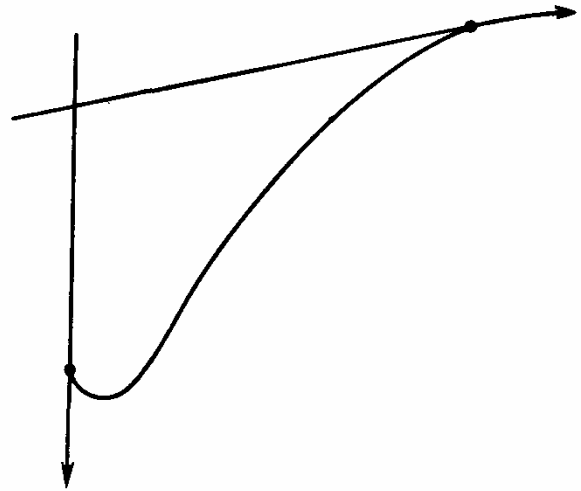


Рис. 3.9. Влияние изменения модуля производной в граничных точках.

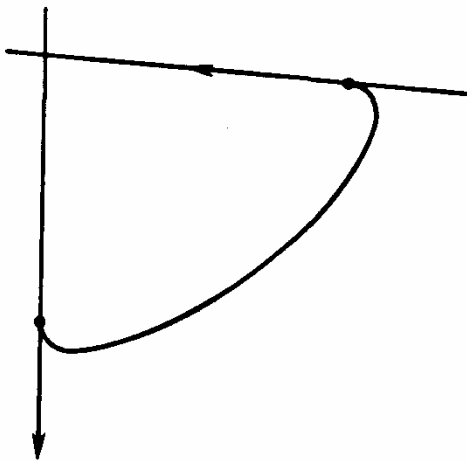


Рис. 3.10. Влияние изменения модуля производной в граничных точках.

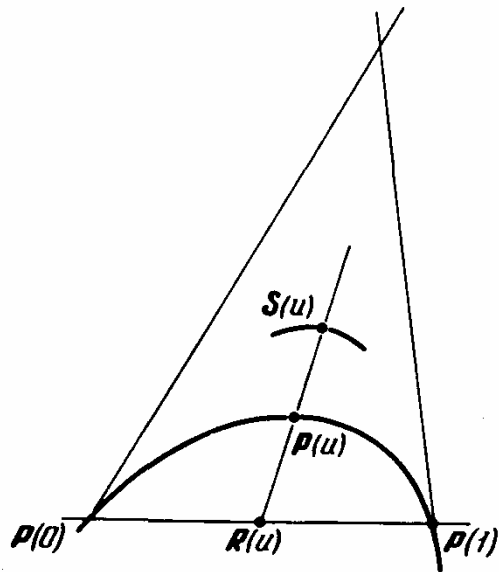


Рис. 3.11. Коррекция формы сплайна.

Увеличение числа основных условий

В предыдущем разделе показано, что для более точного определения формы кривой иногда необходимо увеличивать число задаваемых точек, через которые она должна проходить.

Однако при этом необходимо учитывать следующее:

1. Работа с исходными данными оказывается более трудоемкой.
2. При увеличении числа отрезков кривой в n раз весьма вероятно, что

в последующем число элементарных разбиений окажется увеличенным примерно в n^2 раз, что является крайне нежелательным.

3. Кривая, составленная из отдельных отрезков, в эстетическом плане может иметь худшие свойства, чем сплошная кривая.

В действительности можно строить отрезки кривой с сохранением в точках сшивки непрерывности кривизны и даже еще более высоких порядков непрерывности, но если представить кривизну, как функцию длины дуги, то вполне может случиться, что она будет обладать несколькими экстремумами. Когда достаточно глубоко исследуют особенности динамики жидкостей, начинают уделять более серьезное внимание природе производной от кривизны. Вполне естественно, например, что синусоида, обладающая совершенной непрерывностью вместе со всеми своими производными, не является наилучшим решением для формы профиля крыла! Для того чтобы лучше представить себе форму кривой, можно провести ломаную линию, которая проходит через заданные точки и дает общее представление о направлениях касательных и о желаемой форме кривой. Благодаря фантазии исследователей найдено большое число решений поставленной проблемы, но не следует никогда забывать, что, как бы искусно не был составлен алгоритм, рано или поздно найдется какой-нибудь частный случай, для которого он не сработает. Зададим, например, касательную T в точке P_n (рис. 3.12) параллельно хорде, соединяющей точки P_{n-1} и P_{n+1} , но такое решение невозможно, если кривизна искомой кривой на этом участке меняет знак (рис. 3.13). В этом случае вместо касательной T следует провести T' (рис. 3.14), выбранную произвольно, не пытаясь для этого провести усреднение по соседним последовательным хордам.

Можно предложить и другие методы решения, в которых предусматривается построение ломаной линии, например такой, что исходные точки лежат на серединах ее отрезков (рис. 3.15). Нетрудно видеть, что при этом границами кривой будут точки S_0 и S_p , а не A и B .

В качестве дуги, соединяющей две последовательные точки S_m и S_{m+1} , можно выбрать отрезок параболы (рис. 3.16), что приведет к значительному упрощению расчетов [65], однако при этом возникнут трудности с обработкой пространственных кривых, связанных со скачками величины кручения в точках сшивки.

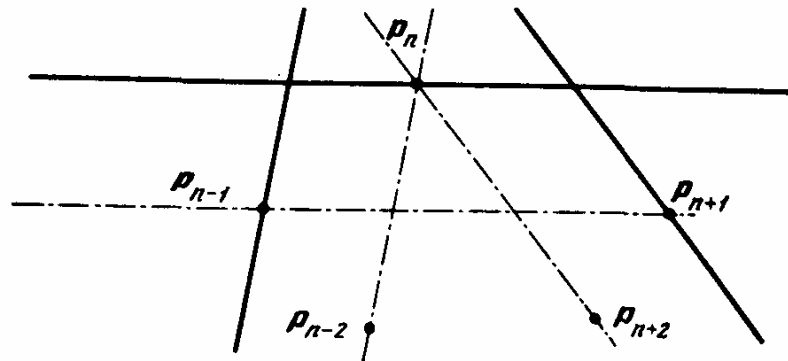


Рис. 3.12. Алгоритмическое определение направления касательной.

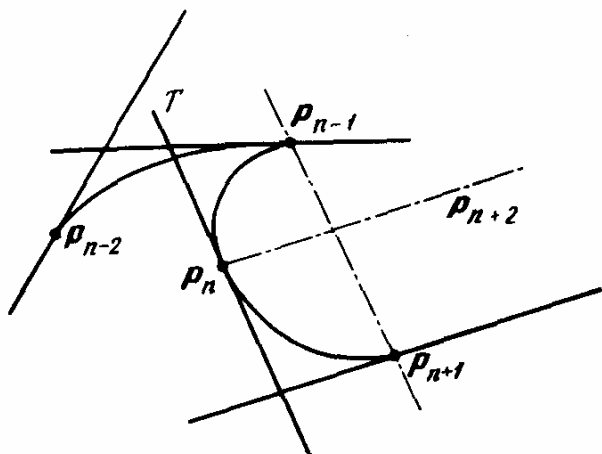


Рис. 3.13. Пример, иллюстрирующий неудачную работу алгоритма.

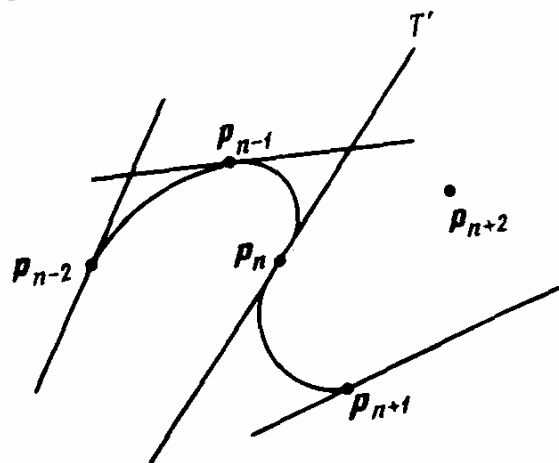


Рис. 3.14. Произвольное определение направления касательной.

Для использования отрезков других кривых в качестве соединяющих дуг на отрезках $S_m T$ и $S_{m+1} T$ можно расположить вершины характеристических многоугольников (рис. 3.17). При этом кубическая кривая получится, если, например, задать следующие соотношения:

$$k = \frac{S_m R_m}{S_m T} = \frac{S_{m+1} R_{m+1}}{S_{m+1} T}.$$

Существуют многочисленные варианты этих методов, но нужно всегда иметь в виду, что разработанные алгоритмы иногда непригодны и в тех или иных частных случаях необходимо вмешательство квалифицированного оператора.

3.2.2. Поверхности

Для обработки поверхностей существуют различные методы. В последнее время вместо методов, связанных с разложением в двойной ряд Фурье

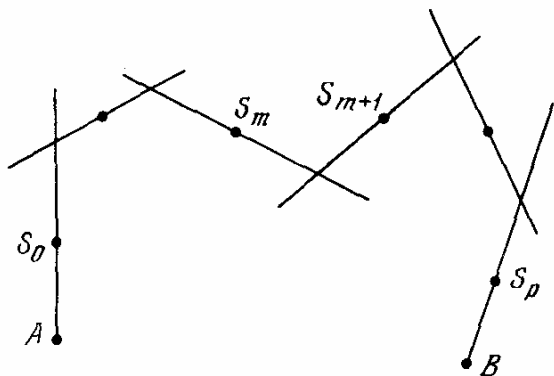


Рис. 3.15. Аппроксимация ломаной линией.

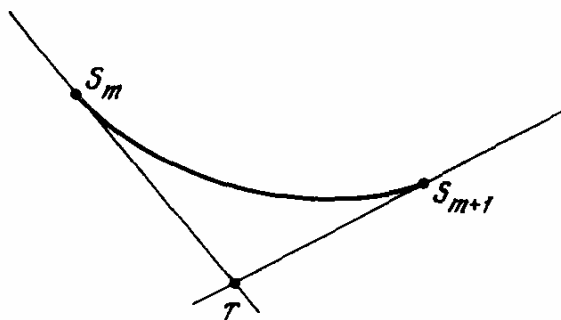


Рис. 3.16. Соединение соседних точек с помощью параболы.

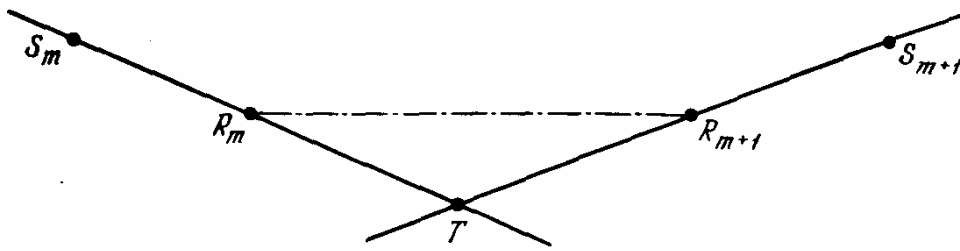


Рис. 3.17. Построение для соединения точек кубической кривой.

и вычислениями в трехмерных декартовых координатах, применяется полиномиальное параметрическое представление с векторными коэффициентами [31, 38, 50, 56, 57, 73—75, 82, 89, 90, 109, 111, 112, 114, 123, 125—127, 130, 133, 135, 139, 140].

Метод Ж. Файяра

В 1961 г. в журнале *La Machine Moderne* Жорж Файяр опубликовал статью «Механическое производство на основе математических уравнений» [59, 103], в которых приведено выражение для описания поверхности

$$\begin{aligned}
 P(\theta, \varphi) = & \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (a_{ij} \sin i\theta + b_{ij} \cos i\theta) \sin j\varphi + \\
 & + (c_{ij} \cdot \sin i\theta + d_{ij} \cdot \cos i\theta) \cdot \cos j\varphi, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi],
 \end{aligned}$$

где i и j обычно не превышают 8.

Автор приводит следующие доводы в пользу применения разложения в ряд Фурье: во-первых, эти методы разрабатывались в первую очередь для обработки элементов турбин, форма которых определяется представлением Жуковского, а во-вторых, в то время был достигнут значительный прогресс в производстве аналоговых вычислительных устройств, которые с большим успехом можно было использовать для вычисления гармонических функций. Кроме того, Ж. Файяр оснастил соответствующим образом фрезерный станок, что дало ощутимые результаты.

Через некоторое время на смену этому методу пришли другие методы, связанные с использованием цифровых устройств и полиномиальных параметрических функций с векторными коэффициентами.

Метод С. Инаба

К 1967 г. С. Инаба, директор общества Фудзи Тюсинки, завершил разработку метода, в котором обрабатываемая поверхность подвергается разбиению с помощью квадратных призм с длиной стороны основания, равной, например, 1 дм, как обычно принято в автомобильной промышленности, по крайней мере там, где допускается такая единица измерения.

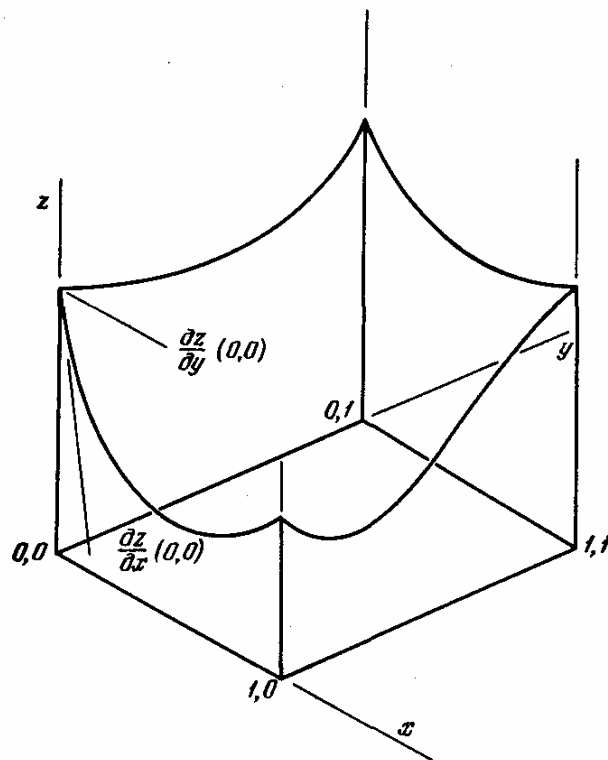


Рис. 3.18. Принцип метода Инаба.

Полученный таким образом элемент разбиения поверхности (рис. 3.18) в декартовых координатах описывается выражением

$$z = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \cdot x^i y^j \quad (x, y) \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

В четырех углах элемента разбиения нетрудно измерить значения координаты z и производных $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$. Последние определяются с помощью измерительных инструментов или простого алгоритма, использующего средние значения наклонов хорд, соединяющих последовательные вершины. Таким образом, каждый угол дает три параметра и для того, чтобы определить 16 коэффициентов выражения (3.5), необходимо иметь еще 4 параметра. Их получают, измеряя координаты четырех точек, расположенных внутри элемента разбиения. Для примыкающих элементов разбиения необходимо обеспечить непрерывность производных и кручений, что приводит к уменьшению числа дополнительно измеряемых координат.

Неудобство декартовой системы заключается в том, что поверхность, описываемая выражением (3.5), не может иметь вертикально расположенной касательной плоскости, поэтому время от времени приходится осуществлять поворот координатного базиса на 90° . По этой причине во всех приложениях преимущество отдается параметрическим методам обработки.

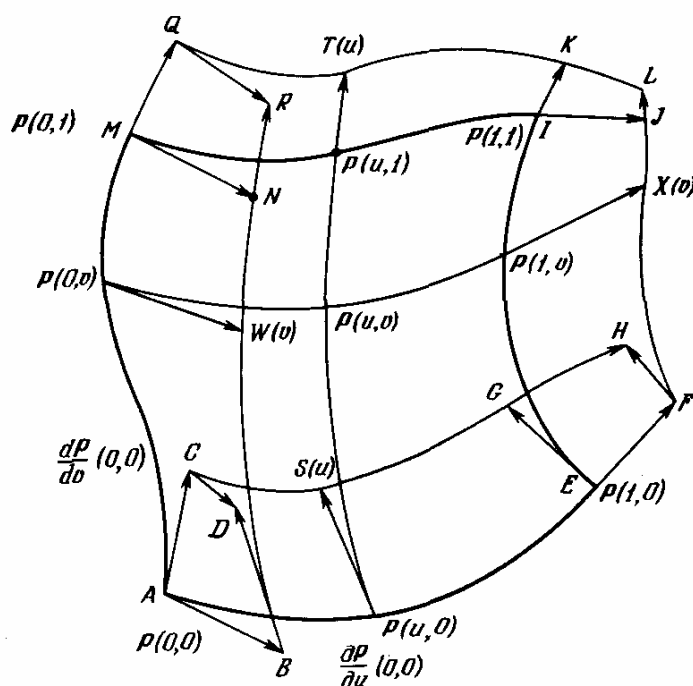


Рис. 3.19. Принцип метода Фергюсона.

Метод Дж. Фергюсона

В 1964 г. в журнале *Journal of the Association for Computing Machinery* инженер фирмы Боинг Джеймс Фергюсон опубликовал краткое изложение метода параметрического разбиения с векторными коэффициентами бикубической степени [60].

Рассмотрим элемент разбиения (рис. 3.19), ограниченный четырьмя кривыми, определенными так, как было описано в 3.2.1 и обозначенными $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, v)$ и $P(1, v)$. Вершинами элемента разбиения будут точки $P(0, 0)$, $P(1, 0)$, $P(0, 1)$ и $P(1, 1)$. В каждой вершине определим два вектора $\partial P/\partial u$ и $\partial P/\partial v$. Для определения изопараметрической кривой, соединяющей $P(u, 0)$ и $P(u, 1)$, необходимо знать векторы $\partial P(u, 0)/\partial u$ и $\partial P(u, 1)/\partial v$. Их можно определить, зная значения в точках, расположенных на кривых CG и QK , которые в свою очередь определяются соответственно векторами CD , GH , KL и QR . Таким образом, изопараметрические кривые определяются векторами $P(u, 0)S(u)$ и $P(u, 1)T(u)$, а элемент разбиения — тремя векторами в каждой вершине, аналогичными AB , AC и CD .

Легко показать, что векторы BD , FH , JL и NR определяют две кривые BN и FJ , обозначенные $W(v)$ и $X(v)$, которые являются геометрическим местом концов векторов $P(0, v)W(v)$ и $P(1, v)X(v)$, образующих изопараметрические кривые $P(0, v)P(1, v)$. Очевидно, что точка $P(u_0, v_0)$ является общей для кривых $P(u_0, v)$ и $P(u, v_0)$. Отсюда следует, что каждая изопараметрическая кривая одного семейства пересекается со всеми кривыми другого.

Для сшивки двух прилегающих друг к другу элементов разбиения

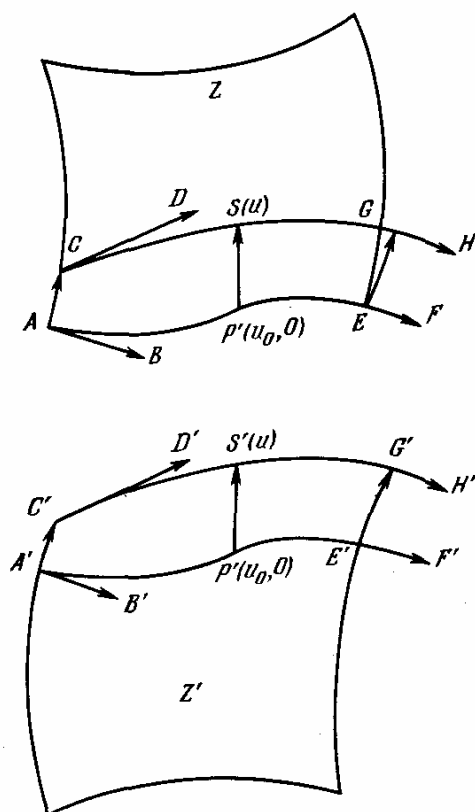


Рис. 3.20. Сшивка двух клеток по методу Фергюсона.

Дж. Фергюсон предложил очень простое решение. Касательные к изопараметрическим кривым $P(u_0, v)$ поверхности Z в точках, принадлежащих линии AE , располагаются на поверхности конуса с направляющими AE и CG . Для наглядности на рис. 3.20 поверхности Z и Z' раздвинуты. В вершинах A' и E' , совмещаемых с A и E , показаны те же векторы.

Таким образом, вектор, касательный к изопараметрической кривой $P'(u_0, v)$ в точке $P'(u_0, 1)$, является в то же время касательным и к поверхности Z , что обеспечивает касание обеих поверхностей во всех точках кривой AE .

Замечания. 1. Использованное условие является достаточным, но не необходимым, так как касание двух плоскостей в каждой точке кривой $P(u, 0)$ будет обеспечено при сохранении компланарности производных $\partial P(u, 0)/\partial u$, $\partial P(u, 0)/\partial v$ и $\partial P'(u, 0)/\partial w$ в этих точках. Однако сшивка элементов разбиения с использованием этого условия оказывается гораздо более трудоемкой, а условие равенства нулю смешанного произведения векторов является недостаточным для определения клетки.

2. Условия, предложенные Дж. Фергюсоном, приводят к небольшим различиям между элементами разбиения.

В задачах, возникающих в авиационной промышленности, обычно используются простые поверхности, в других же отраслях ситуация в этом смысле является более сложной, в частности при конструировании автомобилей. Остается только добавить, что определенные зоны сшивки, назы-

ваемые «зонами фон Кармана», между фюзеляжем и крыльями, горизонтальным и вертикальным стабилизаторами с трудом поддаются обработке с помощью метода Фергюсона, если не включить в него необходимые дополнения, в основе которых могут лежать и традиционные методы, основанные на применении шаблонов и эталонов.

Метод С. Кунса

К 1966 г. один известный конструктор автомобилей, следуя С. Кунсу, сформулировал проблему, которая заключалась в следующем: объект, который в данном конкретном случае представлял собой макет кузова автомобиля, с помощью линий разбивается на клетки, и необходимо определить точки внутри клеток так, чтобы обеспечить непрерывность самой поверхности и ее касательных. Впоследствии с учетом требований аэродинамики помимо непрерывности касательных потребовалась еще и непрерывность кривизны.

Принцип метода. Решение, предложенное С. Кунсом, является универсальным и вкратце состоит в следующем [48, 49]:

Допустим, что клетка разбиения ограничена четырьмя параметрическими кривыми (рис. 3.21), которые обозначим

$$P(u, 0), P(1, v), P(0, v) \text{ и } P(u, 1)$$

и точками пересечения которых являются

$$P(0, 0), P(1, 0), P(0, 1) \text{ и } P(1, 1).$$

Пусть также заданы две функции F_0 и F_1 :

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

на отрезке $[0, 1]$, графики которых приведены на рис. 3.22. Обе функции имеют равные нулю производные на границах этого отрезка. Тогда поло-

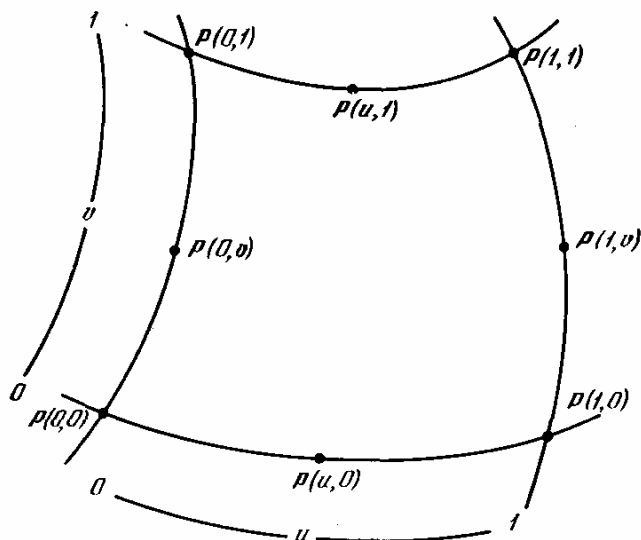


Рис. 3.21. Клетка Кунса.

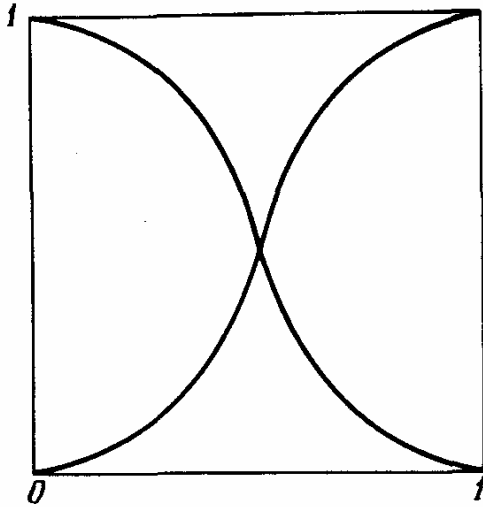


Рис. 3.22. Интерполяционная функция Кунса.

жение точки внутри клетки разбиения можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} P(u_0, v_0) = & P(u_0, 0)F_0(v_0) + P(u_0, 1)F_1(v_0) + P(0, v_0)F_0(u_0) + P(1, v_0)F_1(u_0) - \\ & - P(0, 0)F_0(u_0)F_0(v_0) - P(0, 1)F_0(u_0)F_1(v_0) - \\ & - P(1, 0)F_1(u_0)F_0(v_0) - P(1, 1)F_1(u_0)F_1(v_0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

Касательная в произвольной точке изопараметрической кривой, например $P(u_0, v)$, находится с помощью производной по v от выражения (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = & \frac{\partial P(u, 0)}{\partial v} \cdot \frac{dF_0(v)}{dv} + \frac{\partial P(u, 1)}{\partial v} \cdot \frac{dF_1(v)}{dv} + \\ & + \frac{\partial P(0, v)}{\partial v} \cdot F_0(u) + \frac{\partial P(1, v)}{\partial v} \cdot F_1(u) - \\ & - \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} \cdot F_0(u) \cdot \frac{dF_0(v)}{dv} - \frac{\partial P(1, 0)}{\partial v} \cdot F_1(u) \cdot \frac{dF_0(v)}{dv} - \\ & - \frac{\partial P(0, 1)}{\partial v} \cdot F_0(u) \cdot \frac{dF_1(v)}{dv} - \frac{\partial P(1, 1)}{\partial v} \cdot F_1(u) \cdot \frac{dF_1(v)}{dv}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В начальной точке изопараметрической кривой $P(u_0, 0)$ члены, содержащие $dF_0(0 \text{ или } 1)/dv$ и $dF_1(0 \text{ или } 1)/dv$, равны нулю, тогда и остается

$$\frac{\partial P(u_0, 0)}{\partial v} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} \cdot F_0(u_0) + \frac{\partial P(1, 0)}{\partial v} \cdot F_1(u_0). \quad (3.8)$$

Таким образом, векторы PA , PB и PC в точке $P(u_0, 0)$, изображение на рис. 3.23, соответственно равны

$$PA = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} \cdot F_0(u_0), \quad PB = \frac{\partial P(1, 0)}{\partial v} \cdot F_1(u_0), \quad PC = \frac{\partial P(u_0, 0)}{\partial v}.$$

В клетке Z' , примыкающей к Z вдоль линии $P(0, 0) P(1, 0)$, произ-

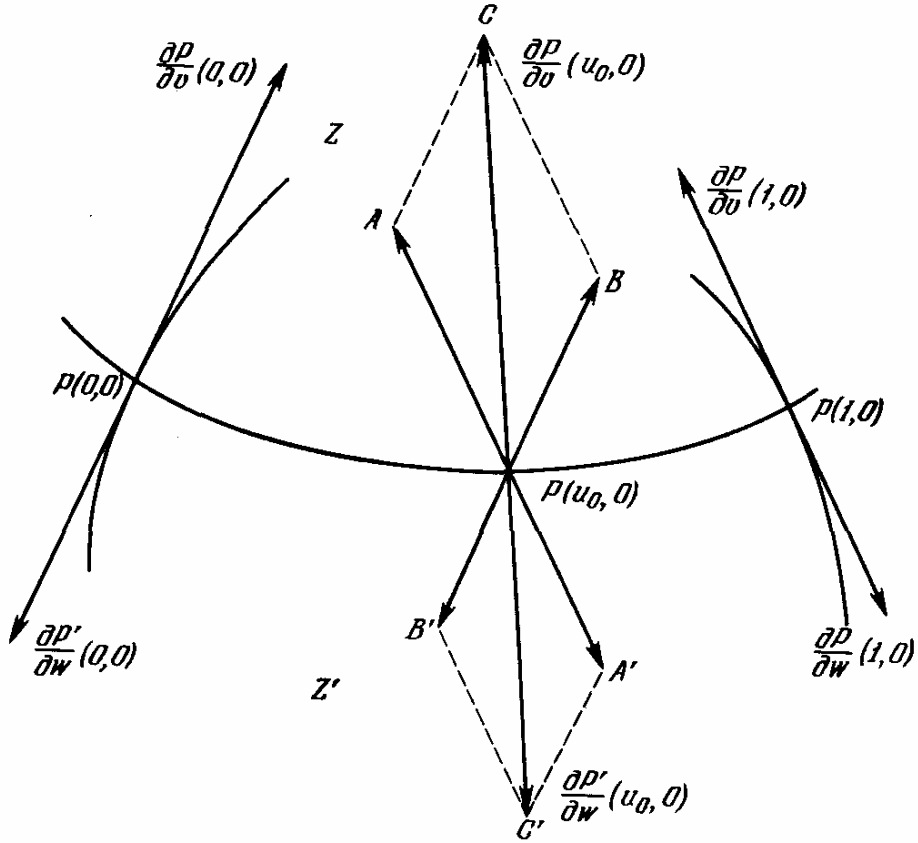


Рис. 3.23. Сшивка двух клеток по методу Кунса.

водная $\partial P'(u_0, 0)/\partial w$ зависит только от производных в точках $P'(0, 0)$ и $P'(1, 0)$, которые совпадают соответственно с точками $P(0, 0)$ и $P(1, 0)$.

Для того чтобы производные $\partial P(u_0, 0)/\partial v$ и $\partial P'(u_0, 0)/\partial w$ были коллинеарны, необходимо, чтобы параллелограммы $PACB$ и $P'A'C'B'$ были гомотетичны, т. е.

$$\frac{\frac{\partial P(0, 0)}{\partial v}}{\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial w}} = \frac{\frac{\partial P(1, 0)}{\partial v}}{\frac{\partial P'(1, 0)}{\partial w}} \tag{3.9}$$

Очевидно, что это соотношение верно для четырех сторон клетки.

Таким образом, проблема, сформулированная С. Кунсом, полностью решена. Однако требование пропорциональности частных производных в граничных точках приводит к тому, что примыкающие элементы разбиения должны быть близкими по форме и размерам и являться продолжением друг друга.

Нулевое кручение. Одним из свойств приведенного решения является равенство нулю смешанных производных в углах каждой клетки. Дифференцируя выражение (3.7) по u , получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, v)}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, 0)}{\partial u \partial v} \cdot F_0(v) + \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, 1)}{\partial u \partial v} \cdot F_1(v) + \\
&+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_0(u)}{du} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_1(u)}{du} - \\
&- \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_0(u)}{du} \cdot \frac{dF_0(v)}{dv} - \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 0)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_1(u)}{du} \cdot \frac{dF_0(v)}{dv} - \\
&- \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 1)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_0(u)}{du} \cdot \frac{dF_1(v)}{dv} - \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 1)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF_1(u)}{du} \cdot \frac{dF_1(v)}{dv}. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

При этом каждый из членов $\frac{dF_0}{du}$, $\frac{dF_1}{du}$, $\frac{dF_0}{dv}$ и $\frac{dF_1}{dv}$ равен нулю для значений u или v , равных 0 или 1.

Отсюда сразу получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 0)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 1)}{\partial u \partial v} = 0.$$

Из равенства нулю смешанной производной следует отсутствие кручения, что приводит к неравномерности внешнего вида обрабатываемой поверхности и является недостатком по крайней мере эстетическим.

Выражение (3.6) можно обобщить. Предположим, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u, v) &= [f_i(u)] \left[\begin{array}{c} P(0, v) \\ P(1, v) \\ \frac{\partial \mathbf{P}(0, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(1, v)}{\partial u} \end{array} \right] + \\
&+ \left[\mathbf{P}(u, 0) \mathbf{P}(u, 1) \frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{P}(u, 1)}{\partial v} \right] [f_j(v)] - \\
&- [f_i(u)] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}(0, 0) \mathbf{P}(0, 1) \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 1)}{\partial v} \\ \mathbf{P}(1, 0) \mathbf{P}(1, 1) \frac{\partial \mathbf{P}(1, 0)}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{P}(1, 1)}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 1)}{\partial u} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 1)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(1, 0)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{P}(1, 1)}{\partial u} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 0)}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(1, 1)}{\partial u \partial v} \end{array} \right] [f_j(v)] \quad (3.11)
\end{aligned}$$

В частном случае формулы (3.6) — смешанные производные, т. е.

четыре члена $\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}$ в приведенном тензоре, исчезают¹⁾. Затем выбирают 4 точки $P(u_1, v_1), \dots, P(u_4, v_4)$, расположенные на поверхности клетки, и, не изменяя их параметрических координат, точки перемещают, определяют для них новые декартовы координаты. Таким образом вводят еще 4 условия, которые используют вместо равенства нулю смешанных производных в углах клетки разбиения.

Теперь для сшивки соседних элементов разбиения остается учесть кручение, что более подробно сделано в гл. 4.

Сшивка с сохранением кривизны. Для выполнения сшивки с сохранением непрерывности кривизны функции F_0 и F_1 заменяются следующими функциями пятой степени:

$$G_0(t) = -6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 1,$$

$$G_1(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3.$$

При этом непрерывность кривизны сохраняется в углах клетки, следовательно, и во всех точках сшивки.

По аналогии с выражением (3.11) легко определить, что центральный тензор содержит 36 членов и можно заранее задать отличными от нуля следующие члены:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^3 P}{\partial u^2 \partial v}, \frac{\partial^3 P}{\partial u \partial v^2} \text{ и } \frac{\partial^4 P}{\partial u^2 \partial v^2}.$$

Треугольные элементы разбиения. При использовании треугольных элементов разбиения часто используется метод, в котором 3 параметра связаны простыми соотношениями [10, 11, 14, 21—23, 42, 54, 58, 61, 69, 96, 105, 124].

Параметрическая форма. Рассмотрим точку R , расположенную внутри произвольного треугольника ABC (рис. 3.24). Барицентрической координатой этой точки по отношению к стороне BC называется отношение

$$u = \frac{\text{Площадь } RBC}{\text{Площадь } ABC}.$$

Аналогично определяются

$$v = \frac{\text{Площадь } RCA}{\text{Площадь } ABC} \text{ и } w = \frac{\text{Площадь } RAB}{\text{Площадь } ABC}.$$

и легко показать, что верно следующее соотношение:

$$u + v + w = 1. \quad (3.12)$$

Вместо трех параметров можно использовать u , v и $[1 - (u + v)]$, что приведет к тем же результатам.

¹⁾ В этом частном случае $[f_i(v)] = (F_0(v), F_1(v), 0, 0)$. — Прим. ред.

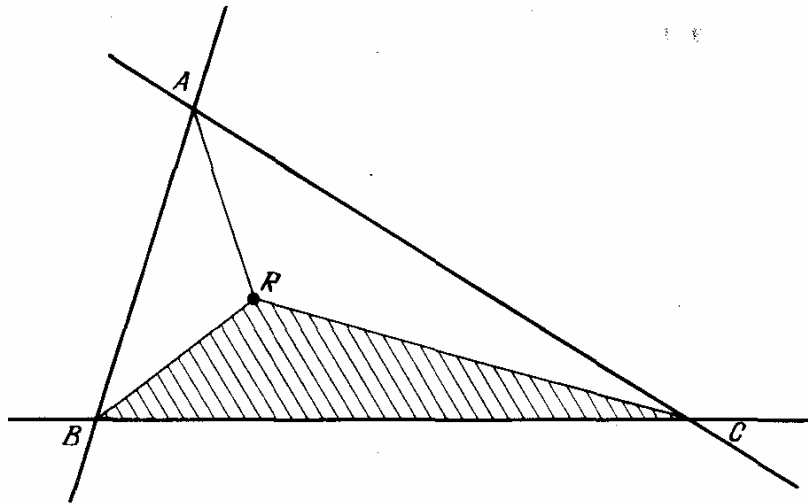


Рис. 3.24. Определение барицентрических координат.

В гл. 4 подробно рассмотрено использование характеристических многоугольников и сеток, а также функций Бернштейна. Советуем читателям ознакомиться с ними перед изучением треугольных элементов разбиения. А сейчас только напомним, что в треугольнике ABC (рис. 3.24) точка, координата u которой остается постоянной при изменении координат v и w (координаты связаны соотношением (3.12)), описывает прямую линию, параллельную BC .

Определение положения точки. Характеристическая сетка треугольного элемента разбиения состоит из плоских треугольных граней и связывает между собой вершины элементов (рис. 3.25). Вершины обозначаются тройными индексами по правилу, хорошо иллюстрируемому рисунком для функций 4-й степени: в каждой вершине сумма трех индексов i, j и k равна степени функций. Координаты точки $P(u, v, w)$ определяются аналогично

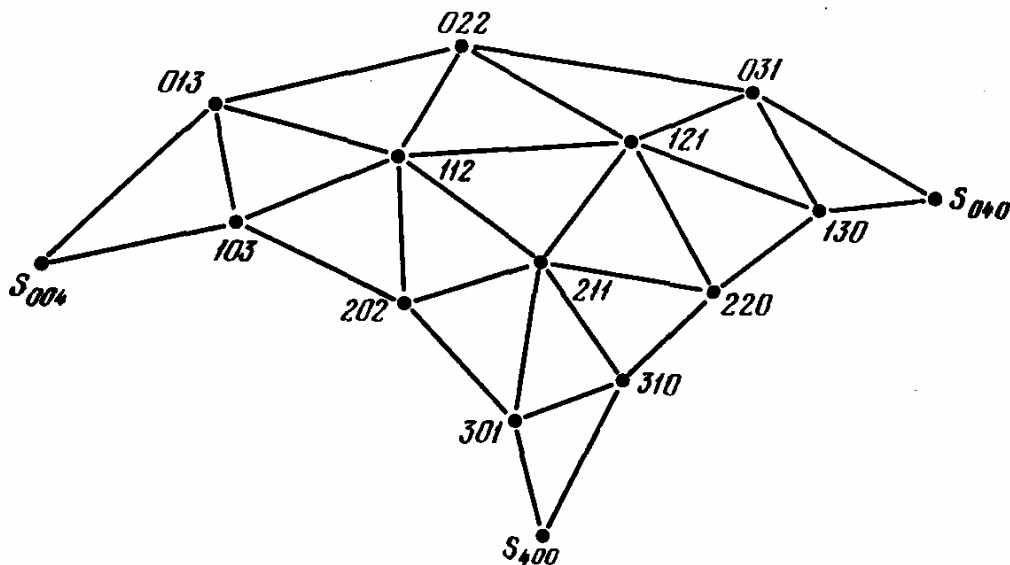


Рис. 3.25. Характеристическая сетка с треугольными элементами разбиения.

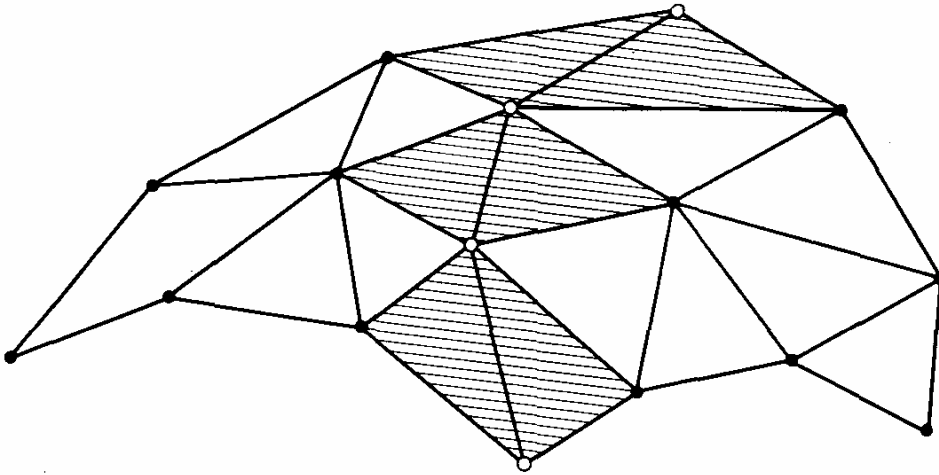


Рис. 3.26. Условия сшивки двух треугольных элементов разбиения.

случаю бипараметрической клетки (см. гл. 4):

$$P(u, v, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m s_{ijk} \cdot B_{i,m}(u) \cdot B_{j,m}(v) \cdot B_{k,m}(w),$$

где $i + j + k = m$ и $u + v + w = 1$.

Перегруппируя коэффициенты при одинаковых степенях, получим формулу в более удобном для применения виде

$$P(u, v, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m b_{ijk} u^i v^j w^k.$$

Треугольные сетки, так же как и бипараметрические, можно подвергать различным преобразованиям: более мелкому разбиению, увеличению числа граней и т. д. Из других свойств можно отметить следующее: все точки поверхности находятся внутри выпуклого многогранника, содержащего все вершины треугольной сетки, что вытекает из свойств функций Бернштейна [147].

Сшивка примыкающих треугольников. Для того чтобы обеспечить касание примыкающих треугольных элементов разбиения по линии примыкания (рис. 3.26), необходимо, чтобы грани характеристической сетки по обе стороны этой линии были компланарны.

3.3. АППРОКСИМАЦИЯ

3.3.1. Метод П. Кастельжо

В гл. 1 отмечалась важность исследований, выполненных Полем Кастельжо, которые в течение долгого времени являлись производственным

секретом. В книге 1 опубликована часть этих работ под названием «Теория полюсов» [37]. Интересующихся читателей отсылаем к этой работе.

3.3.2. Метод Р. Ризенфельда

Идея метода

В разд. 3.2.1 показано, что при формировании линии из отрезков кубических кривых (сплайнов) любая модификация одного из отрезков шаг за шагом приведет к модификации всех остальных, что может привести к неблагоприятным последствиям. Метод, предложенный Ричардом Ризенфельдом и Вильямом Гордоном в 1974 г. [70—72, 120], позволяет устранить эти трудности. Его идея заключается в следующем.

Допустим, что заданы, например, пять полиномов R_0, \dots, R_4 пятой степени от параметра u , меняющегося на отрезке $[0, 1]$. Заданы также коэффициенты $s_i (i \in [0, 4])$, которые являются векторами с началом в произвольной точке и с концами в точках S_0, \dots, S_4 (рис. 3.27). Тогда при изменении параметра u конец вектора $\mathbf{P}(u)$ описывает дугу кривой, если $\mathbf{P}(u)$ описывается уравнением

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^4 s_i R_{is}(u). \quad (3.13)$$

Общий вид функции R задается следующим выражением:

$$R_{i,m}(u) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{(u+m-i-j)^m}{j!(m-j+1)!}, \quad (3.14)$$

а для $m = 5$

$$R_{0,5} = \frac{1}{120}(-u^5 + 5u^4 - 10u^3 + 10u^2 - 5u + 1),$$

$$R_{1,5} = \frac{1}{120}(5u^5 - 20u^4 + 20u^3 + 20u^2 - 50u + 26),$$

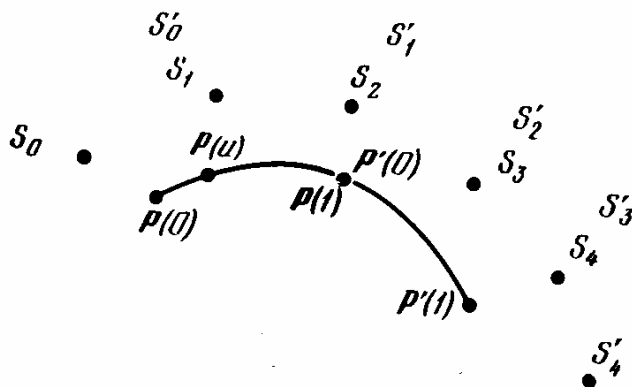


Рис. 3.27. Принцип метода Ризенфельда.

$$R_{2,5} = \frac{1}{120}(-10u^5 + 30u^4 - 60u^2 + 66),$$

$$R_{3,5} = \frac{1}{120}(10u^5 - 20u^4 - 20u^3 + 20u^2 + 50u + 26),$$

$$R_{4,5} = \frac{1}{120}(-5u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u + 1),$$

$$R_{5,5} = \frac{1}{120}u^5.$$

Граница зоны влияния

Из приведенных выше выражений видно, что когда параметр u принимает значение равное 1, функция R_0 вместе со своими производными равна нулю. Отсюда следует, что точка S_0 не оказывает влияния ни на положение, ни на наклон, ни на кривизну и т. д. точки $P(1)$. Аналогично, когда параметр u принимает нулевое значение, становится равной нулю функция R_4 вместе со своими производными и, следовательно, точка S_0 не оказывает влияния на точку $P(0)$.

Рассмотрим теперь векторы S'_0, \dots, S'_4 , из которых четыре первых вектора совпадают соответственно с S_1, S_2, S_3 и S_4 . Они определяют дугу $P'(u) = \sum_{i=0}^4 s'_i \cdot R(u)$. Функции R обладают следующим общим свойством:

$$R_{i,m}(1) \equiv R_{i+1,m}(0) \text{ и } \frac{d^j R_{i,m}(1)}{du^j} = \frac{d^j R_{i+1,m}(0)}{du^j}.$$

Отсюда следует, что точки $P(1)$ и $P'(0)$ совпадают и равны производные в этой точке у обеих примыкающих кривых, что влечет за собой непрерывность наклона, кривизны и даже производных более высоких порядков.

Если рассмотреть характеристический многоугольник последовательности дуг, например, пятой степени, то вершина S_n оказывает влияние на дуги, имеющие характеристические многоугольники между (S_{n-5}, \dots, S_n) и (S_n, \dots, S_{n+5}) . На другие дуги, расположенные вне этого диапазона, перемещение точки S_n не оказывает никакого влияния (рис. 3.28).

Таким образом, имеется возможность произвольно добавлять дополнительные вершины многоугольника в определенных областях и тем самым уменьшить размеры изменяемой зоны [24].

Поверхности

В следующем примере использованы две функции четвертой и шестой степеней. Рассмотрим набор точек с двумя индексами, заключенными между $S_{m-2, n-3}$ и $S_{m+2, n+3}$. Они определяют клетку, точки поверхности кото-

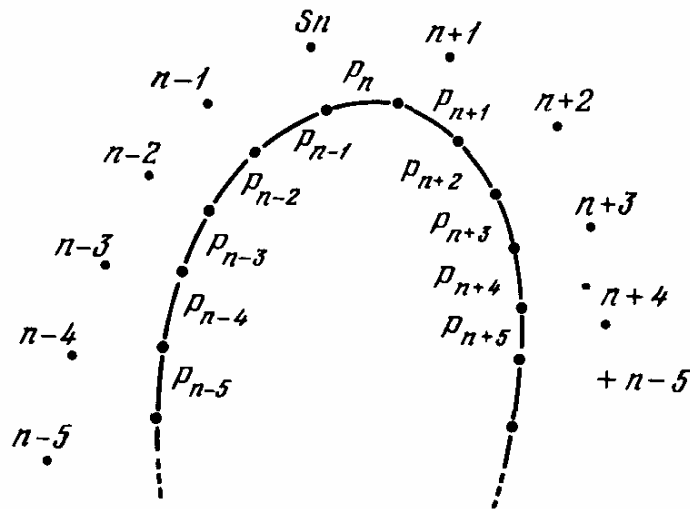


Рис. 3.28. Зона влияния вершины многоугольника Ризенфельда.

рой $P(u, v)$ определяются выражением

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^6 S_{m-2+i, n-3+j} R_{i, 4}(u) R_{j, 6}(v). \quad (3.15)$$

Как и для кривых, смещение точки $S_{m, n}$ приводит к модификации клетки, определяемой выражением (3.15), но не влияет на примыкающие клетки характеристической сетки.

Замечания. 1. Для упрощения записи в примере выбраны функции четных степеней, но такие же результаты получаются и для функций нечетных степеней.

2. Так же как и для кривых, в сеть можно включить дополнительные вершины для локализации изменений, однако эти вершины должны находиться в точках пересечения линий, образующих сеть, что не так просто реализовать для сети с большим числом элементов разбиения [24].

3.3.3. Система UNISURF

Одной из целей системы UNISURF, разрабатываемой фирмой «Рено» с 1962 г., а затем и фирмой «Пежо», служила простота ее освоения и эксплуатации специалистами, профессиональный опыт которых был главным образом связан с богатой практикой в области стереометрии. Полное описание системы приведено в докторской диссертации, подготовленной в 1975 г. [19]. Гл. 4 написана по материалам этой работы.

Глава 4

Система UNISURF

Система UNISURF разрабатывалась в рамках проектов RA3D, а затем DATAVISION для облегчения изготовления кузовов автомобилей и проведения исследований в этой области. Она охватывает все стадии работы, начиная от замысла и кончая проверкой прессового оборудования, контролем формы гнутых деталей и программированием сварочных и покрасочных автоматов (роботов).

С самого начала в систему закладывалась возможность работы в диалоговом режиме. Несмотря на не очень простой математический аппарат, она доступна для проектировщиков, чертежников, разработчиков и операторов различных машин, которые хорошо знакомы с описательной геометрией, но профессиональная деятельность которых не требует глубокого знания анализа [15, 16, 40, 41, 43, 44, 45, 51, 77, 81, 85—88, 121, 128, 134, 136, 142, 144].

4.1. КРИВЫЕ

4.1.1. Основные понятия

Линейное преобразование

Пусть в ортонормированном базисе (o, x, y, z) задана кривая Γ , называемая «базовой кривой» (рис. 4.1). Точки кривой $\Gamma(u)$ определяются с помощью следующего выражения:

$$\Gamma(u) = \alpha_x f_1(u) + \alpha_y f_2(u) + \alpha_z f_3(u), \quad (4.1)$$

где α_x , α_y и α_z — единичные векторы осей ox , oy и oz .

Для определения кривой C (рис. 4.2) в произвольном базисе $OXYZ$, который является базисом, например, чертежного устройства или обрабатывающего станка, необходимо сначала базис $oxuz$ подвергнуть преобразованию переноса на вектор \mathbf{a}_0 , а затем линейному преобразованию, при котором векторы α_x , α_y и α_z становятся соответственно векторами \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 . В результате этого кривая Γ становится кривой C , точки которой в базисе $OXYZ$ определяются выражением

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i f_i(u), \quad (4.2)$$

в котором функции f_i совпадают с функциями из выражения (4.1).

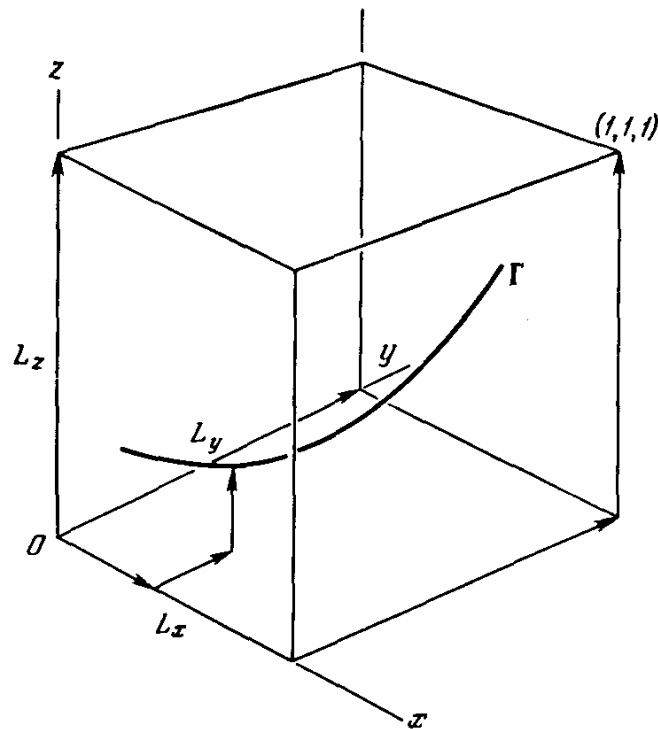


Рис. 4.1. Базовая кривая.

Характеристический многоугольник

Более удобным оказывается представление кривой не с помощью векторов a_1 , a_2 и a_3 , а путем последовательного расположения этих векторов как a_1 , a'_2 и a'_3 (рис. 4.2) и построения таким образом многоугольника, называемого характеристическим, определяющего кривую C (рис. 4.3).

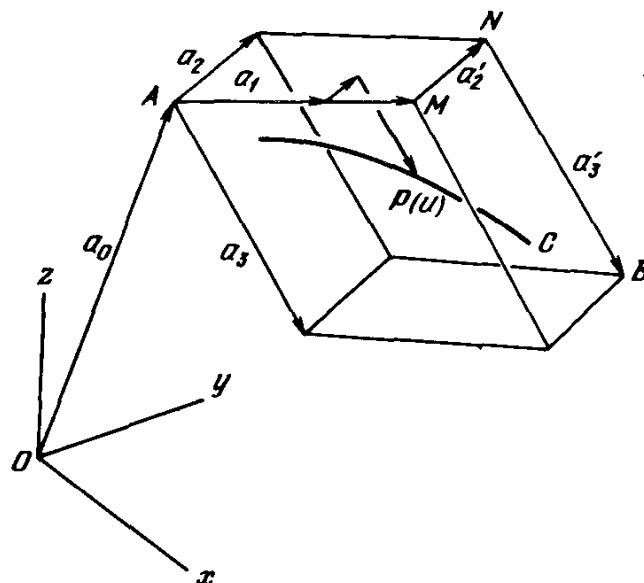


Рис. 4.2. Линейное преобразование базовой кривой.

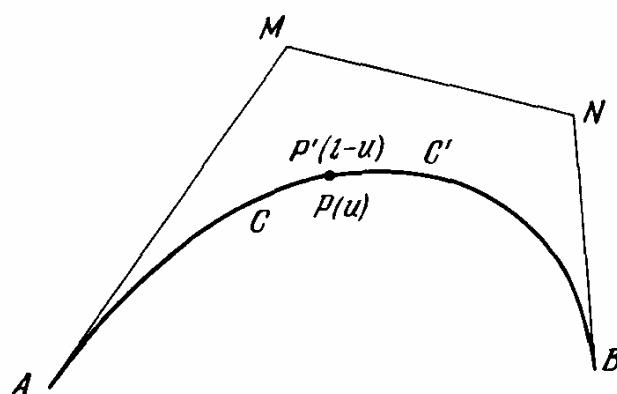


Рис. 4.3. Характеристический многоугольник кривой.

Обобщение на многомерное пространство

Допустим, что базовая кривая задана в m -мерном пространстве. Тогда проекция ее характеристического многоугольника на двумерное или трехмерное пространство будет представлять собой m -сторонний характеристический многоугольник, а вместо (4.2) будет верно следующее выражение:

$$P(u) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i f_{i, m}(u). \quad (4.3)$$

Такое обобщение понятия базовой кривой дает возможность получить большее разнообразие кривых, что приводит к уменьшению числа элементов разбиения.

4.1.2. Определение положения точки

Функции f

Трехсторонние многоугольники. Выбор функций f определяются свойствами базовой кривой:

1. Точка $\Gamma(0)$ является началом координат o базиса $oxuz$ (рис. 4.1). Ее координаты — $(0, 0, 0)$.
2. Координаты точки $\Gamma(1)$ равны $(1, 1, 1)$.
3. Касательной в точке $\Gamma(0)$ является ось ox .
4. Касательная в точке $\Gamma(1)$ параллельна оси oz .
5. Значение параметра u меняется в пределах от 0 до 1.

Отсюда следует, что концами отрезка кривой с характеристическим многоугольником $AMNB$ (рис. 4.3) являются точки A (начало) и B (конец). Касательными к кривой в этих точках являются соответственно AM и NB .

Кроме того:

1. Поскольку $\mathbf{P}(0) = \mathbf{A} = \mathbf{a}_0$, то ¹⁾

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0 \text{ и } f_0(0) = 1. \quad (4.4)$$

2. Из условия $\mathbf{P}(1) = \mathbf{B} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_i$ следует

$$f_0(1) = f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1. \quad (4.5)$$

3. Так как в точке A кривая C имеет касательную AM , то

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = k\mathbf{a}_1,$$

где коэффициент k является положительной скалярной величиной, значение которой должно быть определено из других условий. Отсюда следует

$$\frac{df_0(0)}{du} = \frac{df_2(0)}{du} = \frac{df_3(0)}{du} = 0. \quad (4.6)$$

4. Из того что кривая C имеет в точке B касательную NB , следует

$$\frac{d\mathbf{P}(1)}{du} = k'\mathbf{a}_3,$$

где коэффициент k' также является положительной скалярной величиной. Отсюда получаем

$$\frac{df_0(1)}{du} = \frac{df_1(1)}{du} = \frac{df_2(1)}{du} = 0. \quad (4.7)$$

Соотношения (4.4) — (4.7) представляют собой 14 условий и нужно найти еще два для определения четырех кубических функций. Построим касательные к кривой Γ : в точке $(0, 0, 0)$ в плоскости oxy и в точке $(1, 1, 1)$ в плоскости, параллельной oyz . Имеем

$$\frac{d^2f_3(0)}{du^2} = \frac{d^2f_1(1)}{du^2} = 0. \quad (4.8)$$

Решая систему уравнений (4.4) — (4.8), находим

$$\begin{aligned} f_0(u) &= 1 = \text{const}, \\ f_1(u) &= u^3 - 3u^2 + 3u, \\ f_2(u) &= -2u^3 + 3u^2, \\ f_3(u) &= u^3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹⁾ $f_0(u)$ — множитель при \mathbf{a}_0 , отсутствующий в формуле (4.2). Как будет показано ниже, $f_0(u) \equiv 1$. — Прим. ред.

Заметим, что это семейство функций симметрично по отношению к перестановке u и $(1 - u)$, т. е.

$$\begin{aligned} f_1(1 - u) &= 1 - f_3(u), \\ f_2(1 - u) &= 1 - f_2(u), \\ f_3(1 - u) &= 1 - f_1(u). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Следовательно, кривая C' (рис. 4.3), характеристическим многоугольником для которой является $BNMA$, геометрически совпадает с кривой C , характеристическим многоугольником для которой является $AMNB$, и можно записать

$$P(u) = P'(1 - u). \quad (4.11)$$

Обобщение на многомерное пространство. Выше отмечалось (разд. 4.1.1), что любую линию можно представить как проекцию на двумерное или трехмерное пространство базовой кривой, заданной в m -мерном пространстве. В этом случае ее характеристический многоугольник состоит из m векторов $a_i (i \in [1, m])$.

Обобщая для этого случая выражения (4.4)–(4.8), получим

$$\begin{aligned} 1) & f_{0, m}(u) = 1, \\ 2) & f_{i, m}(0) = 0 \quad i \in [1, m], \\ 3) & f_{i, m}(1) = 1 \quad i \in [1, m], \\ 4) & d^j f_{i, m}(0)/du^j = 0 \quad i \in [j, m], j \in [1, m - 1], \\ 5) & d^j f_{i, m}(1)/du^j = 0 \quad i \in [1, m - j], j \in [1, m - 1]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формулы (4.12) содержат $m(m + 1)$ условий, определяющих m функций $f_{i, m}(u)$, имеющих следующий вид:

$$f_{i, m}(u) = \frac{(-u)^i}{(i - 1)!} \cdot \frac{d^{i-1} \left[\frac{(1 - u)^m - 1}{u} \right]}{du^{i-1}}. \quad (4.13)$$

На рис. 4.4 приведены графики этих функций на интервале $(0, 1)$ для случая $m = 5$.

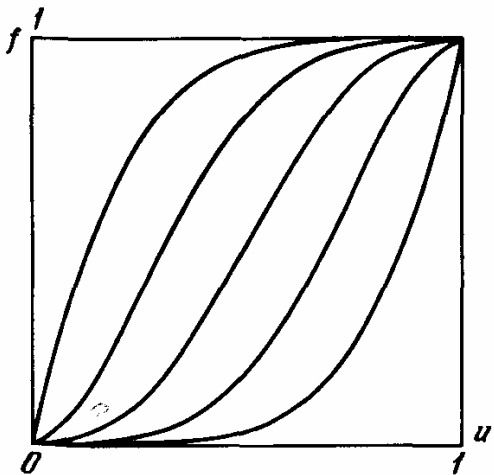


Рис. 4.4. Функции f для случая $m = 5$.

Правило для вычисления коэффициентов поясняется следующими формулами, соответствующими $m = 6$:

$$\begin{aligned} f_{1,6} &= -x^6 + 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 15x^2 + 6x, \\ f_{2,6} &= 5x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 40x^3 + 15x^2, \\ f_{3,6} &= -10x^6 + 36x^5 - 45x^4 + 20x^3, \\ f_{4,6} &= 10x^6 - 24x^5 + 15x^4, \\ f_{5,6} &= -5x^6 + 6x^5, \\ f_{6,6} &= x^6. \end{aligned}$$

Для вычисления функций $f_{i,m}$ могут быть использованы также и другие формулы:

$$f_{i,m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \cdot \binom{m}{j} \cdot \binom{j-1}{i-1} \cdot u^j = \quad (4.14)$$

$$= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \frac{m!}{j!(i-1)!(j-i)!(m-j)!} u^j. \quad (4.15)$$

Основные свойства функций f . Из многочисленных свойств функций f отметим только те, которые имеют практическое значение:

1. Функции f симметричны по отношению к замене u на $(1-u)$, т. е.

$$f_{i,m}(1-u) = 1 - f_{m-i+1,m}(u), \quad (4.16)$$

что следует из формулы (4.14).

$$2. \quad \sum_{i=1}^m f_{i,m}(u) = m \cdot u, \quad (4.17)$$

откуда следует, что характеристический многоугольник, состоящий из одинаковых векторов, определяет прямую, производная по параметру u которой является константой. Таким образом, расстояние между двумя точками отрезка этой прямой пропорционально разности между значениями параметра в этих точках.

$$3. \quad \int_0^1 f_{i,m}(u) du = \frac{i}{m+1}. \quad (4.18)$$

Из этого свойства следует:

3.1. Интегралы от функций f в пределах от 0 до 1 образуют арифметическую прогрессию с разностью $1/(m+1)$.

$$3.2. \quad \sum_{i=1}^m \int_0^1 f_{i,m}(u) du = \frac{m}{2}. \quad (4.19)$$

$$4. \quad \frac{df_{i, m}(0)}{du} = \frac{df_{m, m}(1)}{du} = m,$$

$$\frac{df_{i, m}(0)}{du} = 0, \quad i \neq 1,$$

$$\frac{df_{i, m}(1)}{du} = 0, \quad i \neq m.$$

Отсюда следует, что первые параметрические производные в точках A и B равны соответственно

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_1, \quad (4.20)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(1)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_m.$$

$$5. \quad \frac{d^2f_{1, m}(0)}{du^2} = -\frac{d^2f_{2, m}(0)}{du^2} = -m(m-1)$$

и

$$\frac{d^2f_{m, m}(1)}{du^2} = -\frac{d^2f_{m-1, m}(1)}{du^2} = m(m-1). \quad (4.21)$$

Отсюда следует, что вторые параметрические производные в точках A и B равны соответственно

$$\frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} = m(m-1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1),$$

$$\frac{d^2\mathbf{P}(1)}{du^2} = m(m-1)(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{m-1}), \quad (4.22)$$

и выпуклость кривой в этих точках направлена по отношению к вектору \mathbf{a}_1 (или \mathbf{a}_m) так же, как и к вектору \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_{m-1}).

Радиус кривизны в точках $P(0)$ и $P(1)$ зависит только от \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1}) и вычисляется следующим образом¹⁾:

$$\mathbf{R} = \frac{\left| \frac{d\mathbf{P}}{du} \right|^3}{\left| \frac{d\mathbf{P}}{du} \times \frac{d^2\mathbf{P}}{du^2} \right|}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим дугу кривой AB (рис. 4.5) и ее характеристический много-

¹⁾ Символ \times означает векторное произведение. — Прим. ред.

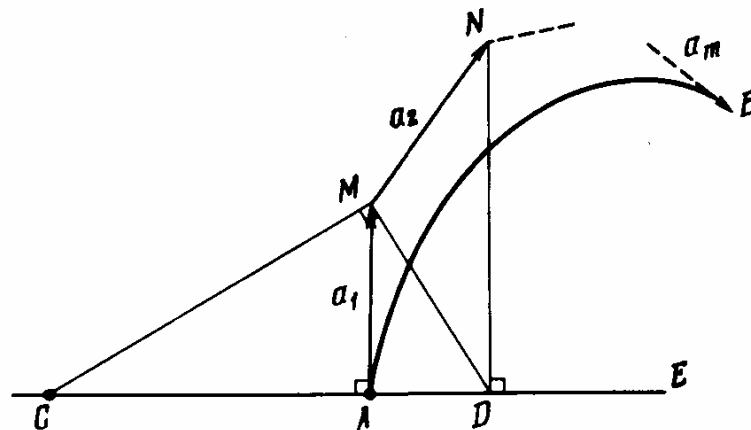


Рис. 4.5. Построение центра кривизны начальной точки кривой.

угольник $AMN \dots B$, состоящий из m векторов. В этом случае

$$\frac{AM}{MN} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2}.$$

Построим точку D , являющуюся проекцией точки N на прямую E , перпендикулярную AM . Теперь последовательно определяем

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} = m(m-1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$$

$$\text{и} \quad \frac{d\mathbf{P}(0)}{du} \times \frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} = m^2 \cdot (m-1)(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{m^3 |\mathbf{a}_1|^3}{m^2(m-1) |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m}{m-1} \frac{|\mathbf{AM}|^3}{|\mathbf{AM} \times \mathbf{AD}|} = \\ &= \frac{m}{m-1} \frac{|\mathbf{AM}|^2}{|\mathbf{AD}|} = \frac{m}{m-1} |\mathbf{AC}|. \end{aligned}$$

Для точки B можно проделать такие же построения, используя векторы \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1} . Кривизна равна нулю, если векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1}) коллинеарны.

6. Для графического построения функций f_i, m на отрезке $[0,1]$ можно использовать следующий метод:

Возьмем квадрат $ACBD$ (рис. 4.6) произвольного размера и разделим его горизонтальные стороны на m равных частей. Зададим для функции $f_i, m(u)$ характеристический многоугольник $AM \dots SB$, сторонами которого являются:

- $i-1$ первых отрезков стороны AC , например AM, MN и NQ ;
- отрезок прямой, соединяющий конец $(i-1)$ -го отрезка на стороне AC с началом i -го отрезка на стороне DB .

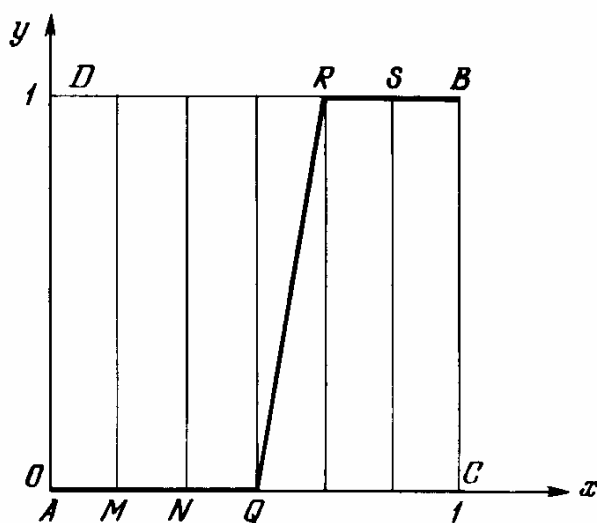


Рис. 4.6. Характеристический многоугольник функции f .

• $m - 1$ последних отрезков на стороне DB , в данном случае RS и SB . Таким образом, график функции $f_{4,6}$ определяется характеристическим многоугольником $AMNQRSB$.

7. Будем говорить, что функция $f_{i,m}(u)$ в точке A имеет контакт i -го порядка с осью ox и контакт $(m - i - 1)$ -го порядка в точке B с прямой, параллельной оси x .

8. Графики функций от $f_{2,m}$ до $f_{m-1,m}$ имеют точку перегиба с абсциссой $(i - 1)/(m - 1)$.

9. С помощью простых построений можно получить точку кривой $P(u)$ и касательную к ней в этой точке. Рассмотрим, например, характеристический многоугольник $AMNQRB$ (рис. 4.7) и найдем точки A', M', \dots, R' ,

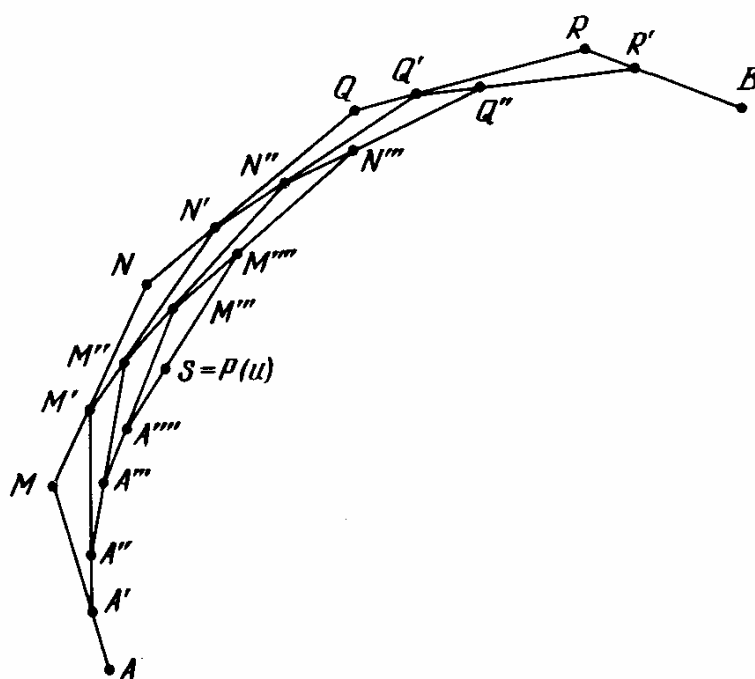


Рис. 4.7. Построение текущей точки по методу Верне.

для которых выполняются следующие соотношения:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{MM'}{MN} = \dots = \frac{RR'}{RB} = u,$$

затем найдем точки A'' , M'' , ..., Q'' , удовлетворяющие условиям

$$\frac{A'A''}{A'M'} = \frac{M'M''}{M'N'} = \dots = \frac{Q'Q''}{Q'R'} = u$$

и т. д. Последний отрезок, полученный в этой процедуре $A'''M'''$, содержит точку S , такую, что

$$\frac{A'''S}{A'''M'''} = u.$$

Точка S совпадает с $P(u)$, а отрезок $A'''M'''$ является касательной к кривой в этой точке. Более того, для отрезков кривой $AP(u)$ и $P(u)B$ характеристическими многоугольниками являются соответственно $AA'A''A'''A''''P(u)$ и $P(u)M'''N'''Q'''R'V$.

10. Если k первых векторов характеристического многоугольника равны нулю, то касательная в начальной точке совпадает с $(k+1)$ -м вектором. Пусть

$$a_i = 0 \quad i \in [1, k].$$

Тогда из формулы (4.12) следует

$$\frac{d^j f_{i,m}}{du^j} = 0 \quad i \in [j, m],$$

и если $j = k+1$, то

$$\frac{d^{k+1} P(0)}{du^{k+1}} = a_{k+1} \frac{d^{k+1} f_{k,m}(0)}{du^{k+1}}. \quad (4.25)$$

11. Будем придерживаться следующих соглашений:

$$\binom{a}{b} = 1 \text{ при } b = 0, \text{ даже если } a < 0^1),$$

$$\binom{a}{b} = 0 \text{ при } b > a,$$

$$\binom{a}{b} = 0 \text{ при } b < 0,$$

$$\binom{a}{b} = 1 \text{ при } a = b, \text{ для любых } a \text{ и } b, \text{ положительных или отрицательных.}$$

¹⁾ Аналогично соглашению $0! = 1$.

Используя соотношение (4.14), для определения функции $f_{0, m}(u)$ получим

$$f_{0, m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{0+j} \binom{m}{j} \binom{-1}{j-1} u^0. \quad (4.26)$$

Коэффициент $\binom{-1}{j-1}$ равен нулю, за исключением случаев $j = 0$. Отсюда следует

$$f_{0, m}(u) = (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{-1}{-1} u^0.$$

Поскольку все четыре сомножителя равны 1, то $f_{0, m} = 1$. Можно рассуждать и по-другому:

$$f_{0, m}(0) = f_{0, m}(1) = 1.$$

Кроме того, все производные функции $f_{0, m}$ равны нулю для m , равного нулю или единице, следовательно,

$$f_{0, m}(u) \equiv 1.$$

12. Допустим, что $i = m + n > m$. В этом случае

$$f_{m+n, m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+m+n} \binom{m}{j} \binom{j-1}{m+n-1} u^j,$$

и так как

$$m + n - 1 > j - 1 \quad (4.27)$$

член $\binom{j-1}{m+n-1}$ равен нулю для всех значений j . Следовательно, если ранг функции превышает m , она тождественно равна нулю.

Функции \mathcal{B}

Исследуем изменение формы кривой при изменении характеристического многоугольника.

Определение функции \mathcal{B} . Обозначим через s_i векторы (рис. 4.8) вершин характеристического многоугольника по отношению к произвольному началу. Очевидно, что $a_i = s_i - s_{i-1}$ и

$$P(u) = \sum_{i=0}^n (s_i - s_{i-1}) \cdot f_{i, m}(u).$$

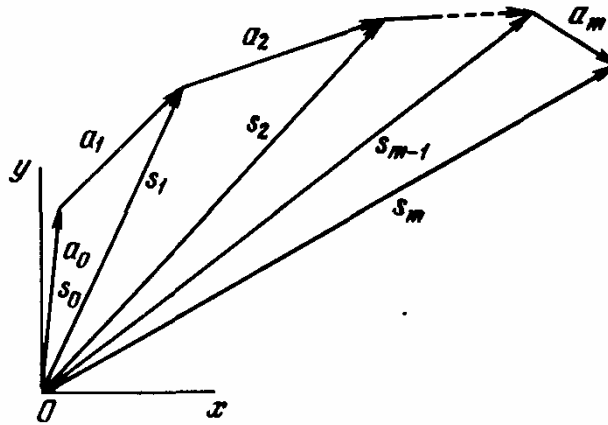


Рис. 4.8. Представление характеристического многоугольника с помощью векторов s .

С учетом соотношений (4.14) и (4.26) можно записать

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i [f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u)].$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u) &= \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} \binom{j-1}{i-1} u^j - \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j+1} \binom{m}{j} \binom{j-1}{i} u^j = \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} u^j \left[(-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} - (-1)^{i+j+1} \binom{j-1}{i} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} u^j \left[\binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} \right], \end{aligned}$$

поскольку $(-1)^{i+j} = -(-1)^{i+j+1}$. Выражение в квадратных скобках приводится к виду

$$\begin{aligned} \binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} + \frac{(j-1)!}{i!(j-i-1)!} = \\ &= \frac{(j-1)!}{(j-1)!(j-i-1)!} \left(\frac{1}{j-i} + \frac{1}{i} \right), \end{aligned}$$

так как $i! = i(i-1)!$ и $(j-i)! = (j-i)(j-i-1)!$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i-1)!} \frac{j}{i(j-i)!} = \\ &= \frac{j(j-1)!}{i(i-1)!(j-i)(j-i-1)!} = \frac{j!}{i!(j-i)!} = \binom{j}{i}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

С учетом этого соотношения находим

$$\begin{aligned} f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u) &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} \binom{j}{i} u^j = \\ &= \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Выражение (4.29) определяет полиномы Бернштейна, которые обычно обозначаются через $B_{i, m}(u)$.

Таким образом, выражение для точки $P(u)$ можно представить в виде

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i B_{i, m}(u). \quad (4.30)$$

Например, для полиномов Бернштейна при $m = 5$ имеем

$$\begin{aligned} B_{0,5} &= (1-u)^5 &= -u^5 + 5u^4 - 10u^3 + 10u^2 - 5u + 1, \\ B_{1,5} &= 5u(1-u)^4 &= 5u^5 - 20u^4 + 30u^3 - 20u^2 + 5u, \\ B_{2,5} &= 10u^2(1-u)^3 &= -10u^5 + 30u^4 - 30u^3 + 10u^2, \\ B_{3,5} &= 10u^3(1-u)^2 &= 10u^5 - 20u^4 + 10u^3, \\ B_{4,5} &= 5u^4(1-u) &= -5u^5 + 5u^4, \\ B_{5,5} &= u^5 &= u^5. \end{aligned}$$

Этот пример поясняет правило, по которому происходит определение коэффициентов, а на рис. 4.9 представлены графики приведенных шести функций.

Свойства функций Бернштейна. Из многочисленных свойств функций Бернштейна выделим следующие:

1. $B_{0,m}(0) = 1$; $B_{i,m}(0) = 0$, $i \in [1, m]$.
2. $B_{i,m}(1) = 0$, $i \in [0, m-1]$; $B_{m,m}(1) = 1$.
3. Кривая i -го порядка в точках $P(0)$ и $P(1)$ имеет с осью абсцисс контакты соответственно i -го и $(m-i)$ -го порядков.

$$4. \sum_{i=0}^m B_{i, m}(u) = 1.$$

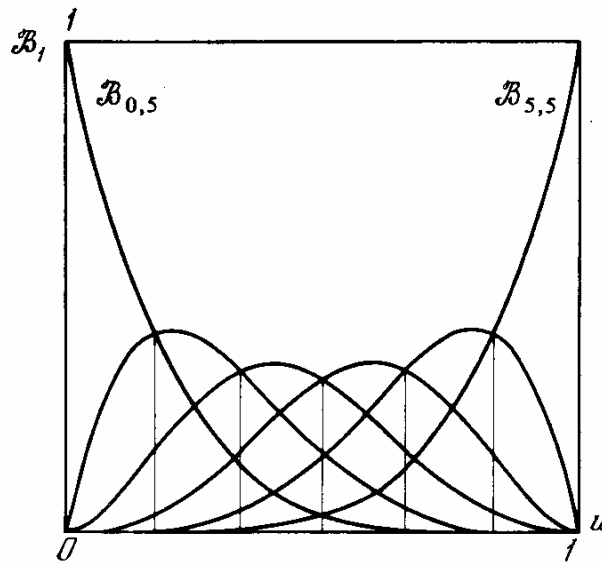


Рис. 4.9. Семейство функций Бернштейна.

Таким образом, функции \mathcal{B} удовлетворяют одному из условий, иногда называемых условиями Коши, и форма кривой $P(u)$ не меняется, если вершины характеристического многоугольника, взятые как единое целое, подвергаются преобразованиям переноса и поворота. Действительно, рассмотрим кривую C , заданную вершинами характеристического многоугольника, точки которой определяются выражением

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (4.31)$$

Если каждая вершина смещается на вектор Δ , то новый характеристический многоугольник определяет кривую C' , текущая точка которой записывается следующим образом:

$$P'(u) = \sum_{i=0}^m (s_i + \Delta) \mathcal{B}_{i,m}(u) = P(u) + \Delta \sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (4.32)$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u) \equiv 1$, имеем

$$P'(u) = P(u) + \Delta. \quad (4.33)$$

$$5. \int_0^1 \mathcal{B}_{i,m}(u) du = \frac{1}{m+1}.$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=0}^m \int_0^1 \mathcal{B}_{i,m}(u) du \equiv 1.$$

6. За исключением $\mathcal{B}_{0,m}$ и $\mathcal{B}_{m,m}$, функции \mathcal{B} имеют максимум в точке $u = i/m$.

Значение функции в этой точке равно

$$\mathcal{B}_{i,m} \left(\frac{i}{m} \right) = \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i^i (m-i)^{m-i}}{m^m}. \quad (4.34)$$

Некоторые из этих значений приведены в табл. 4.1.

7. Для получения графиков функций \mathcal{B} можно использовать их характеристические многоугольники, построение которых можно провести по следующему методу.

- Возьмем квадрат $ABCD$ (рис. 4.10) и разделим его стороны на m равных отрезков.

- Графику функции $\mathcal{B}_{i,m}$ соответствует характеристический многоугольник $AM \dots SB$, стороны которого представляют собой: $(i-1)$ первых отрезков, лежащих на стороне AB , в данном случае AM , MN и NQ ; отрезок, соединяющий конец i -го отрезка на стороне AB с началом $(i+1)$ -го отрезка на стороне DC ; отрезок, соединяющий начало $(i+1)$ -го отрезка на стороне CD с началом $(i+2)$ -го отрезка на стороне AB ; $(m-i-1)$ последних отрезков, лежащих на стороне AB . Таким образом, для случая, изображенного на рис. 4.10, характеристическим многоугольником является $AMNQRSB$.

Таблица 4.1. Максимальные значения некоторых функций Бернштейна

$m \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	0,50	1								
3	1	0,44	0,44	1							
4	1	0,42	0,37	0,42	1						
5	1	0,41	0,34	0,34	0,41	1					
6	1	0,40	0,33	0,31	0,33	0,40	1				
7	1	0,39	0,32	0,29	0,29	0,32	0,39	1			
8	1	0,39	0,31	0,28	0,27	0,28	0,31	0,39	1		
9	1	0,38	0,31	0,27	0,26	0,26	0,27	0,31	0,38	1	
10	1	0,38	0,30	0,27	0,25	0,25	0,25	0,27	0,30	0,38	1

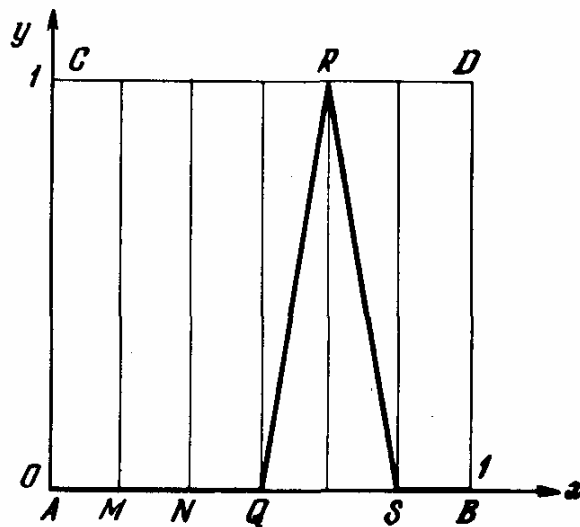


Рис. 4.10. Характеристический многоугольник для построения функций Бернштейна.

8. Функции $B_{i,m}$ и $B_{i+1,m}$ пересекаются в точках с абсциссами $u = (i + 1)/(m + 1)$.

9. Функции B от аргументов u и $(1 - u)$ образуют симметричные семейства. На рис. 4.9 ось симметрии проходит через точку с абсциссой $u = 0,5$.

10. Если две кривые имеют один и тот же характеристический многоугольник, но соответствующие вершины s_0, \dots, s_m и $s'_0 \dots s'_m$ связаны соотношением $s_i = s'_{m-i}$, то такие кривые геометрически совпадают, причем точка $P(u)$ совпадает с точкой $P'(1 - u)$. Действительно, пусть

$$\begin{aligned}
 P(u) &= \sum_{i=0}^m s_i B_{i,m}(u) \\
 \text{и } P'(v) &= \sum_{i=0}^m s_{m-i} B_{i,m}(v) = \sum_{i=0}^m s_i B_{m-i,m}(v) = \\
 &= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} v^{m-i} (1-v)^{m-(m-i)} = \\
 &= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} (1-v)^i v^{m-i}.
 \end{aligned}$$

Положим $v = 1 - u$, тогда

$$\begin{aligned} P'(1-u) &= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} (1-u)^{m-i} [1 - (1-u)]^i = \\ &= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} u^i (1-u)^{m-i}, \end{aligned}$$

и, так как

$$\binom{m}{i} = \binom{m}{m-i},$$

получаем $P(u) = P'(1-u)$.

$$11. \quad \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} = m[\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)]. \quad (4.35)$$

Запишем функцию $\mathcal{B}_{i,m}(u)$ в виде

$$\mathcal{B}_{i,m}(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} u^i (1-u)^{m-i}$$

и найдем ее производную

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} &= \frac{m!}{i!(m-i)!} [i u^{i-1} (1-u)^{m-i} (m-i) u^i (1-u)^{m-i-1}] = \\ &= \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!} u^{i-1} (1-u)^{m-i} - \frac{m!}{i!(m-i-1)!} u^i (1-u)^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) &= \binom{m-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{m-i} = \\ &= \frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i)!} u^{i-1} (1-u)^{m-i} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) &= \binom{m-1}{i} u^i (1-u)^{m-i-1} = \\ &= \frac{(m-1)!}{i!(m-i-1)!} u^i (1-u)^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\mathcal{B}_{i, m}(u)}{du} = m[\mathcal{B}_{i-1, m-1}(u) - \mathcal{B}_{i, m-1}(u)].$$

Это свойство используется в разд. 4.1.3.

Полиномиальные функции

Зная векторы, определяющие вершины характеристического многоугольника, легко получить коэффициенты полиномиальной параметрической функции, задающей ту же кривую

$$P(u) = \sum_{i=0}^m b_i u^i, \quad (4.36)$$

которая более приспособлена к вычислениям на ЭВМ и использование которой приводит к упрощению некоторых расчетов.

Определим коэффициенты, например, для $m = 4$:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= 4a_1 \\ b_2 &= -6a_1 + 6a_2, \\ b_3 &= 4a_1 - 8a_2 + 4a_3, \\ b_4 &= -a_1 + 3a_2 - 3a_3 + a_4. \end{aligned}$$

Формулу для определения векторов \mathbf{b} можно записать в матричном виде

$$[\mathbf{M}_{a \rightarrow b}] [\mathbf{a}_i] = [\mathbf{b}_i].$$

Матрица перехода имеет размер $(m+1) \times (m+1)$ и задается следующей формулой:

$$[\mathbf{M}_{a \rightarrow b}] = \left[(-1)^{l+c} \binom{l-2}{l-c} \right] \binom{m}{l}. \quad (4.37)$$

Индексы l и c обозначают соответственно строку и столбец.

Зная векторы \mathbf{b} , с помощью обратной матрицы [4.37] можно получить векторы \mathbf{a} . На практике вместо векторов \mathbf{a} часто используют векторы \mathbf{s} . Для этого случая

$$[\mathbf{M}_{s \rightarrow b}] = \left[(-1)^{l+c} \frac{m!}{(c-l)!(m-c)!l!} \right]. \quad (4.38)$$

Обратная матрица

$$[\mathbf{M}_{b \rightarrow s}] = [\mathbf{M}_{s \rightarrow b}]^{-1} = \left[\frac{c!(m-l)!}{(c-l)!m!} \right]. \quad (4.39)$$

4.1.3. Годографы

Первый годограф¹⁾

Рассмотрим кривую G (рис. 4.11) и ее характеристический многоугольник с вершинами s_i . Из произвольной точки O' построим векторы, совпадающие по величине и направлению с векторами a_i . На концах этих векторов построим характеристический многоугольник, который будет определять кривую H степени $(m - 1)$.

С учетом того что $s'_i = s_{i+1} - s_i$ для точки $Q(u)$ кривой, находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} Q(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} (s_{i+1} - s_i) \mathcal{B}_{i,m-1}(u) = \\ &= \sum_{i=0}^m s_i [\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)]. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Запишем отдельно выражения в квадратных скобках, используя свойство 11 из разд. 4.1.2:

$$\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du},$$

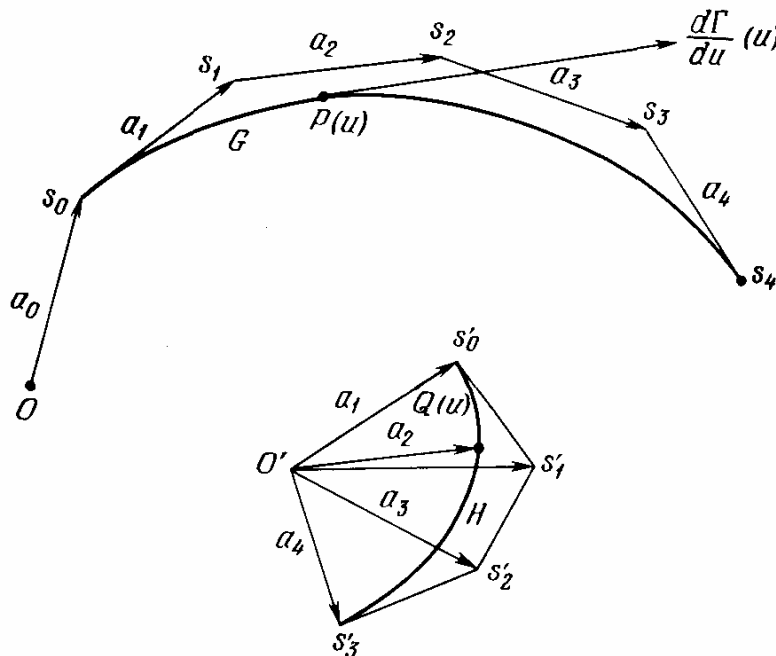


Рис. 4.11. Кривая и ее годограф.

¹⁾ Первым годографом кривой $P(u)$ называется кривая $(dP/du)(u)$, где вектор dP/du откладывается от некоторой фиксированной точки. — Прим. ред.

и получим

$$Q(u) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m s_i \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} = \frac{1}{m} \frac{dP(u)}{du}. \quad (4.41)$$

Следовательно, кривая H является годографом кривой G с точностью до коэффициента $1/m$.

Последовательные годографы.

Для кривой H (рис. 4.11) так же можно построить кривую L , которая будет представлять собой годограф H в масштабе $1/(m-1)$ и, следовательно, второй годограф кривой G в масштабе $1/[m(m-1)]$. Таким образом, для точки $R(u)$ кривой L справедливо выражение

$$\frac{d^2P(u)}{du^2} = m(m-1)R(u). \quad (4.42)$$

Подобную процедуру можно продолжать до тех пор, пока очередной годограф не выродится в точку, совпадающую с начальной точкой построения¹⁾.

Свойства годографов

1. Годографу n -го порядка кривой степени m соответствует характеристический многоугольник с $m-n$ сторонами.

2. Годографы порядков $m-2$, $m-1$ и m представляют собой соответственно дугу параболы, отрезок прямой и точку, отличную от начальной.

3. Если кривой степени $m-n$ соответствует характеристический многоугольник, состоящий из m векторов, то ее годограф $(m-n)$ -го порядка представляет собой набор из n совпадающих точек. С помощью этого свойства можно убедиться в возможности уменьшения степени кривой.

4. Обозначим через g и h проекции на плоскость кривой G и ее первого годографа H соответственно. Тогда

- Если прямая $OQ(u)$ является касательной к кривой h , то точка $P(u)$ на кривой g , соответствующая точке касания, является точкой перегиба (рис. 4.12). Более того, касательные к кривым g и h в точках $P(u)$ и $Q(u)$, параллельны друг другу.

- Если прямая $OQ(u)$ является касательной к кривой h и $Q(u)$ является точкой перегиба, то кривизна в точке $P(u)$ кривой g равна нулю, но точка $P(u)$ не является точкой перегиба. Касательные в точках $P(u)$ и $Q(u)$ параллельны друг другу, а прямая $OR(u)$ является касательной к проекции второ-

¹⁾ Свойство вырождения, естественно, имеет место только для полиномиальных зависимостей. Свойства, описываемые в следующем разделе, также относятся только к полиномиальным кривым. — *Прим. ред.*

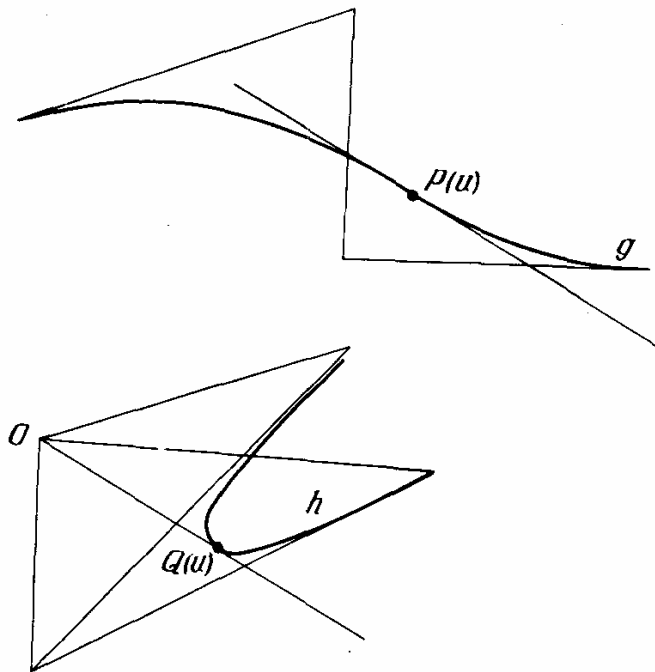


Рис. 4.12. Кривая с точкой перегиба и ее годограф.

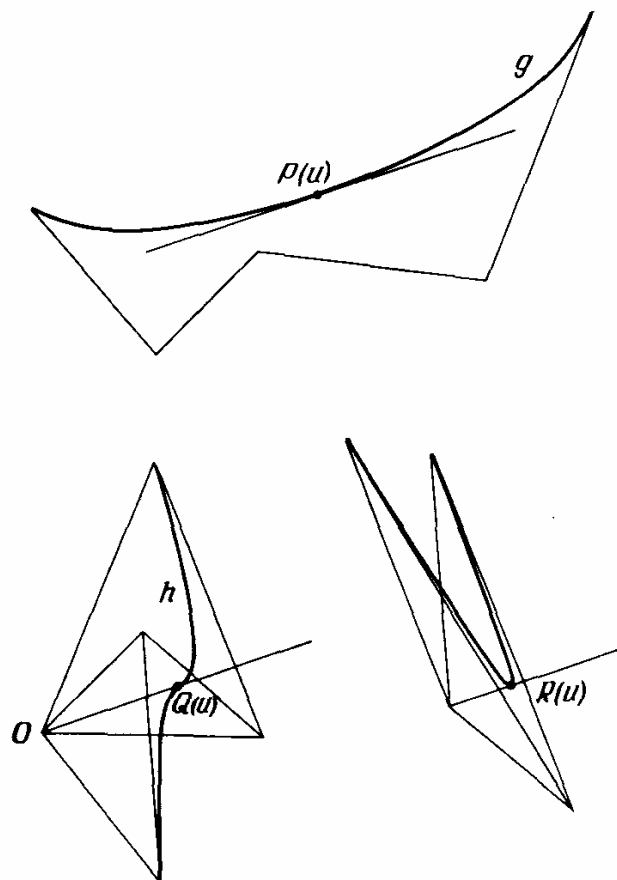


Рис. 4.13. Кривая с точкой нулевой кривизны и ее годограф.

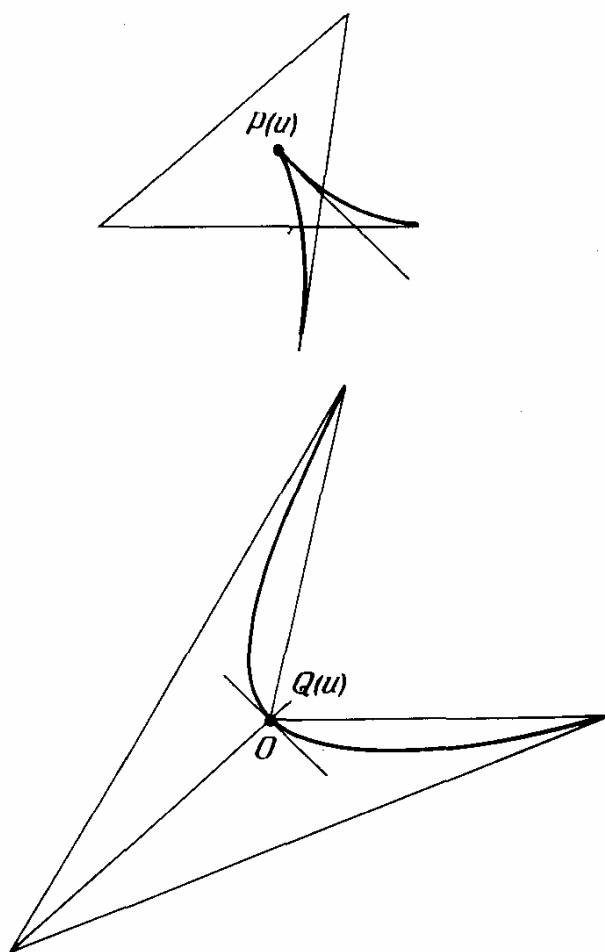


Рис. 4.14. Кривая с точкой излома и ее годограф.

го годографа (рис. 4.13). Из нулевой кривизны в точке $P(u)$ следует параллельность первой и второй производной в этой точке.

- Если точка $Q(u)$ совпадает с точкой O , то точка $P(u)$ является точкой излома (рис. 4.14). Касательные в точках $P(u)$ и $Q(u)$ параллельны друг другу.

- Если точка $Q(u)$ совпадает с точкой O и, кроме того, является точкой перегиба, то точка $P(u)$ является точкой излома второго рода.

5. Если G является кубической кривой, то H и h представляют собой параболы:

- Если точка O лежит вне кривой h , то кривая g имеет две точки перегиба, расположенные не обязательно между точками $P(0)$ и $P(1)$.

- Если точка O лежит внутри кривой h , то кривая g не имеет точек перегиба.

- При u , стремящемся к бесконечности, касательные к кривой g стремятся стать параллельными к оси симметрии h .

4.1.4. Построение характеристического многоугольника

Рассмотрим некоторые методы построения характеристических многоугольников.

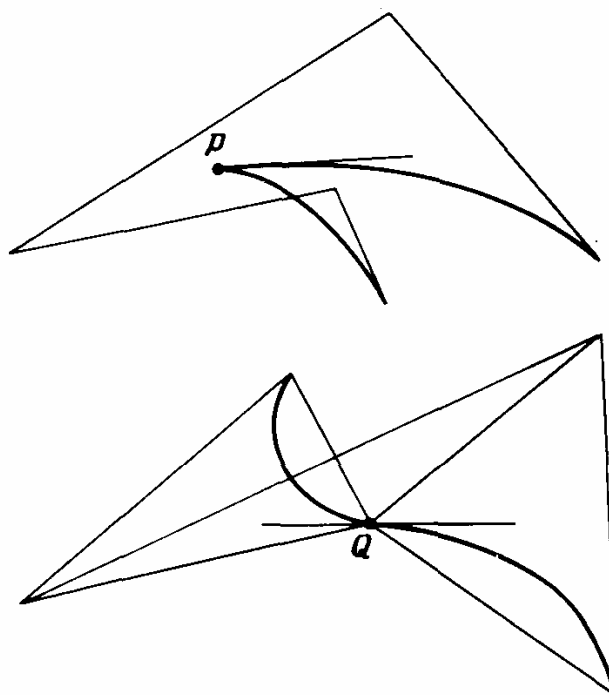


Рис. 4.15. Кривая с точкой излома второго рода и ее годограф.

Предварительные условия.

Одним из требований при этом является прохождение дуги кривой через определенное число точек или по крайней мере с небольшим отклонением от них. Для кривых, составленных из отдельных дуг, требуется непрерывность наклона в точке примыкания, а иногда и непрерывность кривизны, в частности при рассмотрении аэродинамических явлений.

Алгоритмы построения

Алгоритм — это автоматический метод получения результата. Однако практика использования САПР показывает, что большую роль играют опыт и воображение.

Итак, проблема заключается в нахождении кривой степени m , проходящей через определенные точки с заданным отклонением.

Выбор способа параметризации. Сначала поставим в соответствие каждой точке значения параметра u .

Упрощенный метод. Этот метод состоит в выборе значений параметров в виде арифметической прогрессии с разностью $1/m$, заключенных между 0 и 1. Он применяется в тех случаях, когда кривизна меняется незначительно и точки расположены примерно на равных расстояниях.

Метод ломаной линии. Точки соединяются ломаной линией (рис. 4.16), длина которой

$$L = \sum_{i=1}^m |a_i|, \quad (4.43)$$

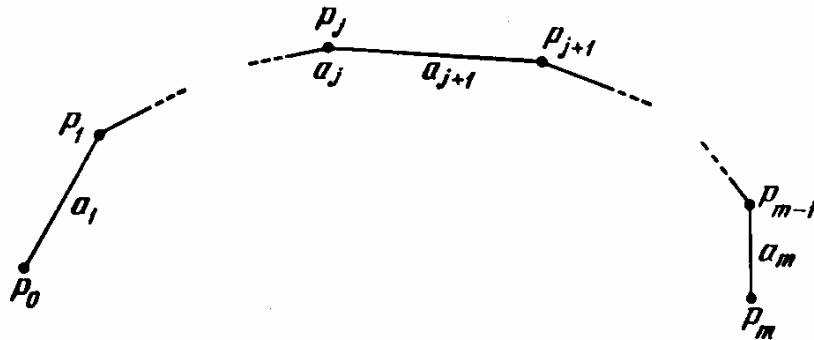


Рис. 4.16. Построение характеристического многоугольника по упрощенному методу.

а значение параметра в точке P_j определяется выражением

$$u_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^j |a_i| \right)}{L}. \quad (4.44)$$

Метод дает удовлетворительные результаты при незначительно меняющейся кривизне для любого расположения точек.

Метод, использующий дуги кривых. Отрезки ломаной линии могут быть заменены дугами окружности или параболы, но в большинстве случаев результаты почти не отличаются от полученных с помощью предыдущего метода.

Проективный метод. Сначала строится кривая, характеристический многоугольник которой представляет собой ломанную линию. Вершины многоугольника проектируются на кривую, значения параметров в точках проекций принимаются такими же, как в исходных точках (рис. 4.17).

Построение вершин. Простая кривая. Общий случай. Выбрав значения параметров в каждой точке, можно составить $(n + 1)$ уравнений вида

$$\mathbf{P}(u_j) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u_j^i \quad (4.45)$$

и получить систему линейных уравнений относительно неизвестных \mathbf{b}_i .

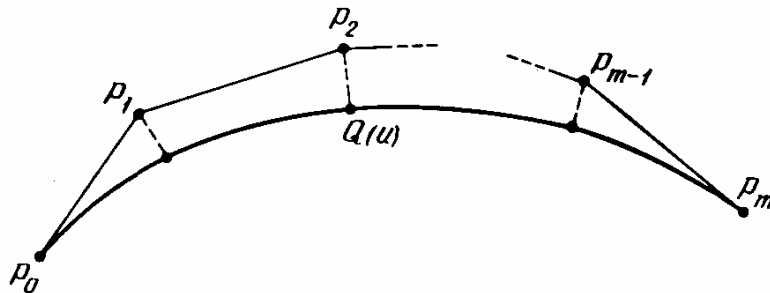


Рис. 4.17. Построение характеристического многоугольника по проективному методу.

Если величины n и m имеют одинаковое значение, решение системы находится сразу. Если $n < m$, то коэффициентам b с индексами от $n + 1$ до m присваиваются нулевые значения и решение сводится к предыдущему случаю. Если $n > m$, точного решения не существует, но можно применить метод наименьших квадратов. При этом каждой точке ставится в соответствие вес в зависимости от ее расстояния до кривой.

Помимо точек, через которые должна проходить кривая, можно задать также наклоны касательных в этих точках. Можно учесть также и кривизну, но слишком возрастающая при этом трудоемкость вычислений заставляет в некоторых случаях отдавать предпочтение добавлению лишних точек [27, 70—72, 120]. Подобные задачи часто возникают в авиационной промышленности, и уже разработаны методы, позволяющие учитывать в решении непрерывность до 4-го порядка.

Наконец, если n значительно превышает m , а допустимые отклонения являются небольшими, при решении задачи возникают большие трудности. В этом случае приходится искомую кривую составлять из нескольких отрезков, обеспечивая между ними непрерывность наклона и кривизны.

Частные случаи: окружности, эллипсы и параболы. Обычно предполагается, что в реальных объектах соединительные дуги и закругления имеют постоянную кривизну. Для того чтобы избежать включения в систему UNISURF специальных программ для описания таких кривых, решение искалось в приближенном виде. При этом часто обращаются к кубическим кривым, но для получения высокой точности необходимо использовать кривые более высоких степеней.

Для правильного определения характеристического многоугольника искомой кривой необходимо учитывать следующие условия:

1. Кривая должна проходить через среднюю и крайние точки дуги окружности (рис. 4.18).
2. Секторы, соответствующие дуге окружности и отрезку кривой, должны иметь равные площади (рис. 4.19).

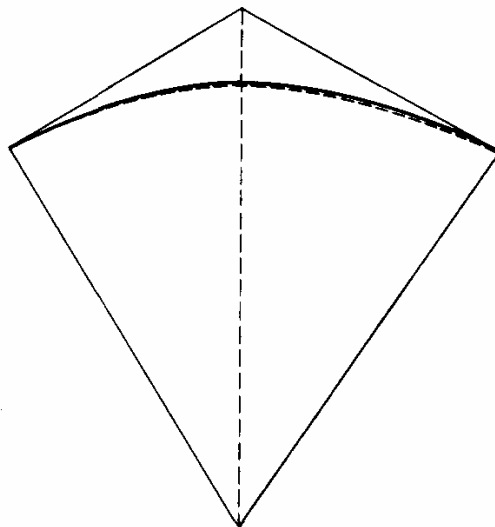


Рис. 4.18. Метод центральной точки в приближении дуги окружности.

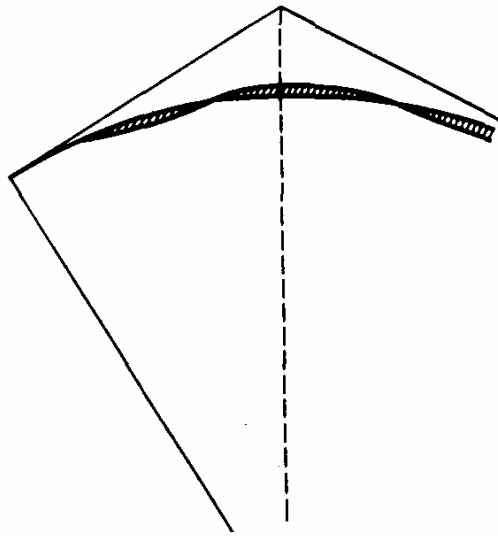


Рис. 4.19. Метод площадей в приближении дуги окружности.

3. Различие между радиусами окружности и кривой должно быть минимальным (рис. 4.20).

Практически все три условия дают очень близкие результаты и обычно выбирают первое условие как самое простое.

Из рис. 4.21 при предположении $AB = 1$ найдем

$$BC = \cos \alpha, \quad AC = \sin \alpha,$$

$$CE = 1 - \sin \alpha, \quad CJ = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Используя свойства функций f или \mathcal{B} , имеем для кубических кривых $(CE/CG) = 3/4$, или $CG = 4/3 (1 - \sin \alpha)$. Прямая FGH параллельна BD , а $BFHD$ является характеристическим многоугольником для дуги BED .

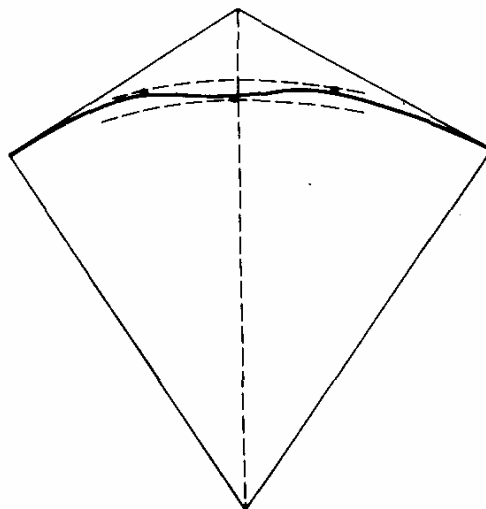


Рис. 4.20. Метод минимизации радиальных отклонений в приближении дуги окружности.

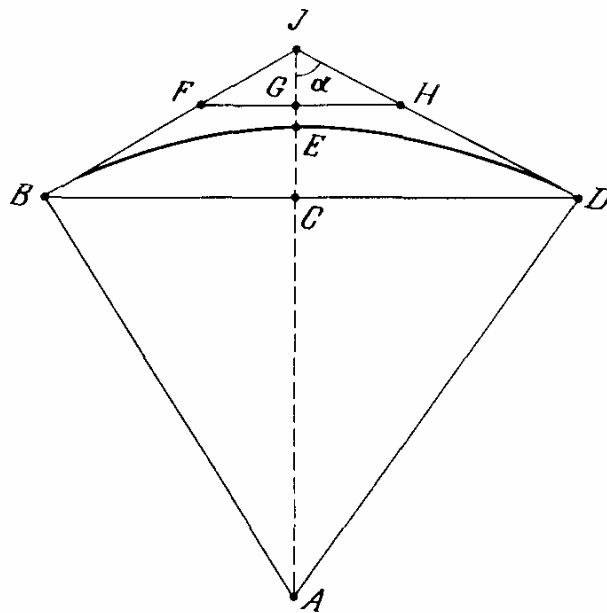


Рис. 4.21. Графическое построение для метода центральной точки.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{BF}{BJ} = \frac{CG}{CJ} = \frac{4(1 - \sin \alpha)\sin \alpha}{3 \cos^2 \alpha} = \frac{4 \sin \alpha}{3(1 + \sin \alpha)}. \quad (4.46)$$

Номограмма, приведенная на рис. 4.22, дает оптимальное значение величины λ как функции угла α :

$$\lambda = \Phi(\alpha).$$

Приведена также зависимость от того же аргумента величины ε — относительного значения максимального расстояния между дугой окружности и кубической кривой. В частности, для дуги окружности, вписанной в прямой угол, т. е. когда угол $\alpha = 45^\circ$, имеем $\lambda = 0,552$ и $\varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-4}$. Очевидно, что многоугольник, состоящий из двух векторов, соответствует параболе.

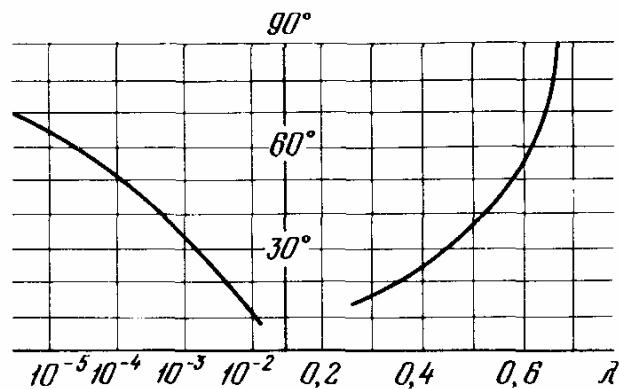


Рис. 4.22. Номограмма для рис. 4.21.

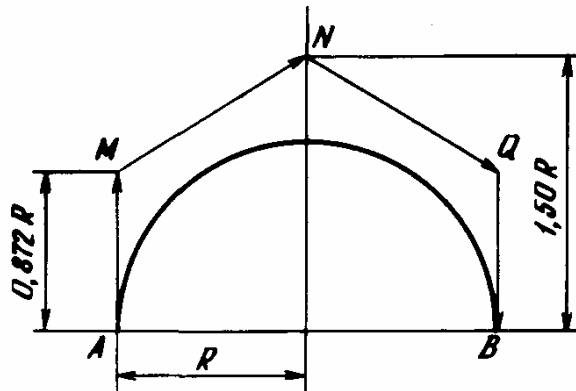


Рис. 4.23. Аппроксимация полуокружности при невысокой точности.

Если при изготовлении детали не требуется высокая точность, то для полуокружности можно взять многоугольник, представленный на рис. 4.23 или 4.24, а для полной окружности — на рис. 4.25. Аналогичные подходы можно применить для построения характеристических сеток сферы (рис. 4.26) и тора (рис. 4.27) с точностью $\sim 10^{-4}$.

Дуги кривых, заданные с помощью наклона и кривизны в конечных точках. Рассмотрим дугу плоской кривой (рис. 4.28) и обозначим через AT и BT касательные к кривой в крайних точках дуги. Найдем точки M и N из условия, что радиусы кривизны в крайних точках дуги должны быть равны ρ_A и ρ_B .

Введем обозначения для длин отрезков $AT = l_A$ и $TB = l_B$ и построим параллелограмм $MTNS$.

Легко убедиться, что

$$\rho_A = \frac{3}{2} \frac{|AM|^2}{|MS \sin \beta|}, \quad \rho_B = \frac{3}{2} \frac{|BN|^2}{|NS \sin \beta|}.$$

Отсюда получаем

$$MS = \frac{3|AM|^2}{2\rho_A \sin \beta}, \quad NS = \frac{3|BN|^2}{2\rho_B \sin \beta}. \quad (4.47)$$

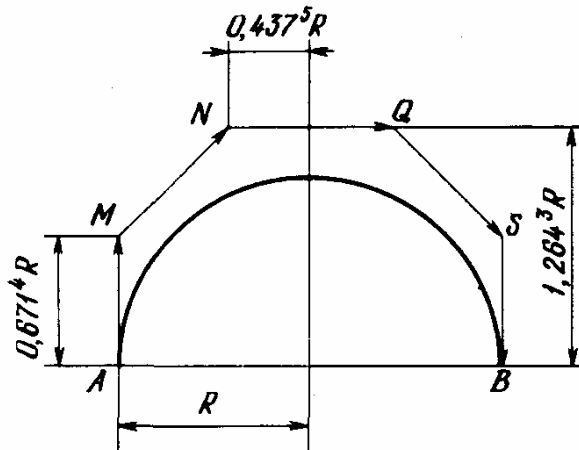


Рис. 4.24. Аппроксимация полуокружности с более высокой точностью.

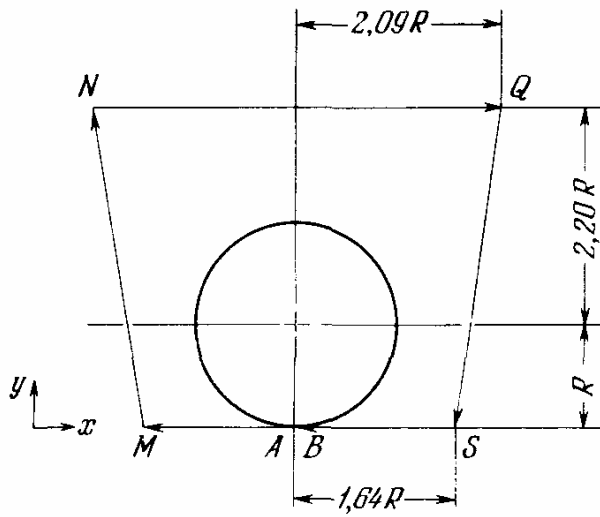


Рис. 4.25. Аппроксимация окружности с невысокой точностью.

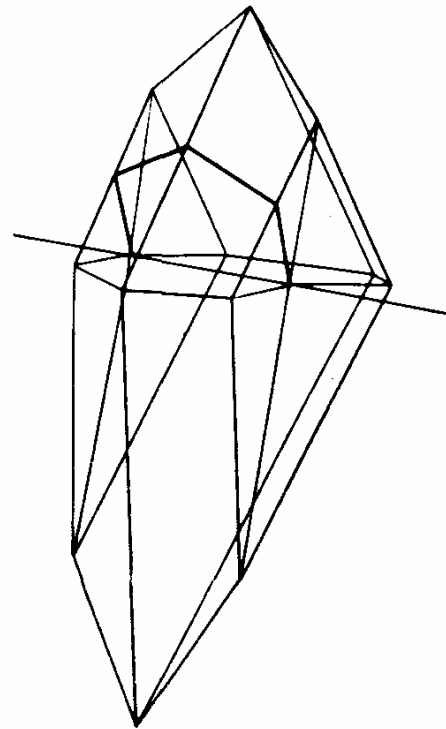


Рис. 4.26. Характеристическая сетка для аппроксимации сферы.

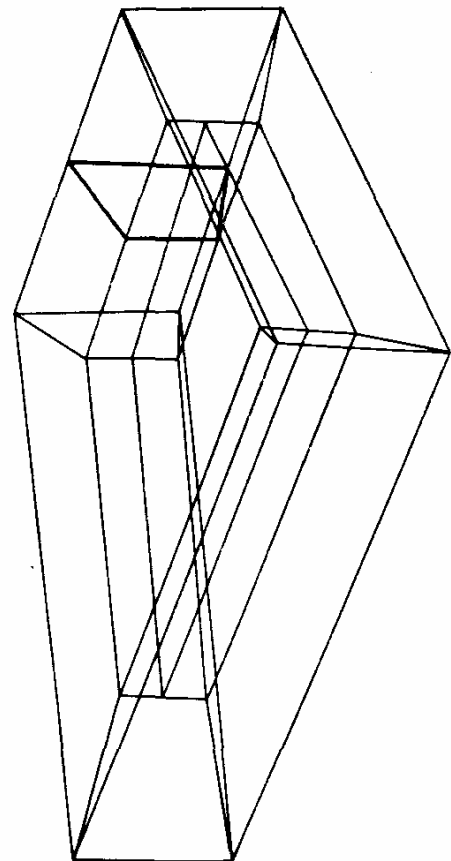


Рис. 4.27. Характеристическая сетка для аппроксимации тора.

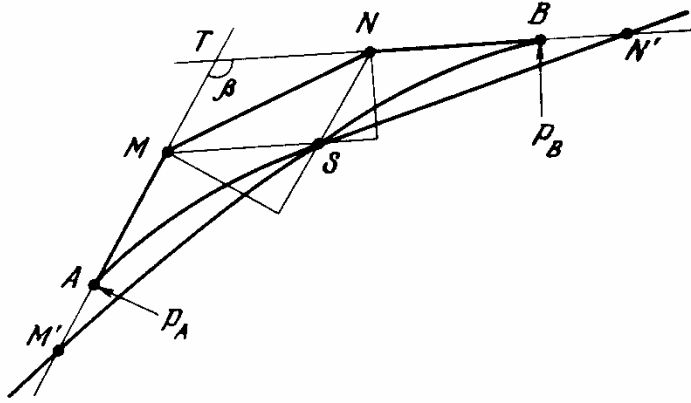


Рис. 4.28. Определение дуги кубической кривой по положению центров кривизны в граничных точках.

Точка S является точкой пересечения двух парабол, определяемых соотношениями (4.47), которые пересекают прямые TA и TB в точках N' и M' . При этом справедливы следующие соотношения:

$$\rho_A = \frac{3}{2} \frac{|TA|^2}{|TN'| \sin \beta},$$

$$\rho_B = \frac{3}{2} \frac{|TB|^2}{|TM'| \sin \beta},$$

$$\frac{TN'}{TB} = \frac{3}{2} \frac{|TA|^2}{\rho_A TB \sin \beta} = \frac{3}{2} \frac{l_A^2}{\rho_A l_B \sin \beta},$$

$$\frac{TM'}{TA} = \frac{3}{2} \frac{|TB|^2}{\rho_B TA \sin \beta} = \frac{3}{2} \frac{l_B^2}{\rho_B l_A \sin \beta}.$$

Теперь спроектируем изображение, приведенное на рис. 4.28, так, чтобы tab стал прямоугольным равнобедренным треугольником (рис. 4.29). Тогда параболы asn' и bsm' в системах координат y_1ax_1 и y_2ax_2 задаются следую-

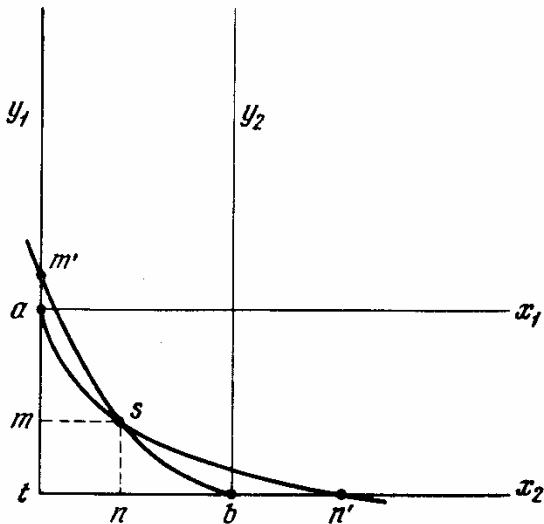


Рис. 4.29. Преобразование рис. 4.28.

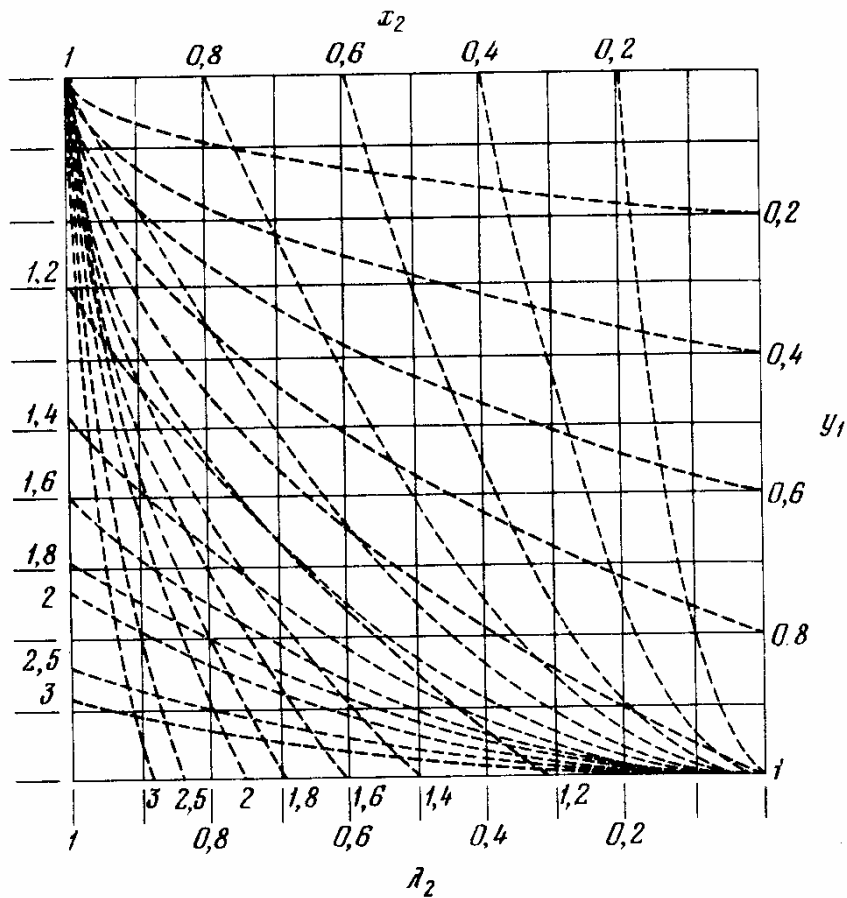


Рис. 4.30. Номограмма, соответствующая рис. 4.28.

щими выражениями:

$$x_1 = \frac{3}{2} \frac{l_A^2}{\rho_A l_B \sin \beta} y_1^2, \quad y_2 = \frac{3}{2} \frac{l_B^2}{\rho_B l_A \sin \beta} x_2^2. \quad (4.48)$$

На номограмме (рис. 4.30) параболы определяются абсциссами своих точек пересечения с прямыми $x_1 = 1$ и $y_2 = 1$, т. е.

$$y_1(1) = \pm \frac{2}{3} \frac{\rho_A l_B \sin \beta}{l_A^2}, \quad (4.49)$$

$$x_2(1) = \pm \frac{2}{3} \frac{\rho_B l_A \sin \beta}{l_B^2}. \quad (4.50)$$

По номограмме, приведенной на рис. 4.31, находятся значения $y_1(1)$ и $x_2(1)$, а с помощью номограмм рис. 4.29 и 4.30 — значения λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие соотношениям $AM = \lambda_1 AT$ и $BN = \lambda_2 BT$.

Рис. 4.29 соответствует случаю отсутствия точки перегиба на дуге AB , который встречается наиболее часто. В общем случае следует использовать номограмму, приведенную на рис. 4.32. Выбор правильной дуги параболы зависит от ориентации первой производной и направлений выпуклости кривой в крайних точках.

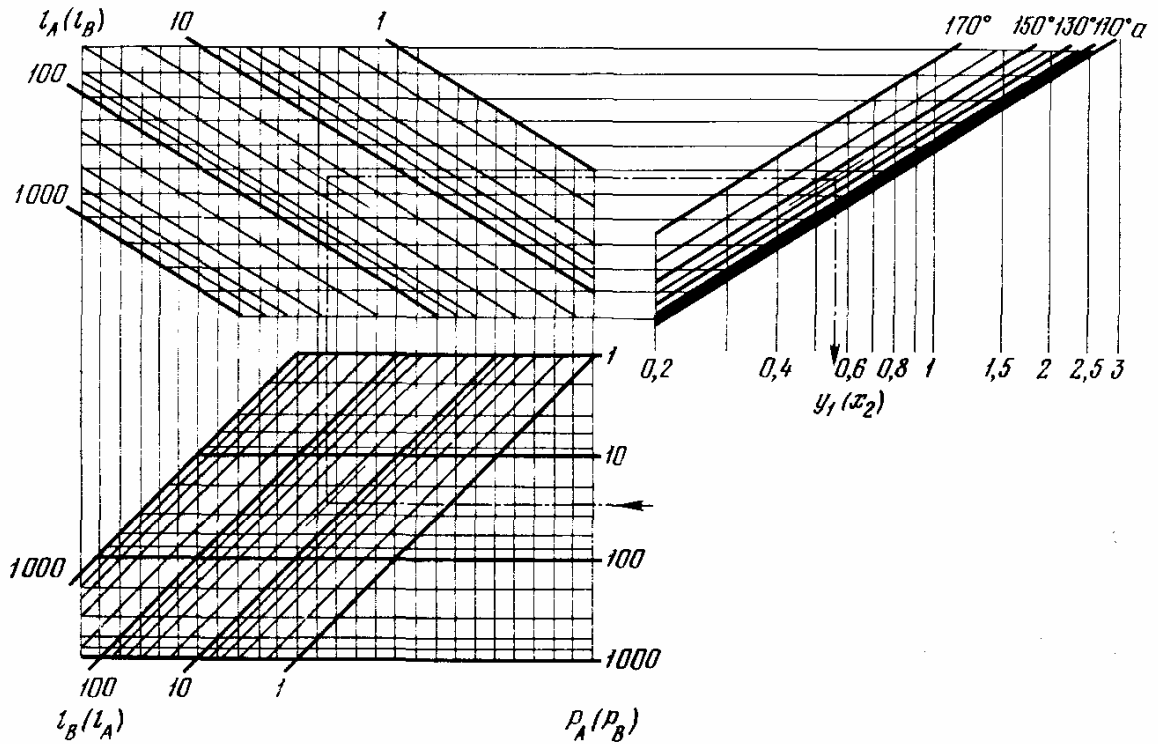


Рис. 4.31. Номограмма для построения характеристического многоугольника кривой, приведенной на рис. 4.28.

Кривые, составленные из нескольких дуг. Сшивка с сохранением непрерывности касательных. Рассмотрим точки P , через которые требуется провести кривую, составленную из сшитых между собой дуг (рис. 4.33). На точках P_{i-2}, \dots, P_{i+2} определим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i-1} &= \mathbf{P}_{i-1} - \mathbf{P}_{i-2}, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_{i+2} &= \mathbf{P}_{i+2} - \mathbf{P}_{i+1}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

При этом величина параметра u_m , соответствующая точкам P_m , выражается в следующем виде:

$$u_m = \frac{\sum_{j=i-1}^m |\mathbf{a}_j|}{\sum_{j=i-2}^m |\mathbf{a}_j|} \tag{4.52}$$

Отсюда следует, что

$$u_{i-2} = 0 \text{ и } u_{i+2} = 1. \tag{4.53}$$

Запишем уравнение кривой, проходящей через точки P_{i-2}, \dots, P_{i+2} , в виде

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_k u^k \quad u \in [0, 1], \tag{4.54}$$

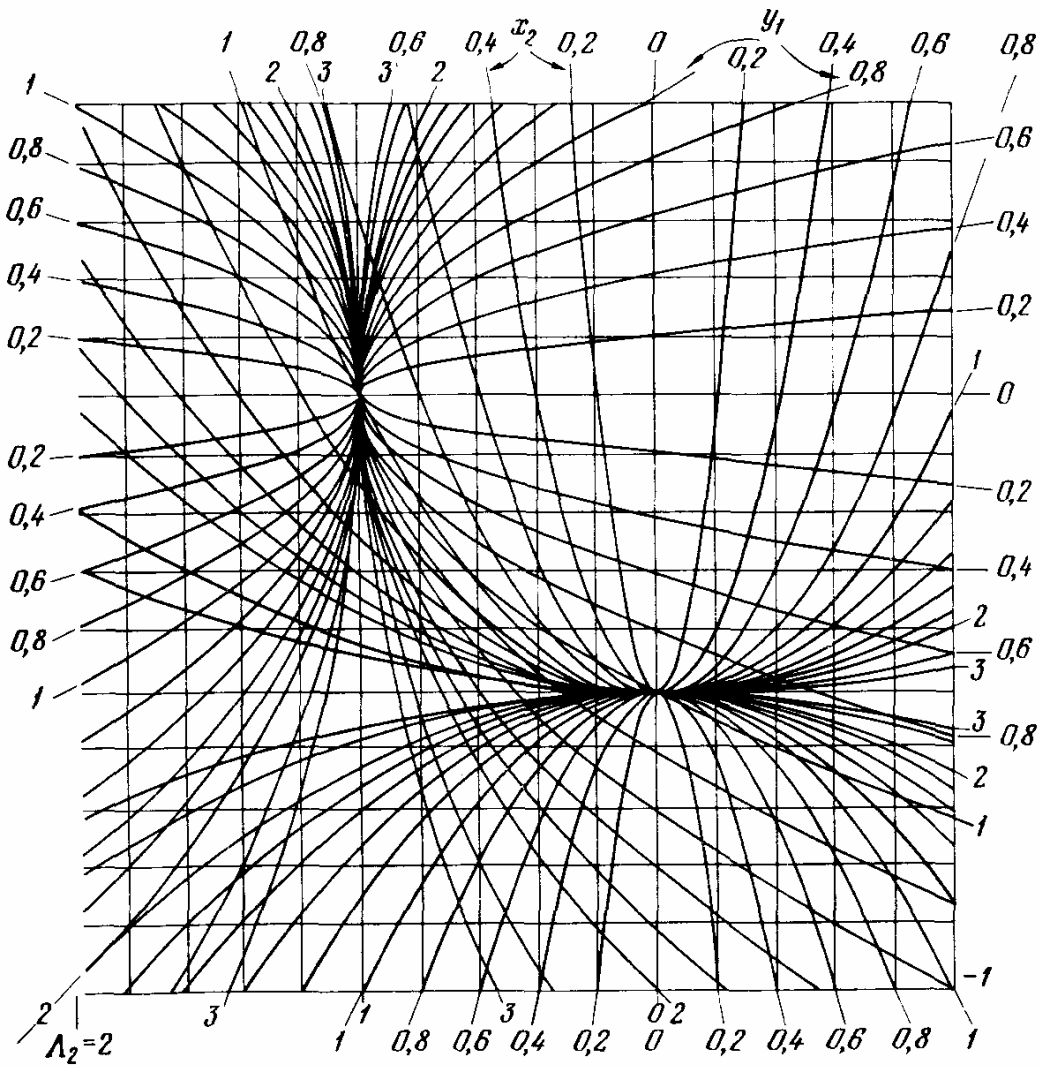


Рис. 4.32. Обобщение номограммы рис. 4.30.

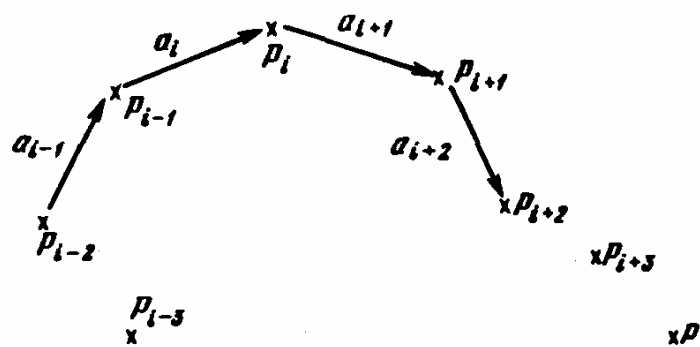


Рис. 4.33. Точки составной кривой.

где коэффициенты \mathbf{b}_k являются корнями системы линейных уравнений

$$P_m = \sum_{k=0}^4 b_k u_m^k.$$

Из выражения (4.54) следует

$$\frac{dP}{du} = \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k u^{k-1}. \quad (4.55)$$

Для отрезка этой кривой, заключенного между точками P_i и P_{i+1} , положение текущей точки $Q(v)$ задается в виде

$$Q(v) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_k [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^k \quad v \in [0, 1]. \quad (4.56)$$

Из выражений (4.54)—(4.56) получаем

$$\frac{dQ}{dv} = (u_{i+1} - u_i) \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^{k-1}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} Q(0) &= P_i = P(u_i), \\ \frac{dQ(0)}{dv} &= (u_{i+1} - u_i) \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k u_i^{k-1} = (u_{i+1} - u_i) \frac{dP(u_i)}{du}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Для текущей точки $R(t)$ отрезка этой же кривой, заключенного между точками P_{i-1} и P_i , имеем

$$R(1) = P(u_i) = P_i$$

и

$$\frac{dR}{dt} = (u_i - u_{i-1}) \frac{dP(u_i)}{du}. \quad (4.58)$$

Таким образом, векторы dQ/dv и dR/dt коллинеарны и отношение их модулей записывается в виде

$$\frac{dR(1)}{dt} = \frac{dQ(0)}{dv} \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \quad (4.59)$$

Рассмотрим теперь кривую, проходящую через точки P_{i-1}, \dots, P_{i+3} , и обозначим через $S(w)$ текущую точку отрезка, ограниченного точками P_i

и P_{i+1} . Этот отрезок не совпадает в точности с отрезком, текущая точка которого выше была обозначена через $Q(v)$, но, вообще говоря, отклонение между ними невелико. Точка $S(1)$ совпадает с точкой P_{i+1} , и для определения значения первой производной в этой точке можно воспользоваться выражением, аналогичным выражению (4.58).

Рассмотрим отрезок окончательной кривой, ограниченный точками P_i и P_{i+1} и обозначим через $T(z)$ его текущую точку. Тогда

$$\begin{aligned} T(0) &= P_i = Q(0), \\ T(1) &= P_{i+1} = S(1), \\ \frac{dT(0)}{dz} &= \frac{dQ(0)}{dv}, \\ \frac{dT(1)}{dz} &= \frac{dS(1)}{dw}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Таким образом, касательные в точках $T(0)$ и $T(1)$ соответственно коллинеарны касательным, определенным аналогичным образом для отрезка кривой, ограниченного точками P_{i-1} и P_i , а также P_{i+1} и P_{i+2} . В данном частном случае, рассмотренном в качестве примера, кривая соединяет пять точек (от P_0 до P_4 , или от P_{n-4} до P_n).

Для замкнутой кривой, точки P_0 и P_n которой совпадают, число условий в точке P_0 уменьшается за счет кривой, содержащей точки $P_{n-2}, \dots, P_0, \dots, P_2$.

Сшивки с сохранением непрерывности кривизны. Из выражения (4.56) следует

$$\frac{d^2 Q}{dv^2} = (u_{i+1} - u_i)^2 \sum_{k=2}^4 b_k k(k-1) [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^{k-2} \quad (4.61)$$

и

$$\frac{d^2 Q(0)}{dv^2} = (u_{i+1} - u_i)^2 \sum_{k=2}^4 b_k k(k-1) u_i^{k-2}, \quad (4.62)$$

а также

$$\frac{d^2 Q(1)}{dt^2} = (u_i - u_{i-1})^2 \sum_{k=2}^4 b_k (k-1) u_i^{k-2}. \quad (4.63)$$

Для кривой, соединяющей точки P_{i-2}, \dots, P_{i+2} , векторы $dQ(0)/dv$ и $d^2 Q(0)/dv^2$ определяют положение центра кривизны точки $Q(0)$, другими словами — точки P_c . Это же положение центра кривизны соответствует и точке $R(1)$.

Отрезок кривой, определяемый условиями, налагаемыми на величины

$$\begin{aligned} & Q(0), T(1), \\ & \frac{dQ(0)}{dv}, \frac{dT(1)}{dz}, \\ & \frac{d^2Q(0)}{dv^2}, \frac{d^2T(1)}{dz^2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

является кривой пятой степени и сшивается с примыкающими отрезками способом, аналогичным описанному выше.

Заметим, что кривая, ограниченная точками P_{i-2} и P_{i+2} , является кривой четвертой степени и обеспечивает необходимые условия в граничных точках отрезков $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} , для которых можно выбрать кривые третьей или пятой степеней. Не следует забывать, что геометрическая непрерывность, связанная с непрерывностью наклона и кривизны, не требует совпадения значений первых и вторых производных по обе стороны точки сшивки (разд. 4.5.1).

Сшивка с сохранением непрерывности порядка более 3. Используя соотношение (4.56), можно определить величины $d^3Q(0)/dv^3$ и $d^3R(1)/dt^3$ и найти выражения для отрезков кривых P_iP_{i+1} , обеспечивающие сохранение непрерывности производных четвертого порядка. В этом случае нужно предварительно построить кривую шестой степени, проходящую через точки P_{i-3}, \dots, P_{i+3} . Максимально достижимый порядок непрерывности зависит, кроме всего прочего, от типа используемой ЭВМ и емкости памяти.

Изменение формы кривой с помощью векторов. Форму кривой удобно изменять путем изменения ее характеристического многоугольника (разд. 4.1.1). В случае кубической кривой (рис. 4.34) имеем

$$a_1 = Q(0)M = \frac{1}{3} \frac{dQ(0)}{dv}, \quad (4.65)$$

$$a_3 = NQ(1) = \frac{1}{3} \frac{dQ(1)}{dv},$$

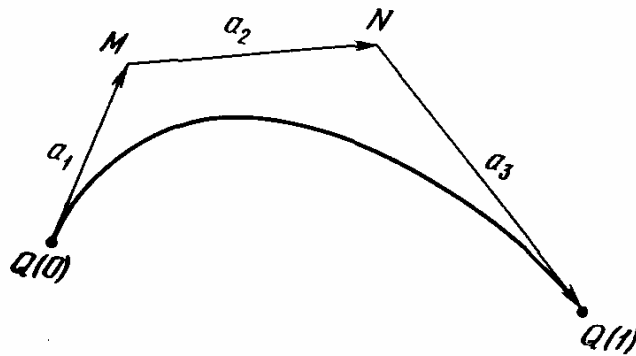


Рис. 4.34. Кубическая кривая.

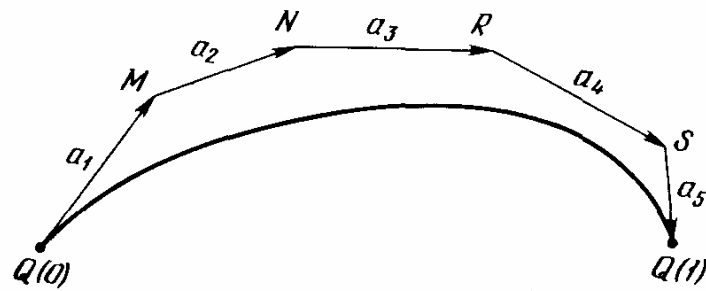


Рис. 4.35. Кривая пятой степени.

а для кривой пятой степени (рис. 4.35):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{Q}(0)M = \frac{1}{5} \frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv}, \\ \mathbf{a}_2 &= MN = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{20} \frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{dv^2}, \\ \mathbf{a}_4 &= RS = \mathbf{a}_5 - \frac{1}{20} \frac{d^2\mathbf{Q}(1)}{dv^2}, \\ \mathbf{a}_5 &= SQ(1) = \frac{1}{5} \frac{d\mathbf{Q}(1)}{dv}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Произвольные изменения кривой. Покажем, как можно изменить форму ранее определенного отрезка кривой без изменения граничных условий. Для сохранения наклона достаточно изменить модуль вектора \mathbf{a}_1 или \mathbf{a}_n (рис. 4.36). При этом точка M перемещается в положение M' , а для сохра-

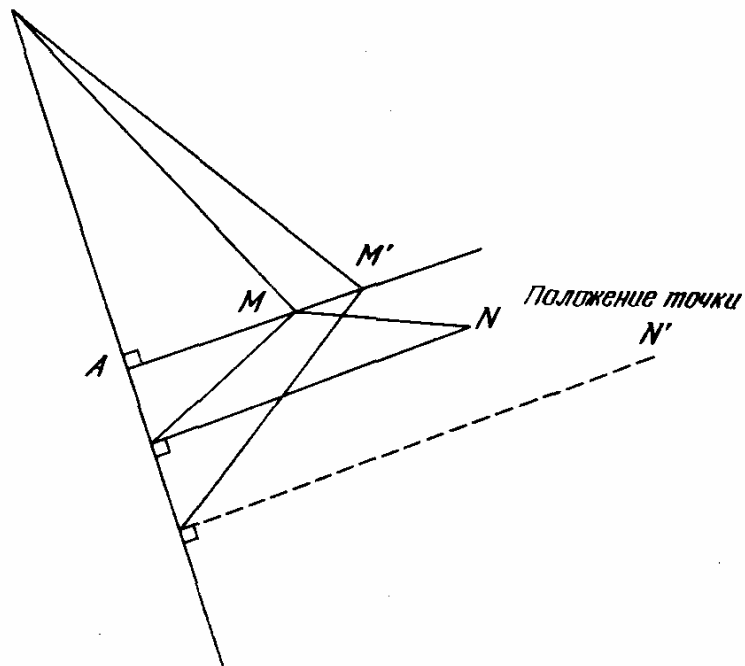


Рис. 4.36. Изменение характеристического многоугольника с сохранением центра кривизны.

нения кривизны достаточно точку N' расположить на линии, параллельной a_1 , в соответствии со свойством 5 из разд. 4.1.2 (рис. 4.5).

Изменение сегмента кривой. Рассмотрим отрезок кривой и соответствующий ему характеристический многоугольник. Вектор $P(u)$, задающий положение текущей точки кривой, определяется выражением

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u).$$

Сместим вершину S_i характеристического многоугольника на вектор Δ , после чего положение текущей точки кривой будет определяться выражением

$$P'(u) = s_0 \mathcal{B}_{0,m}(u) + \dots + (s_i + \Delta) \mathcal{B}_{i,m}(u) + \dots + s_m \mathcal{B}_{m,m}(u) = P(u) + \Delta \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (4.67)$$

Видно, что смещение каждой точки кривой определяется вектором, параллельным Δ и имеющим модуль $\Delta \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u)$.

Максимальное смещение имеет точка $P(i/m)$, и его величина (см. табл. 4.1) близка к $\Delta/3$.

Из свойств функций \mathcal{B} следует, что если $2 \leq i \leq m-2$, то касательные в граничных точках не меняют наклон, и что если $3 \leq i \leq m-3$, то кривизна в этих точках не меняется.

4.2. ПОВЕРХНОСТИ

4.2.1. Характеристические сетки

Поверхность может быть определена как геометрическое место точек, принадлежащих образующей кривой в процессе ее перемещения и деформации. Можно считать, что каждая вершина характеристического многоугольника образующей кривой при этом описывает траекторию, которая сама определяется некоторым характеристическим многоугольником (рис. 4.37).

Кривые $A(0)A(1)$ и $B(0)B(1)$ расположены на поверхности и называются главными образующими. Остальные, такие, как $M(0)M(1)$ и $N(0)N(1)$, называются вспомогательными образующими. Точки $A(v)$, $M(v)$, ..., $N(v)$ и $B(v)$ являются вершинами характеристического многоугольника образующей $A(v)B(v)$. Если все образующие имеют одинаковую степень, т. е. их характеристические многоугольники имеют одинаковое число сторон, то характеристическая сетка получается соединением вершин с одинаковыми индексами.

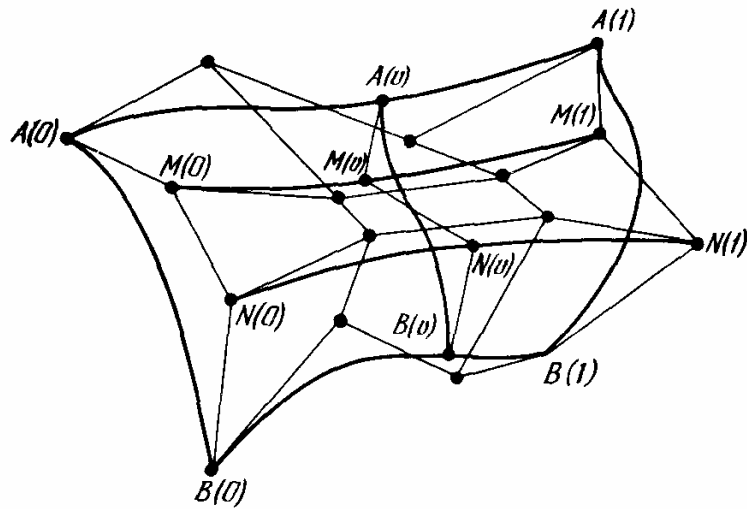


Рис. 4.37. Характеристическая сетка клетки разбиения.

4.2.2. Определение положения точки

Использование функций f

Рассмотрим векторы $\alpha_i \in [0, m]$ (рис. 4.38), образующие характеристический многоугольник кривой $A(0)B(0)$, и векторы

$$\alpha_{i,j} \quad i \in [0, m]; \quad j \in [0, n], \quad (4.68)$$

определяющие характеристические многоугольники образующих, берущих начало из крайних точек векторов α . Можно показать, что текущая точка

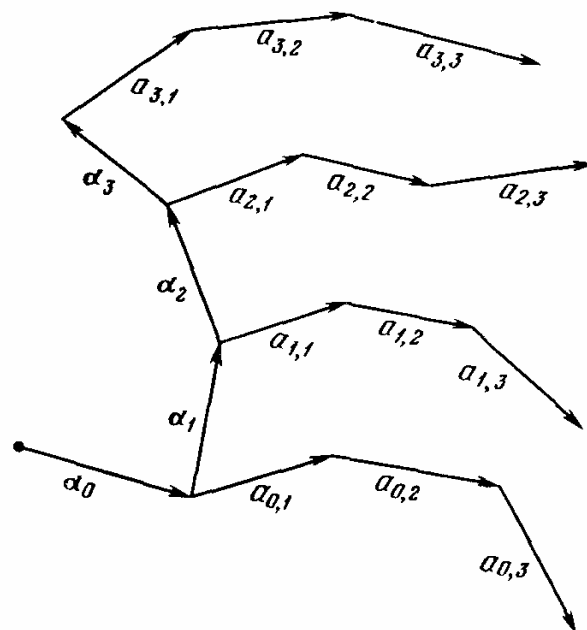


Рис. 4.38. Определение клетки разбиения с помощью функций f .

поверхности определяется с помощью общего выражения

$$\begin{aligned} P(u, v) = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{i,m}(u) + \sum_{j=1}^n a_{0,j} f_{j,n}(v) + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{i-1,j}) f_{i,m}(u) f_{j,n}(v). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Однако оно непригодно для практического использования и приводится только в справочных целях.

Использование функций \mathcal{B}

Обозначим через S_{ij} $i \in [0, m]$, $j \in [0, n]$ вершины характеристической сетки. Тогда образующие D_i $i \in [0, m]$ можно определить с помощью выражения

$$T_i(v) = \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (4.70)$$

Образующая $G(v)$, вершинами характеристического многоугольника которой являются $T_i(v)$ (рис. 4.39), задается с помощью следующего выражения:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m T_i(v) \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (4.71)$$

Подставляя вместо $T_i(v)$ выражение (4.70), получаем

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (4.72)$$

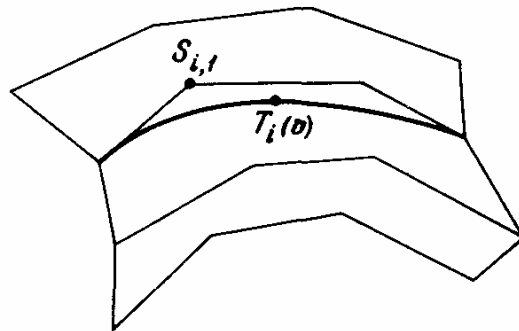


Рис. 4.39. Вспомогательная образующая клетки разбиения.

Использование полиномиальных функций

Поверхности, как и кривые, иногда полезно представлять в виде

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} u^i v^j. \quad (4.73)$$

Для определения векторов \mathbf{b}_{ij} представим выражение (4.72) в виде

$$\mathbf{P}(u, v) = [\mathcal{B}_{i,m}(u)] \begin{bmatrix} s_{0,0} & \dots & s_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,0} & \dots & s_{m,n} \end{bmatrix} [\mathcal{B}_{j,n}(v)]. \quad (4.74)$$

Далее запишем представление $[\mathcal{B}_{i,m}(u)] = [u^i] \mathbf{M}$

и

$$[\mathcal{B}_{j,n}(v)] = \mathbf{M}' [v^j]$$

и преобразуем выражение (4.72) к виду

$$\mathbf{P}(u, v) = [u^i] \mathbf{M} [s_{i,j}] \mathbf{M}' [v^j].$$

Теперь используем другую форму записи для выражения (4.73):

$$\mathbf{P}(u, v) = [u^i] [\mathbf{b}_{i,j}] [v^j], \quad (4.75)$$

и так как выражения (4.74) и (4.75) определяют одну и ту же зависимость, то приходим к выводу, что

$$[\mathbf{b}_{i,j}] = \mathbf{M} [s_{i,j}] \mathbf{M}'.$$

Частные случаи

Вырожденные поверхности. Если обрабатываемая поверхность топологически подобна трехграннику (рис. 4.40), то одна из клеток разбиения будет иметь только три стороны. Нельзя игнорировать случаи, когда теряет-

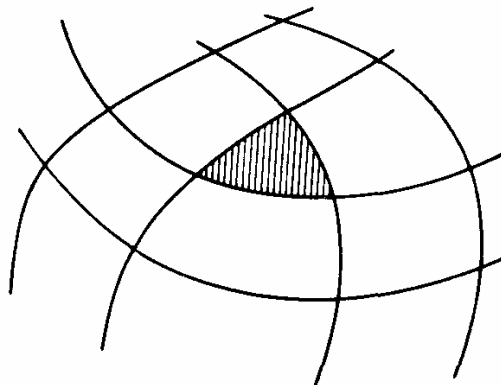


Рис. 4.40. Вырожденная клетка разбиения.

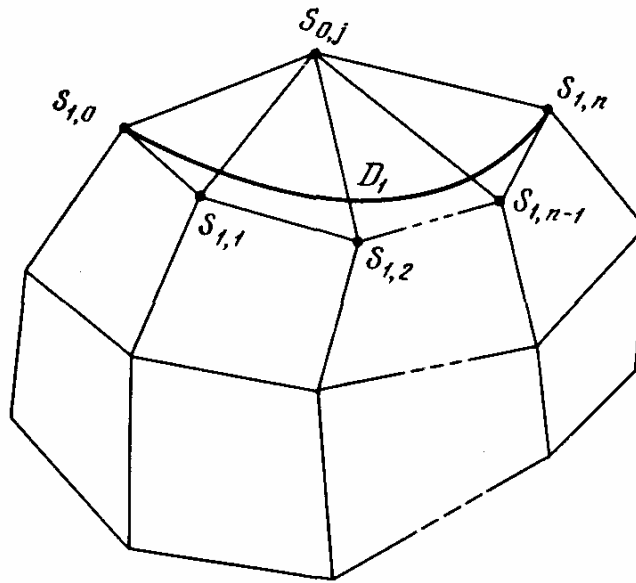


Рис. 4.41. Характеристическая сетка с вырожденными трехсторонними клетками.

ся большее число или даже все стороны, хотя практическая целесообразность такого анализа сомнительна.

Трехсторонняя клетка разбиения. Рассмотрим вершины $S_{0,j}$ (рис. 4.41), совпадающие с вершиной $S_{0,0}$. Касательные к поверхности в этой точке образуют конус с образующей D_1 , вершинами характеристического многоугольника которой являются точки $S_{1,j}$. Для того чтобы точка $S_{0,0}$ не являлась вершиной конуса, необходимо и достаточно, чтобы точки $S_{0,0}$ и $S_{1,j}$ лежали в одной плоскости (рис. 4.42). В противном случае в точке $S_{0,0}$ существует бесконечное число касательных плоскостей.

Двусторонние клетки разбиения. Поверхность может иметь несколько точек, подобных рассмотренной выше. Если они не примыкают друг к другу (рис. 4.43), то задача сводится к предыдущей; однако возможна ситуация, когда две вершины, например $S_{0,j}$ и $S_{i,0}$, совпадают с $S_{0,0}$ (рис. 4.44). В этом случае образующие $G(v)$ и $G'(u)$ сходятся в точке $S_{0,0}$ и являются

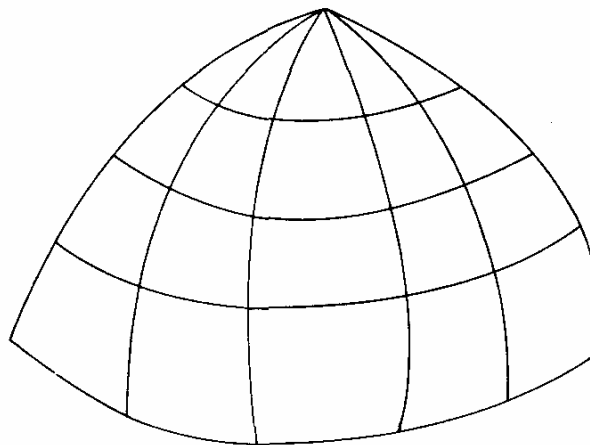


Рис. 4.42. Образующие вырожденных трехсторонних клеток.

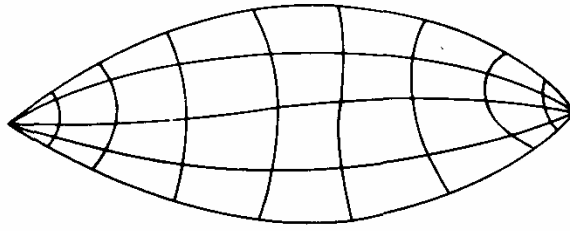


Рис. 4.43. Вырожденные клетки на двух противоположных сторонах.

касательными к конусам, образующие которых имеют характеристические многоугольники с вершинами $S_{1,j}$ и $S_{i,1}$.

Для того чтобы в точке $S_{0,0}$ существовала единственная касательная плоскость, необходимо, чтобы точки $S_{1,j}$, $S_{i,1}$ и $S_{0,0}$ лежали в одной плоскости (рис. 4.45).

Односторонние клетки разбиения. В этом случае с точкой $S_{0,0}$ совпадают точки $S_{0,j}$, $S_{i,0}$ и $S_{m,i}$ (рис. 4.46 и 4.47). Оба конца образующих $G(v)$ замыкаются в точке $S_{0,0}$. Образующими касательных конусов являются кривые D_1 и D_{m-1} , характеристические многоугольники которых имеют вершины в точках $S_{1,j}$ и $S_{m-1,j}$. Образующие $G'(u)$ являются касательными к конусу с образующей D'_1 , имеющей характеристический многоугольник с вершинами $S_{i,1}$. Для того чтобы точка $S_{0,0}$ не была особенной, необходимо, чтобы точки $S_{0,0}$, $S_{1,j}$, $S_{i,1}$ и $S_{m-1,j}$ лежали в одной плоскости.

Клетки разбиения с нулевым числом сторон. В этом случае с точкой $S_{0,0}$ совпадают точки $S_{0,j}$, $S_{i,0}$, $S_{m,j}$ и $S_{i,n}$ (рис. 4.48). В точке $S_{0,0}$ конус, касательный к образующим, имеет в качестве образующих D_1 , D_{m-1} , D'_1 и D'_{n-1} .

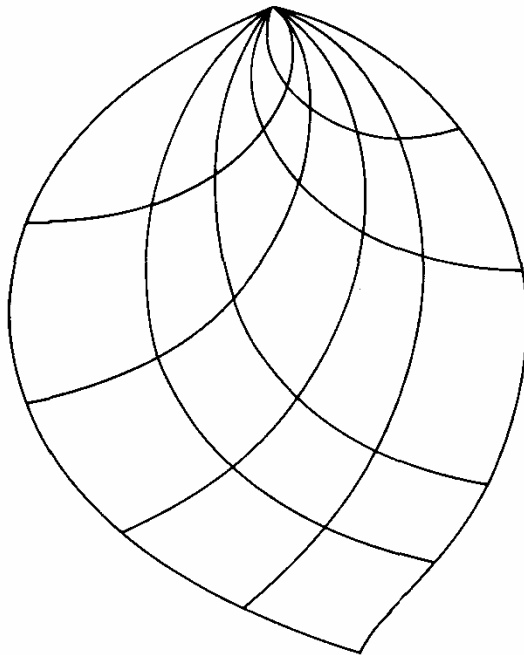


Рис. 4.44. Вырожденные клетки на двух примыкающих сторонах.

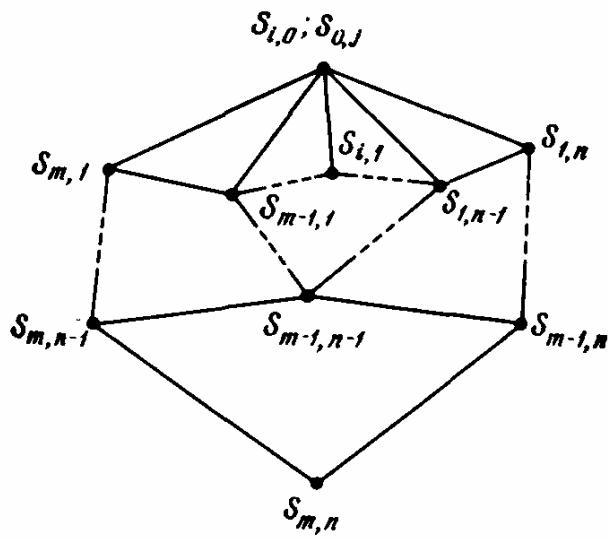


Рис. 4.45. Характеристическая сетка клетки, приведенной на рис. 4.44.

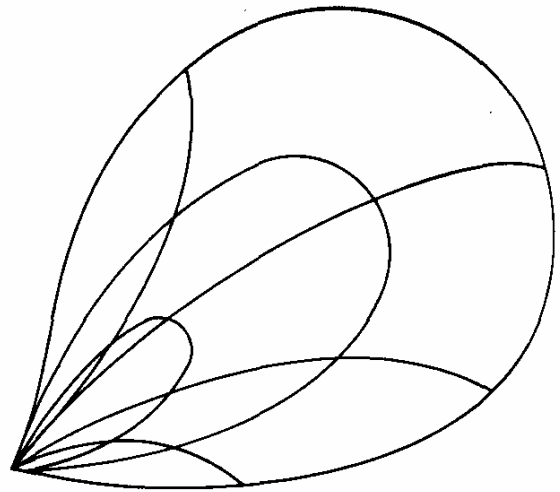


Рис. 4.46. Вырожденная клетка с одной стороной.

Точка $S_{0,0}$ не является особенной только в том случае, когда точки $S_{0,0}$, $S_{1,j}$, $S_{m-1,j}$, $S_{i,1}$ и $S_{i,n-1}$ лежат в одной плоскости (рис. 4.49).

Поверхности с точкой излома. Если в одной из точек поверхности частные производные коллинеарны и не равны нулю, то нормальный век-

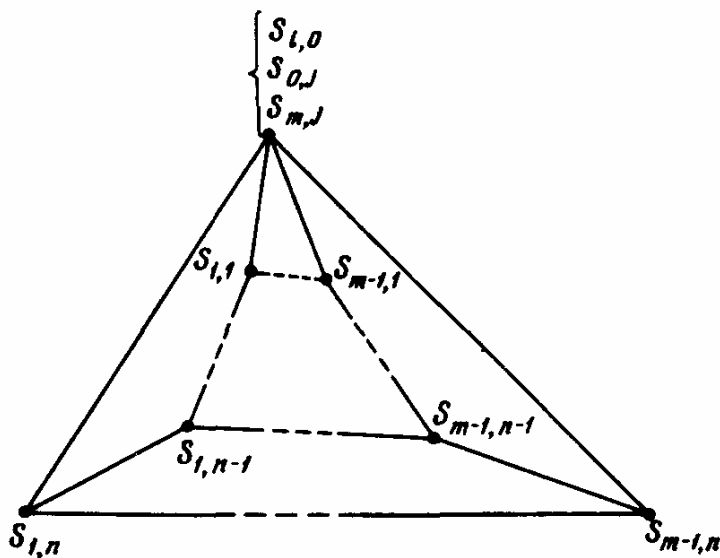


Рис. 4.47. Характеристическая сетка для рис.4.46.

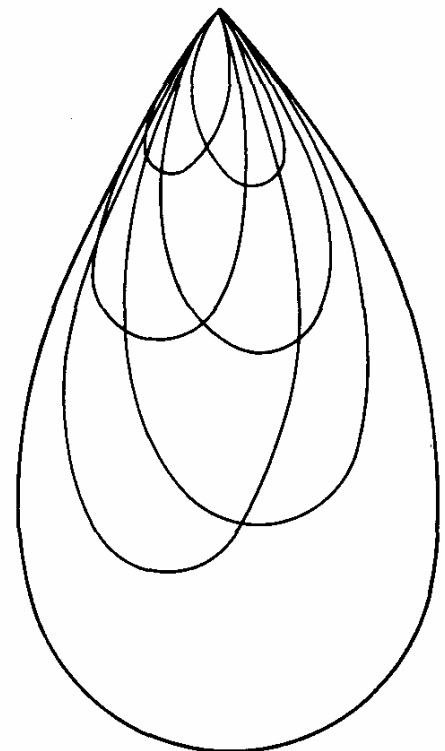


Рис. 4.48. Вырожденная клетка с нулевым числом сторон.

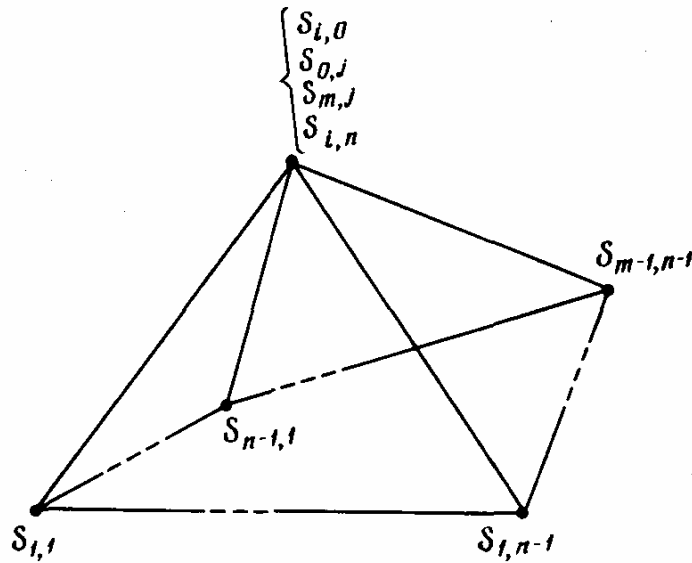


Рис. 4.49. Характеристическая сетка клетки рис. 4.48.

тор, определяемый как

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}, \quad (4.76)$$

равен нулю. Тем не менее можно определить направление нормали по вторым производным и, следовательно, касательную плоскость в этой точке.

Для упрощения формул переместим начало параметрических координат таким образом, чтобы упомянутая выше точка имела нулевые координаты $P(0, 0)$. Текущую точку поверхности определим следующим образом:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} u^i v^j.$$

Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} = \mathbf{b}_{1,0}; \quad \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} = \mathbf{b}_{0,1}$$

и, поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} = 0,$$

получаем

$$\mathbf{b}_{1,0} = \lambda \mathbf{b}_{0,1},$$

где λ — ненулевой скаляр.

Допустим, что принадлежащая поверхности кривая G определяется с помощью уравнения

$$v = \sum_{k=1}^p c_k u^k \quad (4.77)$$

и проходит через точку $\mathbf{P}(0, 0)$, поскольку $c_0 = 0$.

Точки, принадлежащие кривой G , можно определить с помощью выражения

$$Q(u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i \left(\sum_{k=1}^p c_k u^k \right)^j. \quad (4.78)$$

При $u = 0$ имеют отличную от нуля первую производную члены этого выражения со степенью, равной 1. Они соответствуют следующим условиям:

$$\begin{aligned} i = 1, j = 0, k \in [1, p], \\ i = 0, j = 1, k = 1. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Это означает, что

$$\frac{dQ(0)}{du} = \frac{d}{du} \left[b_{1,0} u \left(\sum_{k=1}^p c_k u^k \right)^0 + b_{0,1} c_1 u \right] = b_{1,0} + b_{0,1} c_1, \quad (4.80)$$

а с учетом условий (4.79)

$$\frac{dQ(0)}{du} = b_{0,1}(\lambda + c_1). \quad (4.81)$$

Если $\lambda + c_1 \neq 0$, то касательные к кривой G и к границе клетки совпадают, но если

$$\lambda + c_1 = 0, \quad (4.82)$$

то первая производная равна нулю и касательная параллельна второй производной, которая соответствует членам второй степени, и определяется условиями

$$\begin{aligned} i = 2, j = 0, k \in [1, p]; \\ i = 1, j = 1, k = 1; \\ i = 0, j = 1, k = 2; \\ i = 0, j = 2, k = 1. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q(0)}{du^2} &= \frac{d^2}{du^2} \left[b_{2,0} u^2 \left(\sum_{k=1}^p c_k u^k \right)^0 + b_{1,1} u^2 c_1 + b_{0,1} c_2 u^2 + b_{0,2} c_1^2 u^2 \right] = \\ &= 2(b_{2,0} + b_{1,1} c_1 + b_{0,1} c_2 + b_{0,2} c_1^2), \end{aligned} \quad (4.84)$$

а с учетом условий (4.83)

$$\frac{d^2Q(0)}{du^2} = 2(b_{2,0} - \lambda b_{1,1} + c_2 b_{0,1} + \lambda^2 b_{0,2}). \quad (4.85)$$

Это выражение можно упростить, введя следующее обозначение:

$$b_{2,0} - \lambda b_{1,1} + \lambda^2 b_{0,2} = d.$$

Тогда

$$\frac{d^2Q(0)}{du^2} = d + c_2 b_{0,1} = e. \quad (4.86)$$

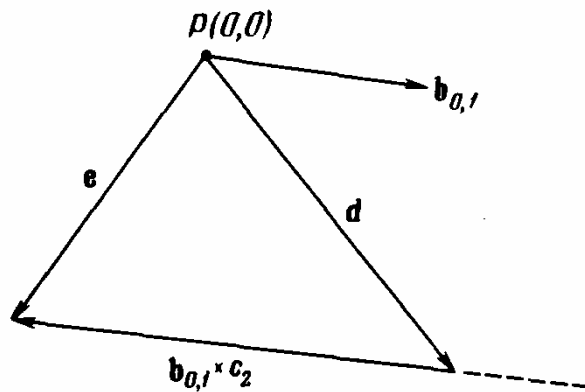


Рис. 4.50. Касательная плоскость в точке излома.

При изменении c_2 касательная к кривым, определенным таким образом, остается параллельной вектору e (рис. 4.50), начало которого находится в точке $P(0, 0)$, а конец расположен на прямой, параллельной $b_{0,1}$ и проходящей через конечную точку вектора d , т. е. вектор e расположен в плоскости, касательной к поверхности в точке $P(0, 0)$.

Следует заметить, что для кривой, определяемой выражением $dQ(0)/du = 0$, имеем в нашем случае $d^2Q(0)/du^2 \neq 0$.

Отсюда следует, что ее кривизна в точке $P(0, 0)$ является бесконечной и эта точка для кривой является точкой излома. Более того, касательные к кривым, для которых $c_1 \neq \lambda$, имеют общее направление с векторами $b_{0,1}$ и $b_{1,0}$. В точке $P(0, 0)$ индикатриса Дюпена¹⁾ сводится к двум точкам, расположенным на общей касательной к изопараметрическим кривым.

Можно считать, что нормальный вектор имеет вполне определенный аргумент и модуль, равный нулю. Его аргумент можно получить с помощью векторов a_1, a_2, α_1 и α_2 (рис. 4.51), которые являются элементами

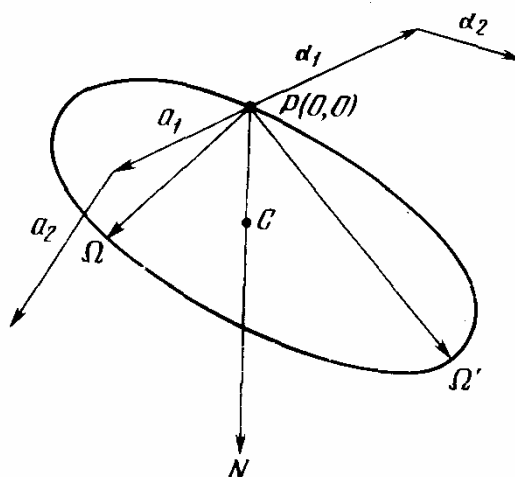


Рис. 4.51. Окружность Менье в точке излома.

¹⁾ Индикатриса Дюпена характеризует искривленность поверхности в данной точке. Она располагается в касательной плоскости и образуется отрезками, отложенными от точки $P(0, 0)$ в разных направлениях, длина которых равна кривизне в этом направлении. — Прим. ред.

характеристических многоугольников главных образующих, проходящих через точку $P(0, 0)$. Если центры кривизны образующих обозначить через Ω и Ω' , то из свойства 5 разд. 4.1.2 следует, что точки $P(0, 0)$, Ω , Ω' лежат на окружности Менье и искомая величина определяется диаметром, проходящим через точку $P(0, 0)$.

Если вектор \mathbf{d} равен нулю, необходимо использовать производную минимального порядка, отличную от нуля.

4.2.3. Годографы

Первые годографы

Предположим, что точки $S_{i,j}$, $i \in [0, m]$, $j \in [0, n]$ являются вершинами характеристической сетки с клетками степени $(m \times n)$. Выберем точку O в качестве начала координат и проведем из нее (рис. 4.52) векторы, имеющие одинаковое направление с векторами $\mathbf{s}'_{i,j} = \mathbf{s}_{i+1,j} - \mathbf{s}_{i,j}$.

Их концы образуют вершины характеристической сетки для клетки степени $[(m-1) \times n]$. Произвольная точка $Q(u, v)$ клетки определяется по формуле

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \mathbf{s}'_{i,j} \mathcal{B}_{i, m-1}(u) \mathcal{B}_{j, n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\mathbf{s}_{i+1,j} - \mathbf{s}_{i,j}) \mathcal{B}_{i, m-1}(u) \mathcal{B}_{j, n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \mathbf{s}_{i+1,j} \mathcal{B}_{i, m-1}(u) \mathcal{B}_{j, n}(v) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \mathbf{s}_{i,j} \mathcal{B}_{i, m-1}(u) \mathcal{B}_{j, n}(v). \end{aligned}$$

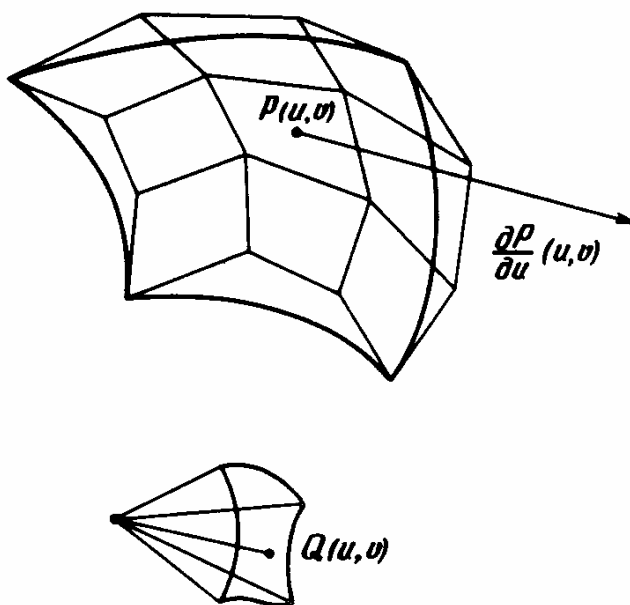


Рис. 4.52. Построение первого годографа клетки.

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) \equiv \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (4.88)$$

Нижний предел изменения индекса i можно опять принять равным нулю, так как

$$\mathcal{B}_{-1,m-1}(u) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (4.89)$$

Кроме того, в выражении

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v)$$

верхний предел изменения индекса i можно принять равным m , так как $\mathcal{B}_{m,m-1} \equiv 0$. С учетом этого выражение (4.87) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} [\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)] \mathcal{B}_{j,n}(v). \end{aligned}$$

Теперь используем соотношение (4.35):

$$\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u) = \frac{1}{m} \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du}$$

и окончательно получаем

$$Q(u, v) = \frac{1}{m} \frac{\partial P(u, v)}{\partial u}.$$

Таким образом, поверхность H представляет собой годограф G относительно u в масштабе $1/m$.

Аналогично с помощью векторов, имеющих одинаковое направление с векторами $(s_{i,j+1} - s_{i,j})$, можно определить поверхность J , текущая точка которой задается выражением

$$R(u, v) = \frac{1}{n} \frac{\partial P(u, v)}{\partial v}.$$

Поверхность J является годографом G относительно v в масштабе $1/n$.

Смешанные годографы

Годограф поверхности H относительно v совпадает с годографом поверхности J относительно u , и его текущая точка определяется выражением

$$T(u, v) = \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Он является смешанным годографом поверхности G в масштабе $1/mn$.

Существует простой способ определения смешанной производной в углах клетки. Рассмотрим точку $P(u, 0)$, лежащую на главной образующей, и точку $Q(u)$, зависящую от того же параметра и лежащую на первой вспомогательной образующей (рис. 4.53). Можно записать следующие соотношения:

$$P(u, 0)Q(u) = \frac{1}{n} \frac{\partial P(u, 0)}{\partial v}$$

и

$$Q(0)R = \frac{1}{m} \frac{dQ(0)}{du}.$$

Учтем также, что

$$Q(u) = P(u, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial P(u, 0)}{\partial v}$$

и

$$\frac{dQ(u)}{du} = \frac{\partial P(u, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 P(u, 0)}{\partial u \partial v}.$$

В частности,

$$\frac{dQ(0)}{du} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u \partial v}.$$

Отсюда следует

$$R = Q(0) + \frac{1}{m} \frac{dQ(0)}{du} = P(0, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} + \frac{1}{m} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u \partial v}.$$

Но в угловой точке

$$\frac{1}{n} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} = P(0, 0)Q(0),$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} = P(0, 0)T(0).$$

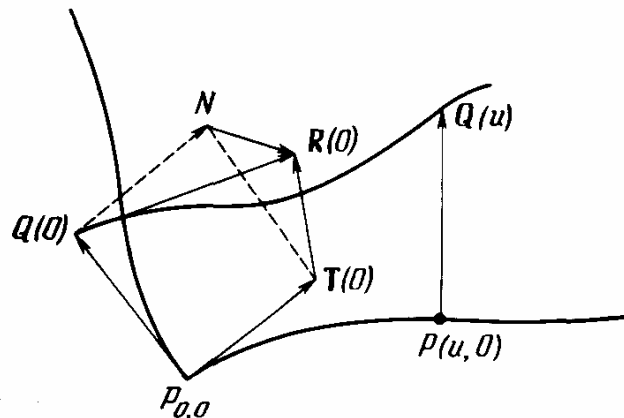


Рис. 4.53. Построение смешанной производной в углу клетки.

Для параллелограмма $T(0)P(0, 0)Q(0)N$ справедливо соотношение

$$NR = \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v},$$

Последовательные годографы

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно получить общее выражение для годографа

$$\frac{(m - k + 1)! (n - l + 1)!}{m! n!} \frac{\partial^{k+l} \mathbf{P}(u, v)}{\partial u^k \partial v^l}.$$

4.2.4. Линии видимого контура

Линия видимого контура поверхности S , наблюдаемой вдоль направления D , представляет собой линию контакта поверхности S и цилиндра, образующие которого параллельны D . Ее проекция на некоторую плоскость, не содержащую D , является огибающей проекций образующих поверхности на эту плоскость. Это свойство можно использовать для того, чтобы убедиться в отсутствии невидимых участков поверхности.

Рассмотрим поверхность C (рис. 4.54), первыми годографами которой являются H и J , а также поверхность L , представляющую собой геометрическое место точек — концов векторов N . Начало этих векторов располага-

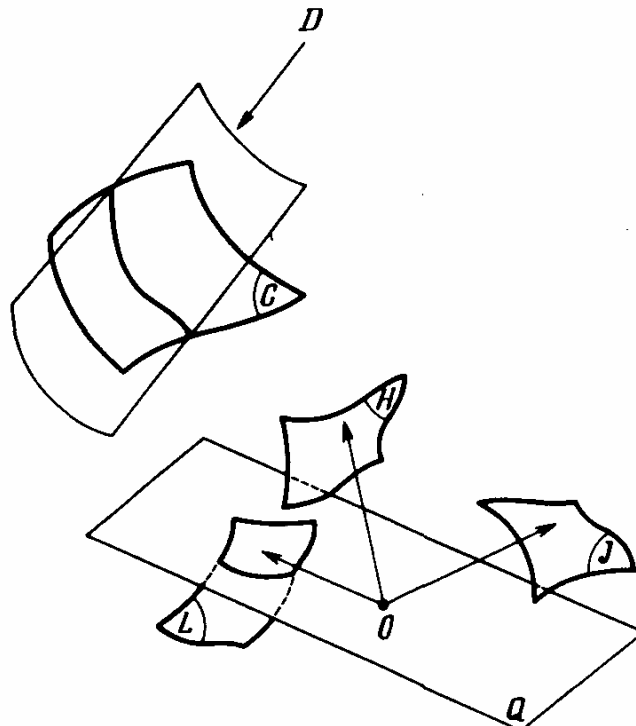


Рис. 4.54. Определение линии видимого контура.

ется в точке O , а сами векторы определяются выражением

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v}.$$

Нормали в точках, расположенных на линиях видимого контура, перпендикулярны направлению D . Векторы, соответствующие нормальям на поверхности L , параллельны этим нормальям и расположены в плоскости Q , перпендикулярной направлению D и содержащей точку O . Точки пересечения поверхностей L и Q соответствуют точкам линии видимого контура поверхности S .

Для того чтобы убедиться в том, что не существует невидимых участков поверхности S , достаточно проверить, что характеристическая сетка¹⁾ не пересекает плоскость Q_1 . Обратим внимание на то, что это условие является достаточным, но не необходимым, так как поверхность L находится внутри выпуклого объема, образованного характеристической сеткой.

4.2.5. Определение характеристической сетки

Априорные ограничения

Так же как и для кривых, в случае поверхностей на их параметры налагаются априорные ограничения. Они относятся к точкам, через которые проходит поверхность, а также к таким характеристикам, как наклон, кривизна, кручение. Ограничения на наклон используются главным образом на границах между смежными клетками. Отметим, что ограничения на кривизну и кручение приводят к решениям, лишенным наглядности.

Алгоритмы построения

Основным назначением алгоритмов является автоматическое построение поверхности, удовлетворяющей определенным условиям. В основе многих алгоритмов лежит метод наименьших квадратов.

Рассмотрим поверхность, состоящую из примыкающих клеток и определяемую множеством точек, через которые она проходит.

Выбор параметров. Рассмотрим поверхность

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} u^i v^j, \quad (4.90)$$

которую нужно разбить на примыкающие друг к другу клетки. Выберем на этой поверхности 25 точек, расположенных не очень далеко друг от дру-

¹⁾ Имеется в виду характеристическая сетка поверхности L . — Прим. ред.

га, и обозначим их следующим образом:

$$\begin{array}{c} P_{i-2, j-2} \dots P_{i+2, j-2} \\ \vdots \\ P_{i-2, j+2} \dots P_{i+2, j+2} \end{array} \quad (4.91)$$

Определим векторы

$$\mathbf{a}_{k, l} = \mathbf{P}_{k, l} - \mathbf{P}_{k-1, l}, \quad (4.92)$$

$$\alpha_{k, l} = \mathbf{P}_{k, l} - \mathbf{P}_{k, l-1},$$

где

$$k \in [i-2, i+2], \quad l \in [j-2, j+2].$$

Затем вычислим значения u и v по формулам

$$u_{k, j} = \frac{\sum_{m=i-1}^k |\mathbf{a}_{m, j}|}{\sum_{m=i-1}^{i+2} |\mathbf{a}_{m, j}|} \quad \text{и} \quad v_{i, l} = \frac{\sum_{n=j-1}^l |\alpha_{i, n}|}{\sum_{n=j-1}^{j+2} |\alpha_{i, n}|}. \quad (4.93)$$

Условия сшивки. Метод среднего параметра. Наиболее простой метод сшивки для более или менее простых поверхностей и разумным образом выбранных точек состоит в следующем. Значениям параметров u с одинаковыми индексами i и v и с параметрами v с одинаковыми индексами j присваиваются одинаковые значения. Следовательно, каждый параметр

$$u_{k, l} \quad (k \in [i-2, i+2]) \quad (4.94)$$

и

$$v_{k, l} \quad (l \in [j-2, j+2]) \quad (4.95)$$

заменяется своим средним значением

$$u_{i_0, j} = \frac{\sum_{k=i-2}^{i+2} u_{k, j}}{5} \quad (4.96)$$

и

$$v_{i, j_0} = \frac{\sum_{k=j-2}^{j+2} v_{i, k}}{5} \quad (4.97)$$

и все 25 коэффициентов $\mathbf{b}_{i, j}$ являются корнями системы линейных уравнений (4.90).

Сшивка по касательным. Клетка разбиения, углами которой являются точки $P_{i, j}$, $P_{i+1, j}$, $P_{i, j+1}$ и $P_{i+1, j+1}$ (рис. 4.55), определяется с помощью

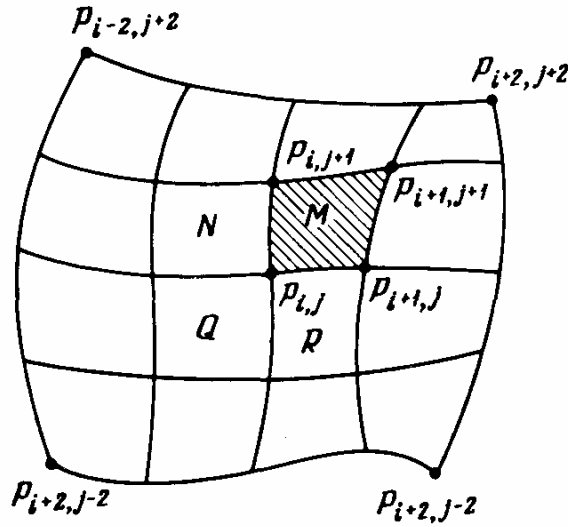


Рис. 4.55. Сшивка клеток по касательной.

выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(w, z) = & \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k, l} \times [u_{i, j} + (u_{i, j+1} - u_{i, j})w]^k \times \\ & \times [v_{i, j} + (v_{i, j+1} - v_{i, j})z]^l. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial w} = & \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k, l} k (u_{i+1} - u_i) [u_i + (u_{i+1} - u_i)w]^{k-1} [v_j + (v_{j+1} - v_j)z]^l, \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} = & \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k, l} k l (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \times \\ & \times [u_i + (u_{i+1} - u_i)w]^k [v_j + (v_{j+1} - v_j)z]^{l-1}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial w \partial z} = & \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k, l} k l (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \times \\ & \times [u_i (u_{i+1} - u_i)w]^{k-1} [v_j + (v_{j+1} - v_j)z]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Из условий (4.90) и (4.99) следуют краевые условия в точке $\mathbf{M}(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(0, 0) &= \mathbf{P}_{i, j}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}(0, 0)}{\partial w} &= (u_{i+1} - u_i) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, u_j)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}(0, 0)}{\partial z} &= (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}(0, 0)}{\partial w \partial z} &= (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Далее, для клеток, углы которых находятся в точках

$$\begin{array}{cccc} P_{i-1,j}, & P_{i,j}, & P_{i-1,j+1}, & P_{i,j+1} \\ P_{i-1,j-1}, & P_{i,j-1}, & P_{i-1,j}, & P_{i,j} \\ P_{i,j-1}, & P_{i+1,j-1}, & P_{i,j}, & P_{i+1,j} \end{array} \quad (4.101)$$

и текущие точки которых, обозначаемые через N , Q и R , вычисляются по приведенным выше формулам, предположим

$$\begin{aligned} N(1, 0) &= P(u_i, v_j), \\ \frac{\partial N(1, 0)}{\partial w} &= (u_i - u_{i-1}) \frac{\partial P(u_i, v_j)}{\partial u}, \\ \frac{\partial N(1, 0)}{\partial t} &= (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial P(u_i, v_j)}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 N}{\partial w \partial t} &= (u_i - u_{i-1}) (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial^2 P(u_i, v_j)}{\partial u \partial v}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

с аналогичными краевыми условиями в точках $Q(1, 1)$ и $R(0, 1)$.

Очевидно, что в точках $M(0, 0)$, $N(1, 0)$, $Q(1, 1)$ и $R(0, 1)$ значения наклона, кривизны и кручения одинаковы, так как эти клетки являются частями более крупной клетки $P_{i-2,j-2} \dots P_{i+2,j+2}$.

Бикубическая зависимость поверхности клетки, углы которой расположены в точках $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ и $P_{i+1,j+1}$, определяется краевыми условиями (4.100), которые следуют из представления клеток со следующими углами:

$$\begin{array}{cccc} P_{i-2,j-2} & P_{i+2,j-2}, & P_{i-2,j+2}, & P_{i+2,j+2}, \\ P_{i-1,j+2} & P_{i+3,j-2} & P_{i-1,j+2}, & P_{i+3,j+2}, \\ P_{i-2,j-1}, & P_{i+2,j-1}, & P_{i-2,j+3}, & P_{i+2,j+3}, \\ P_{i-1,j-1}, & P_{i+3,j-1}, & P_{i-1,j+3}, & P_{i+3,j+3}. \end{array} \quad (4.103)$$

Следовательно, подклетки, углы которых находятся в точках $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ и $P_{i+1,j+1}$, сшиваются по касательной с соседними клетками, имеющими один или два общих угла.

Сшивка с помощью соприкосновения. Рассмотрим клетку, поверхность которой описывается уравнением четвертой степени по каждому параметру по формулам разд. 4.2.5. Она имеет среднюю точку, удовлетворяющую некоторым условиям, наложенным на следующие величины:

$$\begin{aligned} &P(i, j); \\ &\frac{\partial P(i, j)}{\partial u}, \quad \frac{\partial P(i, j)}{\partial v}; \\ &\frac{\partial^2 P(i, j)}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 P(i, j)}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 P(i, j)}{\partial v^2}; \\ &\frac{\partial^3 P(i, j)}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 P(i, j)}{\partial u \partial v^2}; \\ &\frac{\partial^4 P(i, j)}{\partial u^2 \partial v^2}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Следовательно, можно найти 36 коэффициентов, определяющих зависимость, являющуюся полиномом пятой степени по каждому из параметров, для сшивки с соседними клетками с помощью соприкасания.

Сшивка более высокого порядка. Для сшивки с использованием полиномов более высокого порядка сначала необходимо описать поверхность клетки уравнением пятой степени по каждому из параметров, где углы клетки расположены в точках с индексами $i - 3, i + 3, j - 3$ и $j + 3$. Затем для каждого угла формулируют условия, начиная от значений P и до $\partial^6 P / \partial u^3 \partial v^3$. Каждой подклетке может соответствовать 64 коэффициента. Подобный метод сшивки представляет только теоретический интерес, на практике он почти не применяется.

Определение с помощью векторов. В случаях когда может возникнуть необходимость модификации клетки, полезно знать ее характеристическую сетку. Коэффициенты полиномиальной зависимости определяются из краевых условий. Для нахождения вершин характеристической сетки можно использовать матрицу, описываемую формулой (4.37).

В случае бикубической сетки существует простое решение: например, для вершин $P(0, 0), A, C, D$ клетки (рис. 4.56), связанной с точкой $P(0, 0)$, имеем

$$PA = \frac{1}{3} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u}; \quad PB = \frac{1}{3} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v}; \quad PC = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}. \quad (4.105)$$

Точка D является четвертой вершиной параллелограмма $PABD$.

Произвольная модификация. Рассмотрим семейство бикубических клеток, вершины углов которых находятся в точке $P_{i,j}$. Известно, что в точке, общей для четырех клеток (разд. 4.2.3), стороны четырех ячеек характеристической сетки являются образующими гиперболического параболоида, а те, которые пересекаются в точке P , т. е. BF и DH , делят другие в от-

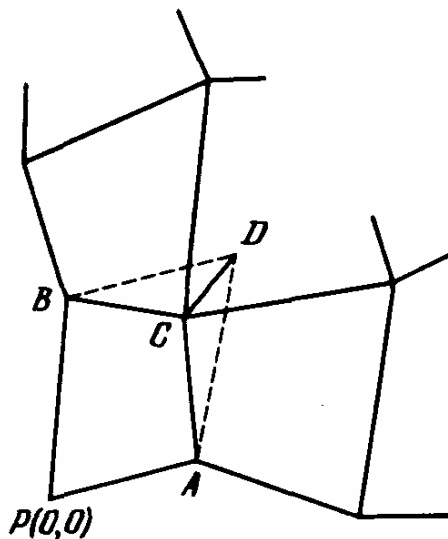


Рис. 4.56. Построение вектора кручения.

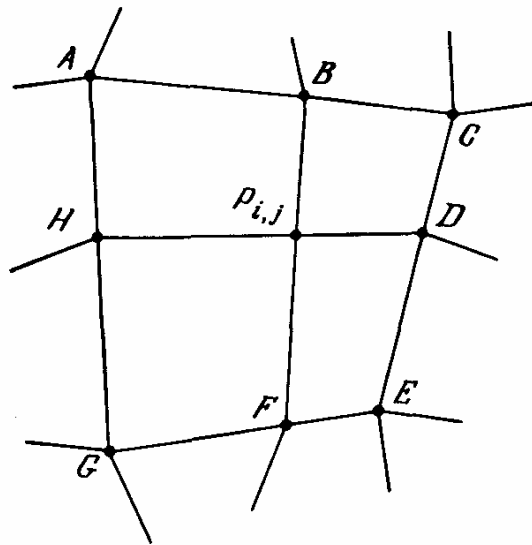


Рис. 4.57. Произвольная модификация клетки.

ношении

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \text{ и } \frac{v_j - v_{j-1}}{v_{j+1} - v_j}. \quad (4.106)$$

Следовательно, точки P, A, \dots, H (рис. 4.57) можно произвольным образом перемещать, сохраняя неизменным отношение (4.106).

Метод сшивки с помощью увеличения степени полинома. Если форма поверхности и распределение точек таковы, что применить метод среднего параметра не представляется возможным, то используют метод увеличения степени. Известно, что если две бикубические клетки касаются друг друга по линии $P(0)P(1)$, то производные $\partial M(u, 1)/\partial v$ и $\partial N(u, 0)/\partial w$ являются коллинеарными только в том случае, если производные коллинеарны в точках $P(0)$ и $P(1)$, и, кроме того,

$$\frac{|\partial M(0, 1)/\partial v|}{|\partial N(0, 0)/\partial w|} = \frac{|\partial M(1, 1)/\partial v|}{|\partial N(1, 0)/\partial w|}.$$

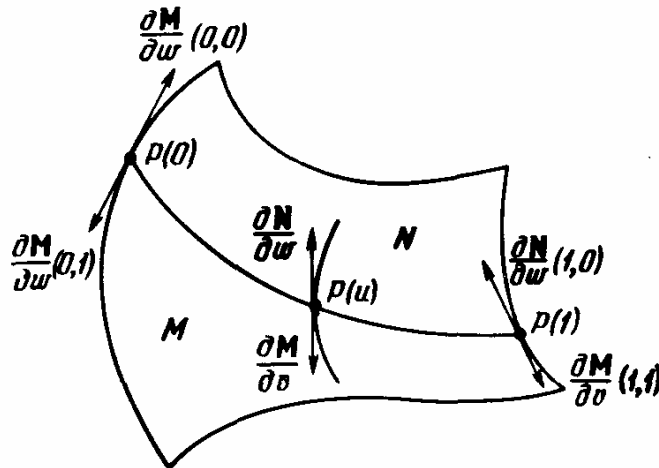


Рис. 4.58. Произвольная модификация с помощью увеличения степени.

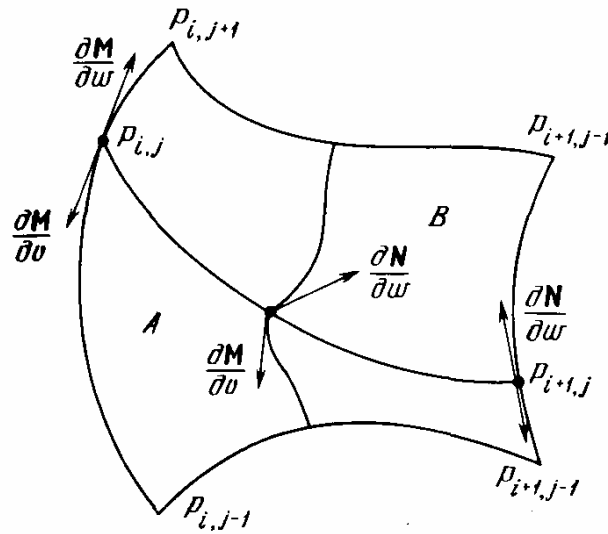


Рис. 4.59. Произвольная модификация с помощью вспомогательных образующих.

Определение вспомогательных образующих. Основная проблема состоит в определении поверхностей клеток, касающихся по линии $P_{i,j}P_{i+1,j}$. На рис. 4.59 представлены две клетки A и B , текущие точки которых обозначены соответственно через $M(u, v)$ и $N(u, w)$. В вершинах углов значения P , $\partial P/\partial u$, $\partial P/\partial v$ и $\partial^2 P/\partial u \partial v$ определяются, как показано в методе сшивки по касательной.

В общем случае выполняется условие

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{u_{i,j} - u_{i,j+1}} \neq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}}. \quad (4.107)$$

Следовательно, векторы $\partial M(u, 1)/\partial v$ и $\partial N(u, 0)/\partial w$ не являются коллинеарными, за исключением точек, соответствующих значениям параметра $u = 0$ или $u = 1$.

Характеристический многоугольник кривой $P_{i,j}P_{i+1,j}$, которая совпадает с кривыми $M(0,1)M(1,1)$ и $N(0,0)N(1,0)$, имеет три стороны, так как поверхность клетки A , являющейся геометрическим местом точек M , описывается бикубической зависимостью. То же справедливо и для вспомогательной образующей $S(0)S(1)$ (рис. 4.60).

Для упрощения формул положим

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{v_{i,j} - v_{i,j-1}} = \lambda_0 \quad \text{и} \quad \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}} = \lambda_1. \quad (4.108)$$

В клетке B , являющейся геометрическим местом точек N , обозначим через T точки, принадлежащие первой вспомогательной образующей, и определим ее с помощью выражения

$$T(u) = N(u, 0) + \frac{1}{3} \frac{\partial M(u, 1)}{\partial v} \left[\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2) \right]. \quad (4.109)$$

Очевидно, что она является кривой шестой степени и ее характеристический

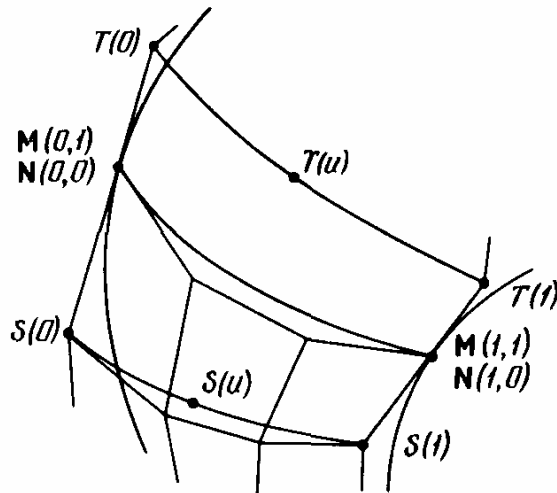


Рис. 4.60. Произвольная модификация. Определение первой вспомогательной образующей.

многоугольник определяется шестью векторами. Для нахождения характеристической сетки модифицированной таким образом клетки необходимо вычислить другие главные или вспомогательные образующие, принадлежащие тому же семейству, вплоть до шестой степени, хотя зависимость от старших степеней является фиктивной, так как в действительности для этих кривых зависимость остается кубической (разд. 4.4.1).

При изменении значения параметра u от 0 до 1 величина в квадратных скобках в выражении (4.109) изменяется от λ_0 до λ_1 , а ее первая производная равна нулю для $u = 0$ и $u = 1$.

Отметим, что поверхность клетки B описывается зависимостью шестой степени по u и зависимостью третьей степени по v .

Обозначим через B' модифицированную клетку B и через $N'(u, w)$ — текущую точку этой клетки. Тогда можно записать

$$\frac{\partial N'(u, 0)}{\partial w} = 3[T(u) - N'(u, 0)]. \quad (4.110)$$

Учтем, что

$$N'(u, 0) = N(u, 0), \quad (4.111)$$

и получим

$$\frac{\partial N'(0, 0)}{\partial w} = 3[T(0) - N(0, 0)] = \frac{\partial M(0, 1)}{\partial v} \lambda_0 = \frac{\partial N(0, 0)}{\partial w}. \quad (4.112)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial N'(u, 0)}{\partial w} = \frac{\partial M(u, 1)}{\partial v} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^3)]. \quad (4.113)$$

Аналогичным образом, дифференцируя выражение (4.113) по u , находим

$$\frac{\partial^2 N'(u, 0)}{\partial u \partial w} = \frac{\partial^2 M(u, 1)}{\partial u \partial v} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2)] +$$

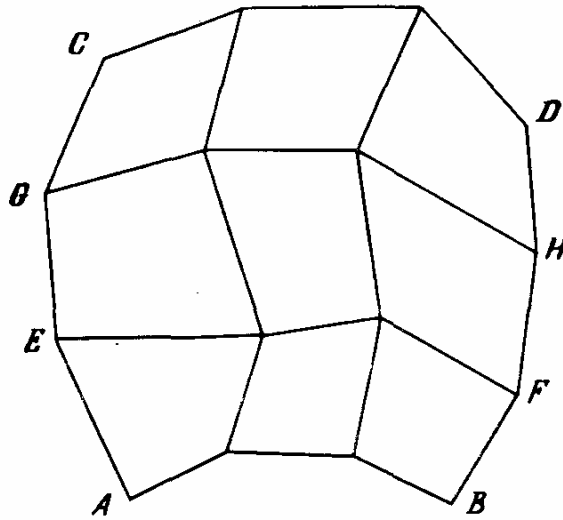


Рис. 4.61. Характеристическая сетка бикубической клетки.

$$+ \frac{\partial \mathbf{M}(u, 1)}{\partial v} \frac{d}{du} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2)]. \quad (4.114)$$

Затем учтем, что

$$\frac{d}{du} (-2u^3 + 3u^2) = 6u(1 - u) \quad (4.115)$$

и эта величина равна нулю для $u = 0$ и $u = 1$, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{N}'(0, 0)}{\partial u \partial w} = \lambda_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}(0, 1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{N}(0, 0)}{\partial u \partial w}, \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{N}'(1, 0)}{\partial u \partial w} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \mathbf{M}(1, 1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{N}(1, 0)}{\partial u \partial w}, \quad (4.117)$$

т. е. условия в точках $\mathbf{N}'(0, 0)$ и $\mathbf{N}'(1, 0)$ остаются такими же, как и до модификации клетки.

Обобщенная сшивка. В том случае, когда бикубическая клетка сшита с клеткой той же степени, ее вспомогательная образующая является кривой шестой степени, т. е. клетка принадлежит типу (6×3) . Из этого следует, что необходимо найти способы предотвращения последовательного возрастания степени до неприемлемых величин.

Рассмотрим характеристическую сетку бикубической клетки (рис. 4.61). Характеристические многоугольники ограничивающих ее кривых AB , BD , DC и CA , так же как и вспомогательных образующих EF и GH , имеют по три стороны. После сшивки с клеткой, прилегающей по стороне AB , вспомогательная образующая EF исходной клетки становится кривой шестой степени (рис. 4.62). Затем после сшивки с соседней клеткой, прилегающей по стороне DC , вспомогательная образующая GH также становится кривой шестого порядка (рис. 4.62).

И наконец, после сшивки с соседними клетками, прилегающими по сторонам AC и BD , вспомогательные образующие IJ и KL становятся кривы-

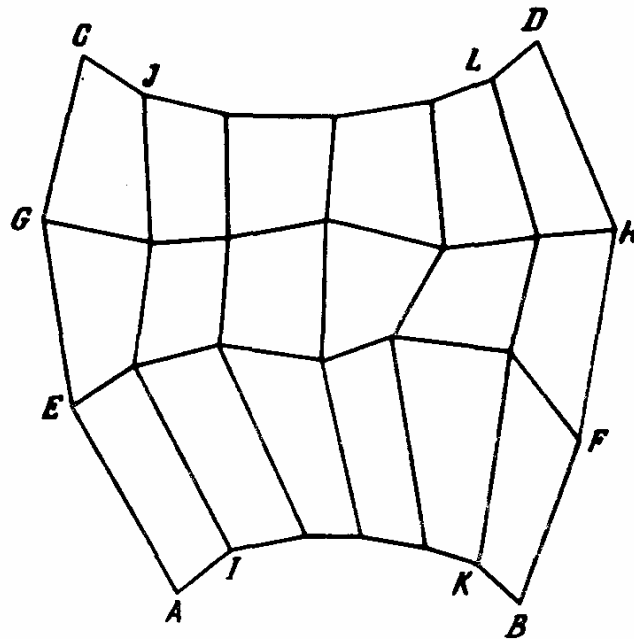


Рис. 4.62. Характеристическая сетка клетки порядка 6×3 .

ми шестого порядка, т. е. степень характеристической сетки клетки повышается до (6×6) , но 4 соседние клетки, прилегающие по главным образующим, остаются бикубическими.

Таким образом, происходит чередование клеток степени (3×3) и (6×6) и остаются применимы методы модификации, описанные в разд. 4.2.5 (произвольная модификация).

4.2.6. Модификация клетки

Из выражения

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v)$$

видно, что если вершина $S_{i,j}$ характеристической сетки перемещается на вектор $\Delta_{i,j}$, то смещение каждой точки $P(u, v)$ определяется величиной $\Delta_{i,j} \mathcal{B}_{i,m}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v)$.

Из свойств функций \mathcal{B} следует, что максимальное смещение испытывает точка $P(i/m, j/n)$. Значения коэффициентов $\mathcal{B}_{i,m}(i/m)$ $\mathcal{B}_{j,n}(j/n)$ берутся из табл. 4.1, и в большинстве случаев они близки к 0,1. Отметим также, что при использовании функций \mathcal{B} происходит автоматическое сглаживание деформаций характеристической сетки.

Очевидно, что условия касания сохраняются для случаев

$$1 < i < m - 1, \quad 1 < j < n - 1,$$

или

$$2 < i < m - 2, \quad 2 < j < n - 2.$$

4.3. Пространственные тела

Характеристическая решетка в трехпараметрическом пространстве определяется набором характеристических сеток одинакового формата ($m \times n$) со смещенными относительно друг друга вершинами с одинаковыми индексами.

4.3.1. Точки

Легко показать, что точка в этом пространстве задается с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{P}(u, v, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p s_{i,j,k} \mathcal{B}_{i,m}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) \mathcal{B}_{k,p}(w). \quad (4.118)$$

4.3.2. Кривые

Введем вспомогательный параметр r , через который выразим остальные:

$$u = \Phi(r), \quad v = \Psi(r), \quad w = \Theta(r), \quad (4.119)$$

где функции Φ , Ψ и Θ являются полиномами степеней соответственно μ , ν и π . Определим канонический вид уравнения кривой степени ($m\mu + n\nu + p\pi$) следующим образом:

$$\mathbf{P}(r) = \sum_{i=0}^{m\mu + n\nu + p\pi} \mathbf{e}_i r^i. \quad (4.120)$$

Обычно $\mu = \nu = \pi$.

4.3.3. Поверхности

Для определения поверхности в трехпараметрическом пространстве введем два вспомогательных параметра r и t :

$$u = \Phi(r, t), \quad v = \Psi(r, t), \quad w = \Theta(r, t). \quad (4.121)$$

Если функции Φ , Ψ и Θ являются полиномами степеней μ , ν и π по r и μ' , ν' и π' по t , то уравнение поверхности приобретает вид

$$\mathbf{P}(r, t) = \sum_{i=0}^{m\mu + n\nu + p\pi} \sum_{j=0}^{m\mu' + n\nu' + p\pi'} \mathbf{e}_{i,j} r^i t^j. \quad (4.122)$$

4.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4.4.1. Кривые

Линейные преобразования

Иногда возникает необходимость изменить границы отрезка кривой, соединяющего две точки $P(0)$ и $P(1)$, причем новые границы могут находиться как вне, так и внутри этого отрезка. Обозначим значения параметра в новых граничных точках через u_0 и u_1 (рис. 4.63) и введем вспомогательный параметр w , такой, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i [u_0 + (u_1 - u_0)w]^i = \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}'_i w^i; \quad w \in [0, 1], \end{aligned}$$

а векторы \mathbf{b}' связаны с векторами \mathbf{b} через посредство соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}'_i] &= [\mathbf{M}_{b, b'}] [\mathbf{b}_i], \\ [\mathbf{M}_{b, b'}] &= \left[u_0^{c-l} (u_1 - u_0)^{l-1} \begin{pmatrix} c-1 \\ l-1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4.123)$$

где l и c представляют собой номера строки и столбца общего члена матрицы c , $l \in [0, m]$.

Вершины нового характеристического многоугольника определяются следующим образом:

$$[\mathbf{s}'_i] = [\mathbf{M}_{s, b}]^{-1} [\mathbf{b}'_i].$$

Из свойства линейности преобразования следует равенство степеней параметров w и u .

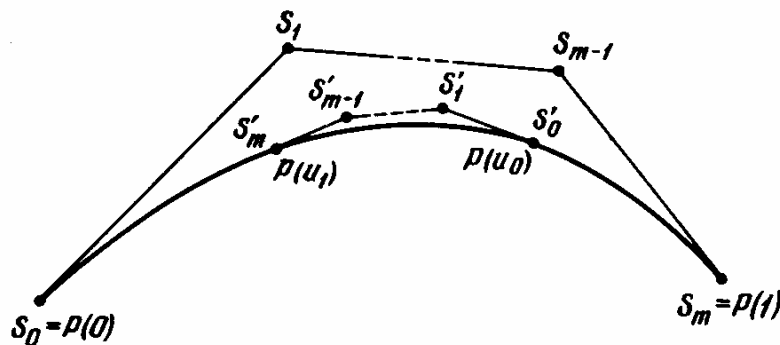


Рис. 4.63. Параметрическое преобразование кривой.

Нелинейные преобразования

Если осуществить переход к параметру w , связанному с прежним параметром u , с помощью соотношения $u = \Phi(w)$, то точка на кривой будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{P}(w) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i [\Phi(w)]^i. \quad (4.124)$$

Очевидно, что кривая при этом не изменится, при условии что $\Phi(w)$ является действительной функцией. Различие будет проявляться в соотношении между длиной траектории точки P , пробегаемой по кривой, и изменением величины параметра.

Действительно,

$$\frac{d\mathbf{P}(w)}{dw} = \sum_{i=0}^m i \mathbf{b}_i [\Phi(w)]^{i-1} \frac{d\Phi(w)}{dw},$$

а член $d\Phi(w)/dw$ не является константой.

Этот метод может быть использован для изменения распределения параметра по отрезку кривой и для его более простой модификации. Его недостатком является увеличение степени.

Увеличение числа вершин характеристического многоугольника

Изменяя положение вершин характеристического многоугольника, можно изменить форму определяемого им отрезка кривой. Однако возможно, что, добившись улучшения в одном месте, мы проиграем в другом. Чтобы устранить этот недостаток и получить возможность более гибкого представления кривых, можно увеличить число векторов характеристического многоугольника. Не всегда удастся простыми средствами выполнить это преобразование, поэтому можно рекомендовать следующий метод.

Рассмотрим точку $P(u)$, определяемую выражением

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i.$$

Очевидно, что она совпадает с точкой

$$\mathbf{Q}(u) = \mathbf{P}(u) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathbf{O} u^i.$$

Выражения для обеих точек можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u) &= [u^i] [\mathbf{b}_i] \quad i \in [0, m], \\ \mathbf{Q}(u) &= [u^i] [\mathbf{b}'_i] \quad i \in [0, (m+n)], \end{aligned}$$

где

$$[\mathbf{b}'_i] = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_i] \\ [0] \end{bmatrix}.$$

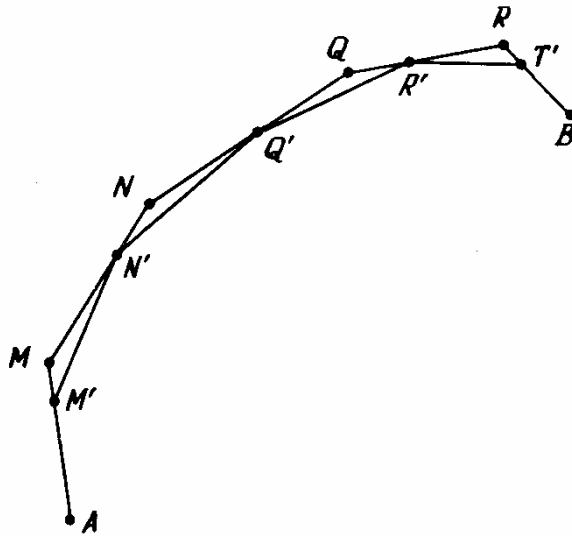


Рис. 4.64. Увеличение числа вершин характеристического многоугольника.

Отсюда следует, что новые вершины характеристического многоугольника, число которых равно $(m + n + 1)$, можно определить следующим образом:

$$[b_i'] [M_s, b]^{-1} = [s_i'].$$

Другими словами, кривая $Q(u)$ представляется полиномом степени $(m + n)$, хотя в действительности ее степень равна m . Очевидно, что, когда над характеристическим полиномом производятся последующие модификации, степень кривой (за редчайшими исключениями) принимается равной $(m + n)$.

На рис. 4.64 показан простой метод, с помощью которого можно увеличить число сторон характеристического многоугольника с m до $m + 1$, не меняя форму кривой. Здесь $AMN \dots RB$ — характеристический многоугольник, имеющий m сторон, а точки $A M' N' \dots R' T' B$, определяющие вершины искомого многоугольника, определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{AM'}{AM} &= \frac{m}{m+1}, \\ \frac{MN'}{MN} &= \frac{m-1}{m+1}, \\ &\dots \\ \frac{RT'}{RB} &= \frac{1}{m+1}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Уменьшение числа вершин характеристического многоугольника

Теоретическое решение. Решение без изменения переменных. Зная векторы \mathbf{a} или \mathbf{s} , можно определить векторы \mathbf{b} . Если n последних векторов стро-

го или приближенно равны нулю, то справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u) = \sum_{i=0}^{m-n} \mathbf{b}_i u^i. \quad (4.126)$$

Зная векторы \mathbf{b}_i , можно определить новые векторы s'_i и \mathbf{b}'_i $i \in [0, m-n]$.

В случае приближенного равенства нулю следует немного изменить $(m-n)$ -й вектор для того, чтобы его конец совпадал с точкой $P(1)$. Кроме того, можно произвольным образом распределить поправки между несколькими векторами. Отметим, что если последние n векторов \mathbf{b} равны нулю, то годограф порядка $(m-n)$ обращается в точку.

Решение с использованием вспомогательной переменной. Если можно найти функцию степени n

$$v = \Phi(u),$$

такую, что

$$\mathbf{P}(u) = \Phi(u)\mathbf{Q}(u), \quad (4.127)$$

то, поскольку $\mathbf{Q}(u)$ имеет форму полинома, справедливо выражение

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i = \sum_{i=0}^{m-n} \beta_i [\Phi(u)]^i,$$

из которого следует

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^{m-n} \beta_i v^i.$$

Следует иметь в виду, что отыскание полинома-делителя обычно является весьма сложной задачей.

Приближенное решение. Решение при известных точках на отрезке кривой. Если определить координаты требуемого числа точек, лежащих на отрезке кривой, то можно применить один из методов, описанных в разд. 4.1.4 (алгоритмы построения).

Решение с учетом граничных условий. Предыдущий метод не сохраняет непрерывности между прилегающими отрезками. Устранить этот недостаток позволяет следующий метод.

Рассмотрим отрезок кривой C , определяемый следующим выражением:

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i \quad u \in [0, 1].$$

Тогда условиями в точке $P(0)$ будут

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{b}_0 \\ \frac{d^i \mathbf{P}(0)}{du^i} &= i! \mathbf{b}_i \end{aligned} \right\} i \in [1, m], \quad (4.128)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{а в точке } P(1) \quad P(1) &= \sum_{i=0}^m b_i \\ \frac{d^j P(1)}{du^j} &= \sum_{i=j}^m \frac{i!}{(i-j)!} b_i u^{i-j} \end{aligned} \right\} i \in [0, m]. \quad (4.129)$$

Если положить $d^0 f/du^0 = f(u)$, то условия (4.128) можно упростить

$$\frac{d^i P(1)}{du^i} = i! b_i. \quad (4.130)$$

Условия (4.128) и (4.129) математически эквивалентны и определяют одну и ту же кривую.

Ниже рассмотрены приближенные методы, с помощью которых кривую C степени m можно описать зависимостью степени p ($p < m$).

Случай нечетного p . Зная векторы b_i , $i \in [0, (p-1)/2]$, можно получить $[(p+1)/2]$ первых векторов S_i характеристического многоугольника аппроксимирующей кривой. Затем, зная вершины $S_m, S_{m-1}, \dots, S_1, S_0$ характеристического многоугольника кривой L' , можно таким же образом получить $[(p+1)/2]$ первых векторов S_j'' многоугольника, аппроксимирующего кривую L' . Вершины S_i' и S_j'' определяют искомым аппроксимирующий характеристический многоугольник, принадлежащий кривой L , на концах которой соблюдаются те же граничные условия до порядка $[(p+1)/2]$, что и для кривой C ¹⁾.

Случай четного p . Как и выше, получаем $[(p/2) + 1]$ вершин из условий для каждого из концов отрезка, но теперь полное число вершин составляет $(p+2)$ вместо требуемых $(p+1)$. Вершина с номером $[(p/2) + 1]$ выбирается посередине отрезка, соединяющего две вершины с номерами $[(p/2) + 1]$.

Оба метода удобны для применения в тех случаях, когда кривая высокой степени является результатом перемещения, общего преобразования базиса или пересечения поверхностей. Если же высокая степень кривой связана с ее негладкой формой, то сомнительно, чтобы можно было добиться понижения степени другим методом, кроме деления кривой на несколько отрезков.

Отображения

Рассмотрим разбиение поверхности F на бипараметрические клетки (рис. 4.65) и построим на ней экспериментально полученную кривую G , у которой известны некоторые точки пересечения с изопараметрическими

¹⁾ Иначе говоря, из исходного характеристического многоугольника отбирается $(p+1)/2$ вершин слева и столько же — справа. Отобранные вершины образуют характеристический многоугольник аппроксимирующей кривой. — *Прим. ред.*

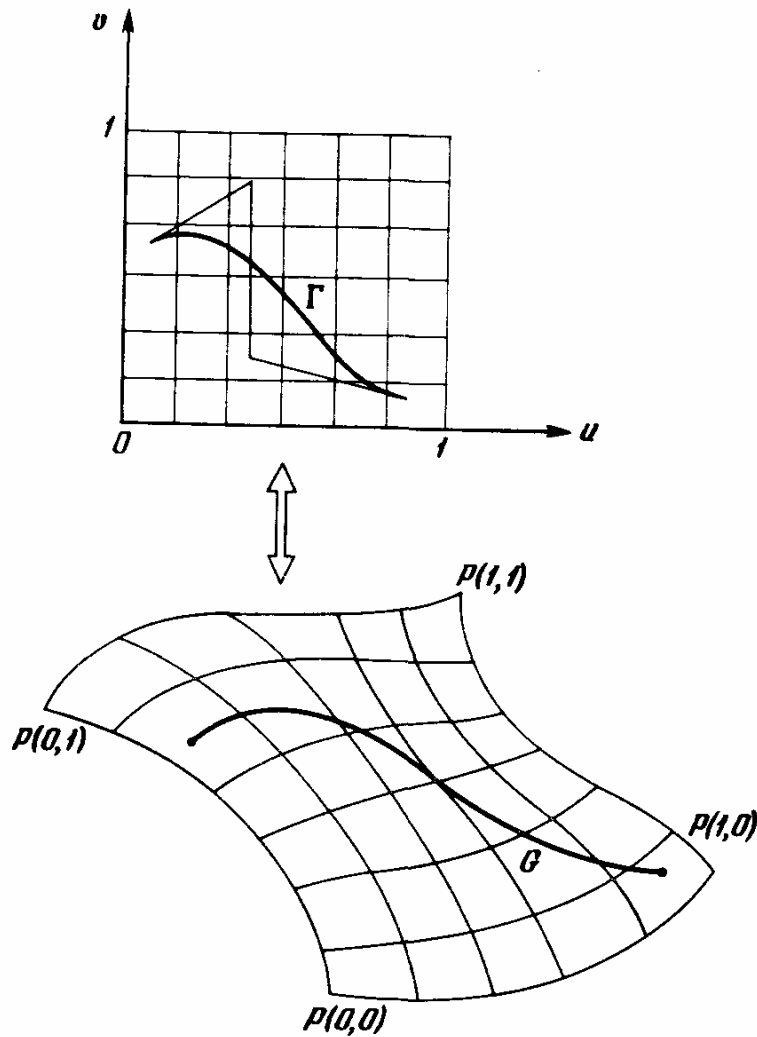


Рис. 4.65. Принцип определения пересекающей кривой.

кривыми на F . Возьмем также плоскость в декартовой системе координат с разбиением на единичные квадраты и отложим на ней точки, декартовы координаты которых совпадают с параметрическими координатами кривой на плоскости F . Через эти точки на плоскости проведем кривую Γ невысокой степени. Если координаты на плоскости x и y заменить на u и v , то для точек на кривой Γ можно записать

$$u = \sum_{h=0}^p c_h w^h, \quad v = \sum_{k=0}^p d_k w^k, \quad (4.131)$$

где c_h и d_k — скалярные, а не векторные величины, и w — вспомогательный параметр.

Кривая G является отображением кривой Γ на поверхность F :

$$\mathbf{P}(w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} \left(\sum_{h=0}^p c_h w^h \right)^i \left(\sum_{k=0}^p d_k w^k \right)^j. \quad (4.132)$$

Объединив члены с одинаковой степенью, получим

$$P(w) = \sum_{l=0}^{(m+n)} e_l w^l,$$

где векторные коэффициенты e определяются выражением

$$e_l = \sum_{h, i, j, k} b_{i, j} (c_h)^i (d_k)^j, \quad hi + kj = l. \quad (4.133)$$

4.4.2. Поверхности

Линейные преобразования

Рассмотрим клетку C , параметрические координаты в которой изменяются в пределах $(u, v) \in [0, 1]$. Тогда текущая точка подклетки, ограниченной образующими $G(u_0)$, $G(u_1)$, $H(v_0)$ и $H(v_1)$ (рис. 4.66), задается следующим выражением:

$$P(w, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i, j} [u_0 + (u_1 - u_0)w]^i [v_0 + (v_1 - v_0)t]^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i, j} w^i t^j. \quad (4.134)$$

Для его использования необходимо найти матрицу $M_{b, c}$, связывающую коэффициенты $b_{i, j}$ и $c_{i, j}$:

$$[b_{i, j}] [M_{b, c}] = [c_{i, j}].$$

Более простым может оказаться другой способ, при использовании которого сначала определяются отрезки главных и вспомогательных образующих между значениями параметра u_0 и u_1 . Таким образом определяется под-

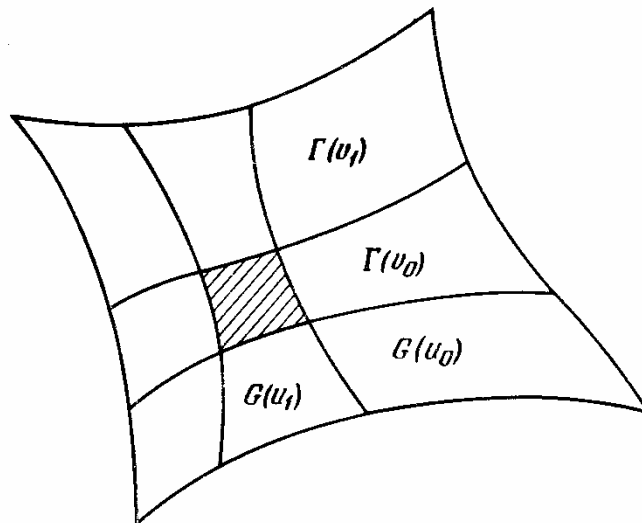


Рис. 4.66. Определение подклетки.

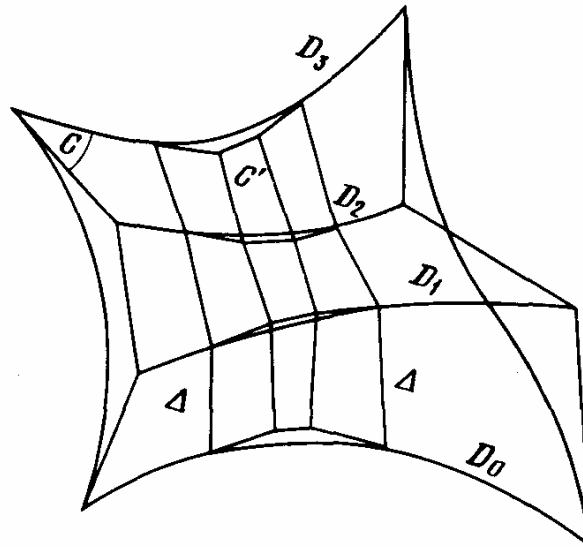


Рис. 4.67. Линейное преобразование клетки.

клетка (рис. 4.67), образующие которой Δ ограничены значениями v_0 и v_1 :

$$P(w, t), \quad w, t \in [0, 1],$$

которая совпадает с подклеткой

$$P(u, v), \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1].$$

В этих вычислениях используется матрица (4.123).

Нелинейные преобразования

Если вспомогательный параметр связан с основными с помощью соотношений $u = \Phi(w)$ и $v = \Psi(w)$, то выражение для текущей точки приобретает следующий вид:

$$P(w, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} [\Phi(w)]^i [\Psi(t)]^j. \quad (4.135)$$

Этот прием может быть использован для изменения расстояния между изопараметрическими кривыми без изменения формы поверхности. Его очевидным недостатком является увеличение степени функций, а следовательно, и времени вычислений, поэтому используется он не очень часто.

Увеличение числа вершин

Обобщим метод, применявшийся к кривым в разд. 4.4.1, и произведем фиктивное увеличение степени клетки с помощью следующей операции:

$$[M_s, b]^{-1} \begin{bmatrix} [b_{i,j}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} = [s'_{i,j}]. \quad (4.136)$$

Уменьшение числа вершин

Решение без изменения переменных. Если окажется, что коэффициенты годографа при наиболее высоких степенях имеют пренебрежимо малые значения, то можно без ущерба исключить соответствующие члены. Заметим только, что вероятность такой ситуации невелика.

Решение с вспомогательной переменной. Поиск функций $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$, являющихся делителями выражения $P(u, v)$, труден, а часто и невозможен, поэтому данное решение упоминается только для полноты картины.

Приближенные решения. Решение при известных точках на поверхности. Это решение является обобщением метода для кривых, приведенного в разд. 4.4.1 (решение при известных точках на отрезке кривой). Для него также характерно отсутствие непрерывности между прилегающими клетками.

Решение с учетом граничных условий. Рассмотрим клетку C степени $(m \times n)$, которую необходимо приближенно заменить на клетку степени $(p \times q)$, где $p < m$ и $q < n$ ¹⁾. Используем представление клетки C с помощью тензора

$$\begin{bmatrix} s_{0,0} & \dots & s_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,0} & \dots & s_{m,n} \end{bmatrix},$$

пользуясь которым можно получить

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,0} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix}. \quad (4.137)$$

Теперь выделим из этой матрицы часть:

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,(q-1)/2} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{(p-1)/2,0} & \dots & b_{(p-1)/2,(q-1)/2} \end{bmatrix},$$

которую используем для получения компонент соответствующего тензора, определяющего клетку C' , аппроксимирующую C :

$$\begin{bmatrix} s'_{0,0} & \dots & s'_{0,(q-1)/2} & \dots & s'_{0,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s'_{(p-1)/2,0} & \dots & s'_{(p-1)/2,(q-1)/2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s'_{p,0} & \dots & & & s'_{p,q} \end{bmatrix}.$$

¹⁾ Далее описывается метод, являющийся двумерным аналогом описанного в разд. 4.4.1 одномерного способа. Он сводится к отбору угловых элементов и построению с их помощью характеристической сетки. — Прим. ред.

Рассмотрим тензор

$$\begin{bmatrix} S_{0, n} & \dots & S_{0, 0} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ S_{m, n} & \dots & S_{m, 0} \end{bmatrix},$$

представляющий клетку C'' , геометрически совпадающую с C , но углы которой $P''(0, 0)$, $P''(0, 1)$, $P''(1, 0)$ и $P''(1, 1)$ совмещены соответственно с углами $P(0, 1)$, $P(0, 0)$, $P(1, 1)$ и $P(1, 0)$ клетки C . Отсюда, используя уже известную процедуру, выводим следующие члены:

$$\begin{bmatrix} S'_{(p+1)/2, (q+1)/2} & \dots & S'_{(p+1)/2, q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ S'_{(p+1)/2, (q+1)/2} & \dots & S'_{(p+1)/2, q} \end{bmatrix}$$

тензора C' .

Повторяя то же самое для тензоров

$$\begin{bmatrix} S_{m, 0} & \dots & S_{m, n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ S_{0, 0} & \dots & S_{0, n} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} S_{m, n} & \dots & S_{m, 0} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ S_{0, n} & \dots & S_{0, 0} \end{bmatrix},$$

получаем члены тензора, описывающего клетку C' :

$$\begin{bmatrix} S'_{p, 0} & \dots & S'_{p, q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ S'_{p, 0} & \dots & S'_{p, q} \end{bmatrix}$$

Если p и/или q являются четными, можно применить метод, описанный в разд. 4.4.1 (случай четного p) для кривых.

Сечение с помощью отображения

Предположим, что клетка C (рис. 4.68) содержит отображение L , которое соединяет главные образующие $G(0)$ и $G(1)$ и, следовательно, пересекает все изопараметрические кривые $G(u)$. Если это не выполняется, всегда можно разбить клетку C на две подклетки C' и C'' так, что хотя бы для одной из них это условие удовлетворяется. Значения параметров на кривой L можно представить в виде

$$u = \sum_{h=0}^p c_h w^h, \quad v = \sum_{k=0}^p d_k w^k, \quad (4.138)$$

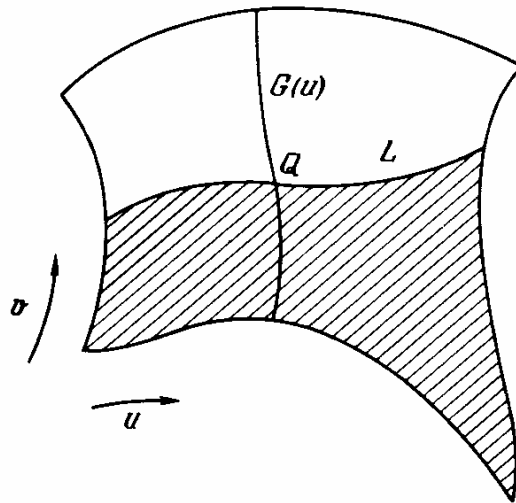


Рис. 4.68. Сечение клетки с помощью пересекающихся кривых.

т. е. параметрические координаты точки $Q(w)$, принадлежащей кривой L , являются функциями вспомогательного параметра w :

$$u(w), \quad v(w). \quad (4.139)$$

Точки кривой $G(u)$, расположенной между $H(0)$ и L , можно определить с помощью выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(w, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} [u(w)]^i [v(w)v]^j = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} \left(\sum_{h=0}^p c_h w^h \right)^i \left(v \sum_{k=0}^p d_k w^k \right)^j, \end{aligned} \quad (4.140)$$

которое эквивалентно

$$\mathbf{R}(w, v) = \sum_{i=0}^{(m+n)p} \sum_{j=0}^n \mathbf{e}_{i,j} w^i v^j. \quad (4.141)$$

Таким образом, разбиение клетки степени $(m \times n)$ отображением степени p дает две подклетки степени $[(m \times n)p] \times n$.

Общий член суммы с индексами i, j :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k,l} w^k v &= \mathbf{b}_{i,j} (c_g w^g)^i (v d_h w^h)^j = \\ &= \mathbf{b}_{i,j} (c_g)^i (d_h)^j w^{(gi+hj)} v^j, \end{aligned} \quad (4.142)$$

где

$$l = j \text{ и } k = gi + hj. \quad (4.143)$$

Существует еще одно решение, теоретически менее обоснованное, но которое требует меньшего объема вычислений и большего объема машинной памяти. Оно состоит в использовании определенных значений u , соответствующих точкам кривой L в качестве пределов образующих $G(u)$.

4.4.3. Обобщенный подход к деформациям

В этом разделе мы рассмотрим объекты, составленные из определенного числа сшитых друг с другом клеток, и решим задачу исправления формы объекта с помощью задания смещения нескольких его точек. Проследим шаг за шагом деформацию объекта по мере удаления от зоны начального построения.

Основные идеи

Параметрический базис. Обозначим через R_1 ортогональный базис, заданный тремя единичными векторами OX , OY и OZ . Координаты в этом базисе обозначим через (x, y, z) (рис. 4.69). Рассмотрим трехпараметрический базис R_2 , совпадающий в своей начальной форме с базисом R_1 . Он представляет собой решетку (разд. 4.3.3), образованную одинаковыми ячейками (рис. 4.70), стороны которых соответственно равны OX/p , OY/q , OZ/r и вершины расположены в точках

$$T_{i,j,k}, \text{ где } i \in [0, p], j \in [0, q], k \in [0, r]. \quad (4.144)$$

Параметрические координаты точки $P(x, y, z)$ в этом случае будут равны $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Деформация решетки. Предположим, что необходимо переместить точку $P(x, y, z)$ на вектор δ . Для этого переместим вершину $T_{i,j,k}$ с координатами $i \approx px$, $j \approx qy$, $k \approx rz$, расположенную наиболее близко к этой точке. Перемещение этой вершины Δ должно удовлетворять соотношению

$$\delta = \Delta[\mathcal{B}_{i,p}(\xi) \mathcal{B}_{j,q}(\eta) \mathcal{B}_{k,r}(\zeta)], \quad (4.145)$$

где величина в квадратных скобках близка к $3 \cdot 10^{-2}$. Другими словами,

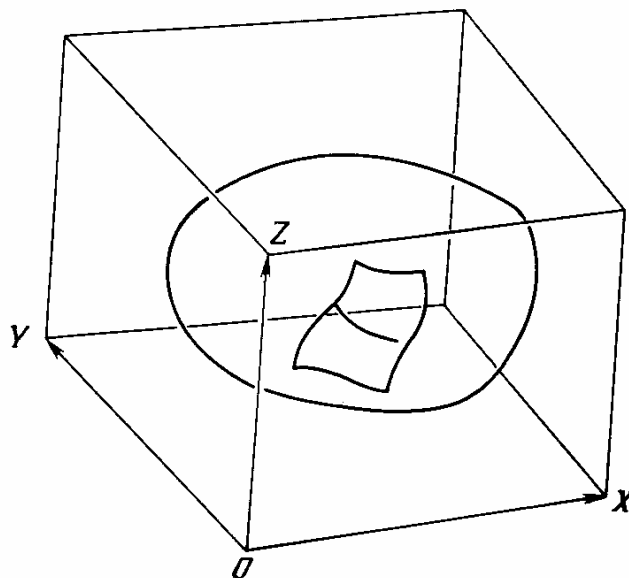


Рис. 4.69. Ортогональный базис.

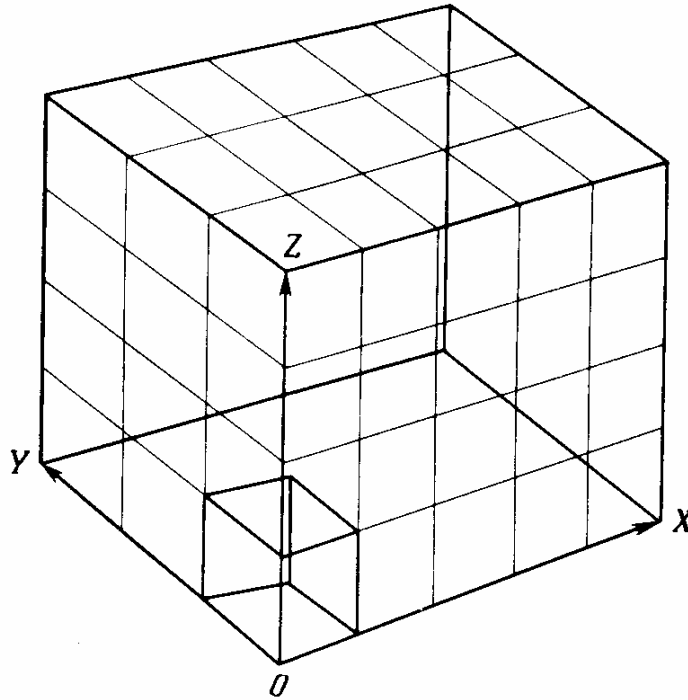


Рис. 4.70. Характеристическая решетка трехмерного базиса.

смещение вершины Δ составляет

$$\Delta = \delta \frac{1}{\mathcal{B}_{i,p}(\xi) \mathcal{B}_{j,q}(\eta) \mathcal{B}_{k,r}(\zeta)}. \quad (4.146)$$

Определим полную деформацию объекта, у которого λ точек $P(\xi_g, \eta_g, \zeta_g)$, $g \in [1, \lambda]$ испытывают перемещение на векторы δ_g (часть из них может быть равна нулю).

Для этого сместим λ вершин, которые обозначим через $T_{i,j,k}$, где

$$i \approx p\xi_l, \quad j_l \approx q\eta_l, \quad k_l \approx r\zeta_l, \quad (4.147)$$

и смещение каждой вершины обозначим через Δ_l . Изменение положения каждой вершины Δ_l приводит к изменению положения каждой точки P_g равному

$$\delta_g = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \sum_{l=1}^{\lambda} \Delta_l \mathcal{B}_{i,p}(\xi_g) \mathcal{B}_{j,q}(\eta_g) \mathcal{B}_{k,r}(\zeta_g). \quad (4.148)$$

При заданных величинах δ_g векторы Δ_l являются корнями системы линейных уравнений (4.148).

После этого вершины T_l в исходной решетке заменяются на T'_l :

$$\mathbf{T}'_l = \mathbf{T}_l + \Delta_l.$$

Таким образом определяется новое параметрическое пространство R_3 , вершинами решетки которого являются

- 1) найденные точки $T'_{i,j,k}$;
- 2) $[(p+1)(q+1)(r+1) - \lambda]$ вершин пространства R_2 , не испытавших смещения.

Зная вершины решетки пространства R_3 , можно определить коэффициенты $\mathbf{b}_{i,j,k}$, описывающие модифицированную поверхность.

Координаты точки. Если координатами точки P в пространстве R_3 были ξ, η, ζ , то после рассмотренного выше преобразования координатами точки P' в пространстве R_3 будут

$$\mathbf{P}'(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \mathbf{b}_{i,j,k} \xi^i \eta^j \zeta^k. \quad (4.149)$$

Особенности практического использования

Выражение (4.149), несмотря на свою простоту, плохо приспособлено для вычислений в реальном времени. Преобразуем его к более удобному виду, хотя при этом может снизиться точность вычислений.

Рассмотрим клетку, определенную в пространстве R_1 с помощью $[(m+1)(n+1)]$ вершин S_{gh} . Текущая точка клетки определяется выражением

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{g,h} u^i v^j = \mathbf{P}(\xi_{u,v}, \eta_{u,v}, \zeta_{u,v}). \quad (4.150)$$

После преобразования пространства R_2 в R_3 координаты точки стали равны

$$\mathbf{P}'(u, v) = \mathbf{P}'(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \beta_{i,j,k} \xi^i \eta^j \zeta^k. \quad (4.151)$$

Для нахождения вершины, близко расположенной к перемещаемой точке, необходимо величинам p, q и r присвоить значения 8 или 10. Для того чтобы объект находился в пространстве R_1 , его координаты должны находиться в пределах от 0,1 до 0,9. Тем не менее, если объект обладает плоскостью симметрии, целесообразно совместить ее с поверхностью R_1 , так чтобы в пространстве R_1 находилась только половина объекта. При переходе от пространства R_2 к R_3 теоретически надо подвергнуть преобразованию каждую точку поверхности объекта, но это приведет к увеличению степени выражений, значительно превышающему возможности современных ЭВМ. Поэтому обычно ограничиваются модификацией декартовых координат вершин характеристической сетки.

Очевидно, в таком случае непрерывность между двумя соседними клетками не всегда сохраняется, что может привести к необходимости более сложной обработки.

4.5. СШИВКА

4.5.1. Общий случай

Кривые

Сшивка по касательной. Если концы двух отрезков кривых совмещены в одной точке и кривые являются касательными друг к другу в этой точке,

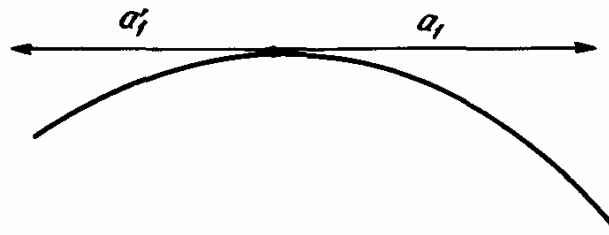


Рис. 4.71. Сшивка двух кривых по касательной.

то первый ненулевой вектор характеристического многоугольника одной кривой коллинеарен первому ненулевому вектору характеристического многоугольника другой, что можно выразить с помощью соотношения

$$\mathbf{a}'_1 = g\mathbf{a}_1, \quad (4.152)$$

где g — отличный от нуля скаляр.

Если $g < 0$, кривые выходят из общей точки в противоположных направлениях (рис. 4.71). Если $g > 0$, кривые выходят в одном направлении (рис. 4.72).

Сшивка с сохранением кривизны. Для того чтобы две кривые имели одинаковую кривизну в общей точке, они должны иметь один и тот же центр кривизны в этой точке и, следовательно, должны выполняться следующие 4 условия:

1. Наличие одной и той же касательной к обеим кривым, что соответствует условию (4.152).

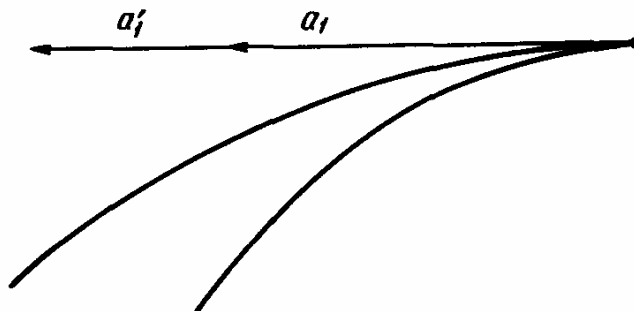
2. Совпадение плоскостей кривизны к обеим кривым, что означает компланарность векторов \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}'_1 и \mathbf{a}'_2 (рис. 4.73):

$$\mathbf{a}'_2 = h\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2. \quad (4.153)$$

3. Одинаковое направление векторов главных нормалей, т. е.

$$k > 0. \quad (4.154)$$

4. Совпадение значений радиусов кривизны.

Рис. 4.72. Сшивка двух кривых по касательной (случай $g > 0$).

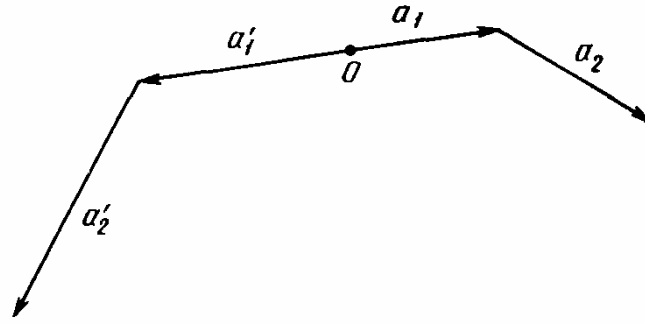


Рис. 4.73. Первые векторы характеристических многоугольников двух кривых, сшитые с сохранением кривизны.

Если C и C' являются кривыми степеней соответственно m и m' , то

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}(0)}{du} &= m\mathbf{a}_1, \\ \frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} &= m(m-1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \\ \frac{d\mathbf{P}(0)}{du} \times \frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} &= m^2(m-1)(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \\ R(0) &= \frac{(m|\mathbf{a}_1|)^3}{m^2(m-1)|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m}{(m-1)} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Кроме того,

$$R'(0) = \frac{m'}{m'-1} \frac{|\mathbf{a}'_1|^3}{|\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2|}. \quad (4.156)$$

Заменяя в выражении (4.156) \mathbf{a}'_1 и \mathbf{a}'_2 значениями из формул (4.152) и (4.153), получим

$$\begin{aligned} R'(0) &= \frac{m'}{m'-1} \frac{|g\mathbf{a}_1|^3}{|g\mathbf{a}_1| \times |(h\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2)|} = \\ &= \frac{m'}{m'-1} \frac{g^3}{gk} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m'}{m'-1} \frac{g^2}{k} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Для того чтобы обеспечить равенство выражений (4.155) и (4.156), необходимо и достаточно

$$\frac{m}{m-1} = \frac{m'}{m'-1} \frac{g^2}{k} \quad (4.158)$$

или

$$k = g^2 \frac{m'}{m} \frac{m-1}{m'-1}. \quad (4.159)$$

Заметим, что условие (4.154) выполняется одновременно с условием (4.159); таким образом, сшивка с сохранением непрерывности кривизны обеспечивается при выполнении условий (4.153) и (4.159).

Поверхности

Сшивка по касательной. Рассмотрим две клетки C и C' (рис. 4.74) степеней соответственно $(m \times n)$ и $(m \times n')$, имеющих в качестве общей границы совпадающие кривые $\mathbf{P}(u, 0)$ и $\mathbf{P}'(u, 0)$. Касательные к изопараметрическим кривым $\mathbf{P}(u_0, v)$ и $\mathbf{P}'(u_0, w)$ в общей точке $\mathbf{P}(u_0, 0) = \mathbf{P}'(u_0, 0)$ определяются выражениями $\partial\mathbf{P}(u_0, 0)/\partial v$ и $\partial\mathbf{P}'(u_0, 0)/\partial w$.

Для того чтобы клетки C и C' были касательны друг другу в точке $\mathbf{P}(u, 0)$, необходима и достаточна компланарность трех векторов $\partial\mathbf{P}(u, 0)/\partial v$, $\partial\mathbf{P}(u, 0)/\partial u$ и $\partial\mathbf{P}'(u, 0)/\partial w$.

Это условие можно записать следующим образом:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} \times \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u} \right] \frac{\partial\mathbf{P}'(u, 0)}{\partial w} \equiv 0, \quad (4.160)$$

но более предпочтительно использовать его в следующей форме:

$$\frac{\partial\mathbf{P}'(u, 0)}{\partial w} = h(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} + k(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u}, \quad (4.161)$$

где вид полиномиальных функций h и k зависит от особенностей решаемой задачи.

Для клетки C' , которая описывается поверхностью степени $(m \times n')$, текущая точка первой вспомогательной образующей $\mathbf{R}(u)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u) &= \mathbf{P}'(u, 0) + \frac{1}{n'} \frac{\partial\mathbf{P}'}{\partial w} = \\ &= \mathbf{P}(u, 0) + \frac{1}{n'} \left[h(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} + k(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u} \right]. \end{aligned} \quad (4.162)$$

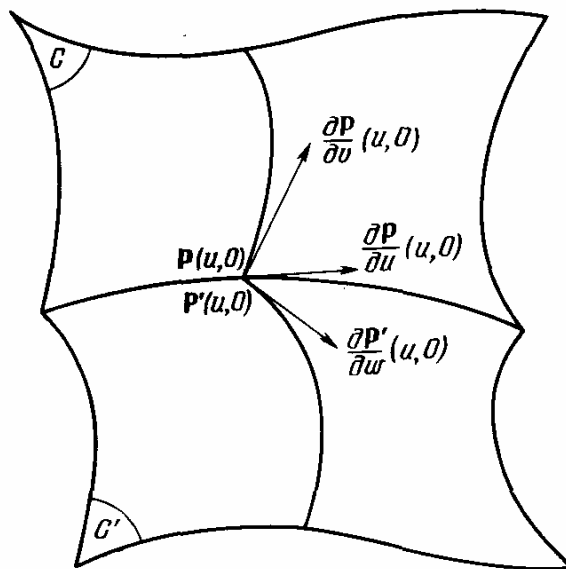


Рис. 4.74. Сшивка по касательной двух клеток.

Степени слагаемых в квадратных скобках равны соответственно

$$(\eta + m) \text{ и } (\chi + n - 1), \quad (4.163)$$

где η и χ — степени функций h и k относительно параметра u .

Тогда выражение для R можно представить в виде

$$R(u) = \sum_{i=0}^{m'} s_i \mathcal{B}_{i, m}(u), \quad (4.164)$$

где m' равно наибольшему из двух значений (4.163).

Отметим, что степень поверхности, описывающей клетку C' , становится равной $(m' + n')$ и что ограничивающая кривая $P(u, v)$ рассматривается как кривая степени m , когда она принадлежит клетке C , и как кривая степени m' для клетки C' . Таким образом, ее степень искусственно поднимается от m до m' (разд. 4.4.1, увеличение числа вершин характеристического многоугольника).

Тем не менее для других главных или вспомогательных образующих можно обойтись только фиктивным увеличением степени. Так, при определении условий сшивки между клетками C' и C'' (рис. 4.75) не потребуется бесполезного увеличения степени C'' .

Реально наиболее простой случай соответствует условиям: $h(u) = \text{const}$, $k(u) = 0$.

Рассмотрим характеристические многоугольники главной образующей D , текущей точкой которой является $P(u, 0)$, и первой вспомогательной образующей D_1 с текущей точкой $R(u)$ (рис. 4.76). Вершинами многоугольников являются соответственно точки $S_{i, 0}$ и $S_{i, 1}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(u, 0)}{\partial v} &= n[R(u) - P(u, 0)], \\ \frac{\partial P(u, 0)}{\partial v} &= n \sum_{i=0}^m (s_{i, 1} - s_{i, 0}) \mathcal{B}_{i, m}(u). \end{aligned} \quad (4.165)$$

Векторы, связывающие одноименные вершины характеристических многоугольников D и D_1 , можно представить в виде $\alpha_i = s_{i, 1} - s_{i, 0}$.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial P(u, 0)}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m \alpha_i \mathcal{B}_{i, m}(u). \quad (4.166)$$

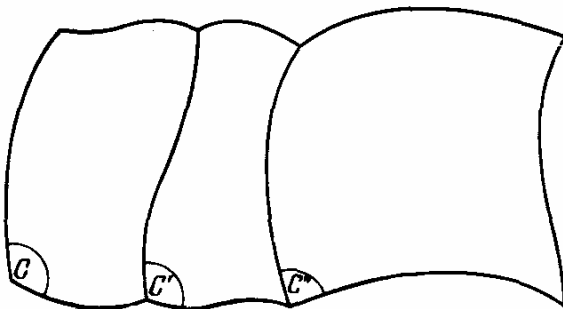


Рис. 4.75. Сшивка клеток C' и C'' .

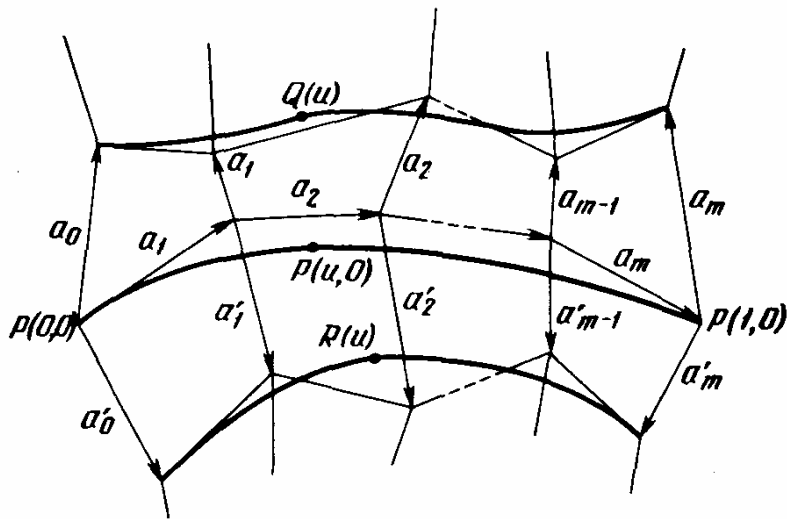


Рис. 4.76. Сшивка клеток по касательным.

Следовательно, производные по v и w коллинеарны, а их величины пропорциональны с коэффициентом

$$\frac{\alpha_i}{\alpha'_i} = h = \text{const.} \quad (4.167)$$

На этом свойстве основан метод модификации клетки без изменения соседних. Проведем две изопараметрические кривые $G(u_0, v)$ и $H(u, v_0)$, проходящие через точку максимального смещения $P(u, v_0)$. В результате получим четыре подклетки, согласующиеся между собой по правилу (4.162), где

$$h = \frac{u_0}{1 - u_0}; k = 0 \text{ и } h = \frac{v_0}{1 - v_0}; k = 0. \quad (4.168)$$

$P(u_0, v_0)$ является общей угловой точкой для четырех начальных ячеек характеристических сеток подклеток (рис. 4.77), стороны которых пред-

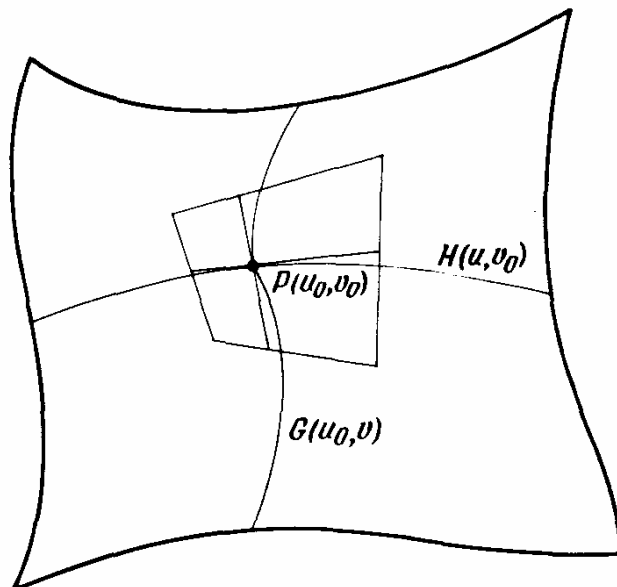


Рис. 4.77. Модификация клетки без изменения граничных условий.

ставляют собой образующие гиперболического параболоида. Затем можно вместо $P(u_0, v_0)$ произвольным образом выбрать другую точку $P'(u_0, v_0)$, построив для нее гиперболический параболоид, удовлетворяющий только одному условию, определяемому выражением (4.168).

Таким образом, происходит точная сшивка четырех подклеток, условия сшивки вдоль граничной кривой C не меняются и она сохраняет свою исходную степень.

Отметим еще одно свойство, которое состоит в том, что параллельность векторов α'_i является достаточным условием параллельности векторов α_i без ограничения на величину их модулей. В этом случае цилиндр с направляющей D_0 и образующими, параллельными α_i , будет касаться кривой C , а кривая D'_1 будет иметь ту же степень m , что и кривые D и D_1 .

Сшивка более высокого порядка. В этом случае для поверхностей можно использовать те же идеи, которые легли в основу методов сшивки кривых (разд. 4.2.5, сшивка более высокого порядка), но их реализация является более трудоемкой.

4.5.2. Специальные случаи

Отображения

Рассмотрим две клетки C и C' (рис. 4.78), общей границей которых является кривая D . Каждая из клеток содержит отображение, обозначенное L или L' , которое пересекает кривую D в точке P . На рис. 4.79 представлено эквивалентное изображение в декартовых координатах. Аналогами клеток C и C' являются квадратные клетки Γ и Γ' , а аналогами кривых L и L' являются кривые Λ и Λ' , которые сходятся в точке Π , лежащей на граничной прямой Δ . Прямые θ и θ' , касательные к кривым Λ и Λ' в точке Π , образуют углы ψ и ψ' с нормалью к Δ . Аналогами касательных θ и θ' на рис. 4.78 являются прямые T и T' , касательные к кривым L и L'

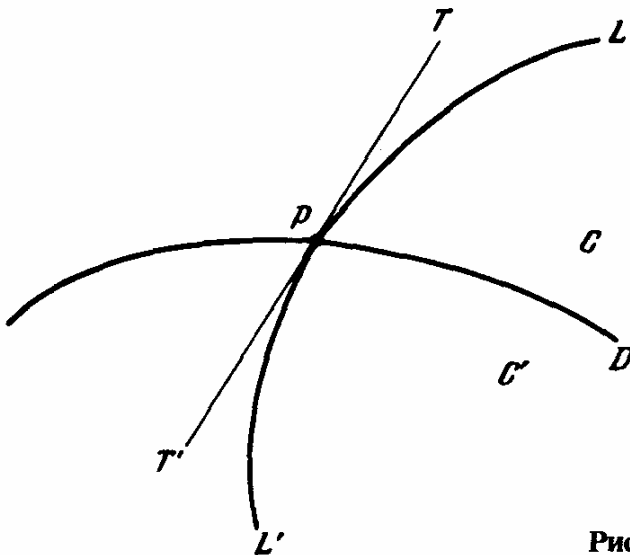


Рис. 4.78. Сшивка пересекающихся кривых.

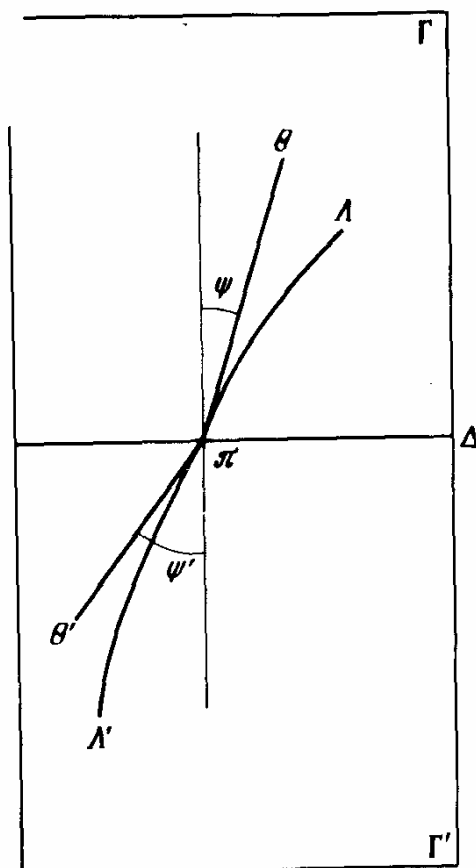


Рис. 4.79. Изображение пересекающихся кривых.

в точке P , удовлетворяющие следующим условиям:

$$T \text{ параллельно } \frac{\partial P}{\partial v} \cos \psi + \frac{\partial P}{\partial u} \sin \psi,$$

или

$$T \text{ параллельно } \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial u} \operatorname{tg} \psi, \tag{4.169}$$

а также

$$T' \text{ параллельно } \frac{\partial P'}{\partial w} + \frac{\partial P'}{\partial u} \operatorname{tg} \psi'.$$

С учетом выражения (4.161) имеем

$$T' \text{ параллельно } h(u) \frac{\partial P'}{\partial v} + [k(u) + \operatorname{tg} \psi'] \frac{\partial P'}{\partial u}. \tag{4.170}$$

Для того чтобы прямые T и T' были параллельны (коллинеарны), необходимо, чтобы в выражениях (4.169) и (4.170) коэффициенты при $\partial P/\partial u$ и $\partial P/\partial v$ были пропорциональны, т. е.

$$\frac{1}{h(u)} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{k(u) + \operatorname{tg} \psi'},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi' = \operatorname{tg} \psi h(u) - k(u).$$

Клетки

Примыкающие клетки. Если несколько клеток имеют общую угловую точку, их векторные коэффициенты должны удовлетворять определенным условиям. При этом следует различать случаи четного и нечетного числа клеток, сходящихся в общей точке, хотя подход к решению задачи в обоих случаях одинаков. Ниже рассмотрены случаи примыкания 4 и 3 клеток. Случай большего числа клеток не представляет принципиальных трудностей, хотя возрастание объема вычислений может служить ограничивающим фактором.

Случай четырех клеток. На рис. 4.80 представлены четыре клетки C , C' , C'' и C''' , текущие точки которых обозначим через $P(u, v)$, $P'(u, w)$, $P''(t, v)$ и $P'''(t, w)$. Будем считать заранее известной клетку C и определим правила сшивки с ней клеток C' по линии $P(u, 0)$ и C'' по линии $P(0, v)$. Обозначим через (h', k') и (h'', k'') условия плавного касания при сшивке соответствующих клеток на основе выражения (4.161).

Отметим также, что при нахождении клеток C' и C'' может оказаться необходимым принять во внимание целый ряд условий. Необходимым условием такого типа является, например, сшивка с клеткой C''' с обеспечением плавного касания (h_1', k_1') и (h_1'', k_1'') .

Если считать, что правила (h', k') и (h'', k'') заранее определены, то сшивку клеток следует производить таким образом, чтобы гарантировать их выполнение.

Для упрощения формул положим сначала, что степени поверхностей, описывающих все четыре клетки, равны $(m \times n)$. Зная характеристическую сетку клетки C и правило (h, k) , находим вершины $S'(i, 0)$ и $S'(i, 1)$ харак-

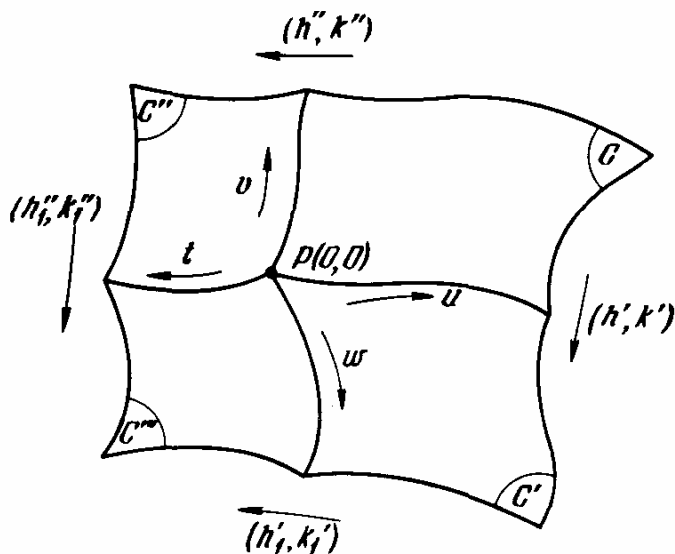


Рис. 4.80. Сшивка четырех примыкающих клеток.

теристической сетки клетки C' (рис. 4.81). Таким же образом, используя правило (h'', k'') , определяем вершины $S''(0, j)$ и $S''(1, j)$ характеристической сетки клетки C'' . Правила (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) позволяют найти вершины характеристической сетки клетки C''' , из которых $S'''(0, 1)$, $S'''(1, 0)$ и $S'''(1, 1)$ определяются дважды — из условий сшивки клетки C''' с клетками C' и C'' . Это накладывает дополнительные ограничения на правила сшивки (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) , так как оба способа нахождения вершин должны давать один и тот же результат.

Вершины ячейки характеристической сетки клетки C'' степени $(m \times n)$, содержащей точку $P(0, 0)$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 s_{0,0} &= \mathbf{P}(0, 0) = \mathbf{b}_{1,0}, \\
 s_{0,1} &= \mathbf{P}(0, 0) + \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial n} = \mathbf{b}_{0,0} + \frac{1}{m} \mathbf{b}_{1,0}, \\
 s_{1,0} &= \mathbf{P}(0, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} = \mathbf{b}_{0,0} + \frac{1}{n} \mathbf{b}_{0,1}, \\
 s_{1,1} &= \mathbf{P}(0, 0) + \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} + \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} = \\
 &= \mathbf{b}_{0,0} + \frac{1}{m} \mathbf{b}_{1,0} + \frac{1}{n} \mathbf{b}_{0,1} + \frac{1}{mn} \mathbf{b}_{1,1}.
 \end{aligned} \tag{4.171}$$

Ограничения, налагаемые на (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) , приводят к идентичности векторных коэффициентов $\mathbf{b}''_{1,0}$, $\mathbf{b}''_{0,1}$ и $\mathbf{b}''_{1,1}$, полученных двумя способами: сшивкой клеток по цепочке C, C' и C''' и по цепочке C, C'' и C''' . Идентичность точки $P(0, 0)$ очевидна.

Для простоты положим, что точка $P(0, 0)$ совпадает с началом декарто-

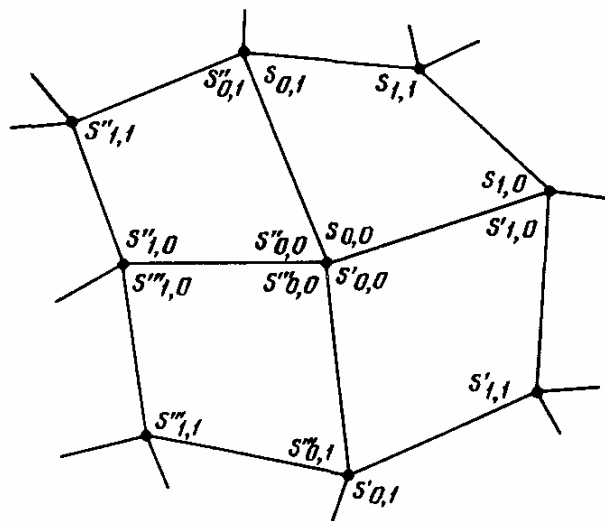


Рис. 4.81. Решетка угловых точек характеристических сеток четырех примыкающих клеток.

вой системы координат, т. е. $\mathbf{b}_{0,0} = 0$. Для клетки C' имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} = \mathbf{b}_{1,0}, \quad (4.172)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} h'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} k'(0) = \mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0), \quad (4.173)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w} &= \frac{d}{du} \left[\frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} \right] = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} h'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} \frac{dh'(0)}{du} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u^2} k'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} \frac{dk'(0)}{du} = \\ &= \mathbf{b}_{1,1} h'(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} - 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dk'(0)}{du}, \end{aligned} \quad (4.174)$$

так как $\frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u^2} = \frac{d^2 \mathbf{b}_{2,0} u^2}{du^2} = 2\mathbf{b}_{2,0}$.

Аналогичные формулы справедливы и для клетки C'' :

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} = \mathbf{b}_{0,1}, \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} h''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} k''(0) = \mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0), \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t \partial v} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} h''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} \frac{\partial h''(0)}{dv} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v^2} k''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} \frac{dk''(0)}{dv} = \\ &= \mathbf{b}_{1,1} h''(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dk''(0)}{dv}. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Для сшивки клетки C''' с клеткой C' необходимо выполнение условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0), \\ \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} h'_1(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} k'_1(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.178)$$

С учетом выражений (4.172) и (4.173) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \mathbf{b}_{1,0} h'_1(0) + [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] k'_1(0) = \\ &= \mathbf{b}_{1,0} [h'_1(0) + k'(0) k'_1(0)] + \mathbf{b}_{0,1} h'(0) k'_1(0). \end{aligned} \quad (4.179)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w} h_1'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} \frac{dh_1'(0)}{dw} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w^2} k_1'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} \frac{dk_1'(0)}{dw} \end{aligned}$$

или с учетом выражений (4.172)—(4.174):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \left[\mathbf{b}_{1,1} h'(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dk'(0)}{du} \right] h_1'(0) + \\ &+ \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh_1'(0)}{dw} + 2\mathbf{b}'_{0,2} k_1'(0) + [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] \frac{dk_1'(0)}{dw} = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} \left[h_1'(0) \frac{dh'(0)}{du} + h'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} \right] + \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh_1'(0)}{dw} + \right. \\ &\quad \left. + k'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} + h_1'(0) \frac{dk'(0)}{du} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,1} h'(0) h_1'(0) + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) h_1'(0) + 2\mathbf{b}'_{0,2} k_1'(0). \end{aligned} \quad (4.180)$$

Сшивка клетки C''' с клеткой C'' выполняется аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} = \mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0), \\ \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} h_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} k_1''(0), \end{aligned} \right\} \quad (4.181)$$

или с учетом выражений (4.175) и (4.176)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \mathbf{b}_{0,1} h_1''(0) + [\mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0)] k_1''(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} [h_1''(0) + k''(0) k_1''(0)] + \mathbf{b}_{1,0} h''(0) k_1''(0). \end{aligned} \quad (4.182)$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t \partial v} h_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} \frac{dh_1''(0)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t^2} k_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} \frac{dk_1''(0)}{dt} \end{aligned}$$

и с учетом выражений (4.175)—(4.177):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \left[\mathbf{b}_{1,1} h''(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh''(0)}{dv} + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dk''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) \right] h_1''(0) + \\ &+ \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh_1''(0)}{dt} + 2\mathbf{b}'_{2,0} k_1''(0) + [\mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0)] \frac{dk_1''(0)}{dt} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{dk''(0)}{dv} h_1''(0) + \frac{dh_1''(0)}{dt} + k''(0) \frac{dk_1''(0)}{dt} \right] + \\
&\quad + \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh''(0)}{dv} h_1''(0) + \frac{dk_1''(0)}{dt} h''(0) \right] + \\
&\quad + \mathbf{b}_{1,1} h''(0) h_1''(0) + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) h_1''(0) + 2\mathbf{b}_{2,0} k_1''(0). \tag{4.183}
\end{aligned}$$

Условия на (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) приводят к идентичности выражений (4.178) и (4.182), (4.179) и (4.181), а также (4.180) и (4.183).

Из идентичности выражений (4.178) и (4.182) следует

$$\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0) = \mathbf{b}_{0,1} [h_1''(0) + k''(0) [k_1''(0)]] + \mathbf{b}_{1,0} h''(0) k_1''(0),$$

откуда

$$\begin{aligned}
h'(0) &= h_1''(0) + k''(0) k_1''(0), \\
k'(0) &= h''(0) k_1''(0) \tag{4.184}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
k_1''(0) &= \frac{k'(0)}{h''(0)}, \\
h_1''(0) &= \frac{h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)}{h''(0)}.
\end{aligned}$$

Из идентичности выражений (4.179) и (4.181) имеем

$$\mathbf{b}_{1,0} [h'_i(0) + k'(0) k'_i(0)] + \mathbf{b}_{0,1} h'(0) k'_i(0) = \mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0),$$

откуда

$$h'_i(0) + k'(0) k'_i(0) = h''(0)$$

и

$$\begin{aligned}
h'(0) k'_i(0) &= k''(0), \\
k'_i(0) &= \frac{k''(0)}{h'(0)}, \tag{4.185}
\end{aligned}$$

$$h'_i(0) = \frac{h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)}{h'(0)}.$$

Идентичность выражений (4.180) и (4.183) с учетом (4.184) и (4.185) дает

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)}{h'(0)} \frac{dh'(0)}{du} + h'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} \right] + \\
&+ \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh_1'(0)}{dw} + k'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} + \frac{h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)}{h'(0)} \frac{dk'(0)}{du} \right] + \\
&\quad + \mathbf{b}_{1,1} [h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)] + \\
&\quad + 2\mathbf{b}_{2,0} \frac{k'(0) [h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)]}{h'(0)} + 2\mathbf{b}'_{0,2} \frac{k''(0)}{h'(0)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h''(0)} \frac{dh''(0)}{dv} + h''(0) \frac{dk_1''(0)}{dt} \right] + \\
&+ \mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{dh_1''(0)}{dt} + k''(0) \frac{dk_1''(0)}{dt} + \frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h''(0)} \frac{dk''(0)}{dv} \right] + \\
&\quad + \mathbf{b}_{1,1} [h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)] + \\
&\quad + 2\mathbf{b}_{0,2} \frac{k''(0)[h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)]}{h''(0)} + 2\mathbf{b}_{2,0}'' \frac{k'(0)}{h''(0)}. \tag{4.186}
\end{aligned}$$

После нахождения клеток C , C' и C'' коэффициенты, участвующие в определении клетки C''' , можно разбить на две категории:

1. $h_1'(0)$, $k_1'(0)$, $h_1''(0)$ и $k_1''(0)$, которые находятся непосредственно из соотношений (4.178) и (4.179), как только правила (h', k') и (h'', k'') становятся известными.

2. $dh_1'(0)/dw$, $dk_1'(0)/dw$, $dh_1''(0)/dt$ и $dk_1''(0)/dt$, которые должны удовлетворять условиям (4.186).

Замечания.

1. Вектор $\mathbf{b}_{1,1}$ появляется с одним и тем же коэффициентом в двух членах выражения (4.186), что в данном случае не приводит к особым ограничениям.

2. Векторы $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$ в выражении (4.186) не являются независимыми, один из них может быть выражен через три других.

3. Если $k'(0)$ и $k''(0)$ равны нулю, то кривые $P(u, 0)$, $P'(0, w)$, $P''(0, v)$ и $P'''(t, 0)$ являются попарно касательными в точке $P(0, 0)$, и для векторов $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$ из формулы (4.186) нарушается справедливость предыдущего замечания. В этом случае из выражений (4.184) и (4.185) следует

$$h_1'(0) = h''(0), \quad h_1''(0) = h(0), \quad k_1'(0) = k''(0). \tag{4.187}$$

4. Если $k'(0) = k''(0)$ и выполняются условия

$$\frac{dh'(0)}{du} = \frac{dh''(0)}{dv} = \frac{dh_1'(0)}{dw} = \frac{dh_1''(0)}{dt} = 0,$$

то формула (4.186) справедлива при выполнении следующих условий:

$$\frac{dk_1'(0)}{dw} = \frac{dk''(0)}{dv}$$

и

$$\frac{dk_1''(0)}{dt} = \frac{dk'(0)}{du}. \tag{4.188}$$

В этом случае не накладывается никаких ограничений на векторы $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$.

Случай трех клеток. Рассмотрим три клетки C , C' и C'' (рис. 4.82), текущие точки которых обозначим через $P(u, v)$, $P'(u, w)$ и $P''(w, v)$. Обо-

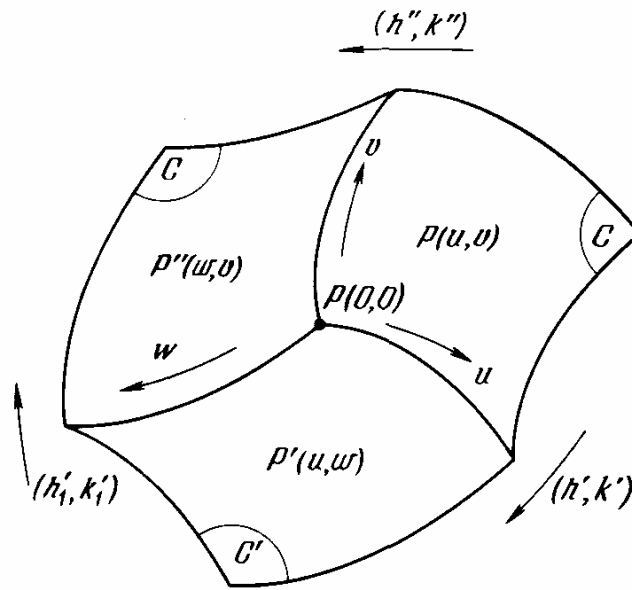


Рис. 4.82. Сшивка трех примыкающих клеток.

значим через (h, k) и (h', k') правила сшивки клетки C соответственно с клетками C' и C'' по границам $P(u, 0)$ и $P(0, v)$, а через (h'', k'') — правило сшивки клеток C' и C'' .

Задача состоит в том, что по заранее известным правилам (h', k') и (h'', k'') нужно определить дополнительные условия, накладываемые на правило (h'', k'') . Как и в разд. 4.5.2, предположим, что все три клетки имеют степень $(m \times m)$ и точка $P(0, 0)$ совмещена с началом декартовой системы координат. Из выражений (4.172)—(4.174) следует

$$\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial u} = \mathbf{b}_{1,0}, \quad (4.189)$$

$$\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0), \quad (4.190)$$

а также

$$\frac{\partial^2 P'(0, 0)}{\partial u \partial w} = \mathbf{b}_{1,1}h'(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0}k'(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dk'(0)}{du}. \quad (4.191)$$

Правило (h'', k'') сшивки клеток C' и C'' определяется по аналогии с выражениями (4.175)—(4.177):

$$\frac{\partial P''(0, 0)}{\partial v} = \mathbf{b}_{0,1}, \quad (4.192)$$

$$\frac{\partial P''(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{1,0}h''(0) + \mathbf{b}_{0,1}k''(0), \quad (4.193)$$

$$\frac{\partial^2 P''(0, 0)}{\partial v \partial w} = \mathbf{b}_{1,1}h''(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2}k''(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dk''(0)}{dv}. \quad (4.194)$$

Сшивка клеток C' и C'' по правилу (h'', k'') определяется следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0), \quad (4.195)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} h'_i(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} k'_i(0) = \\ &= \mathbf{b}_{1,0} h'_i(0) + [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] k'_i(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} h'(0) k'_i(0) + \mathbf{b}_{1,0} [h'_i(0) + k'(0) k'_i(0)], \end{aligned} \quad (4.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w} h'_i(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} \frac{dh'_i(0)}{du} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w^2} k'_i(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} \frac{dk'_i(0)}{dw} = \\ &= \left[\mathbf{b}_{1,1} h'(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dk'(0)}{du} \right] h'_i(0) + \\ &+ [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] \frac{dk'_i(0)}{dw} + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh'_i(0)}{dw} + 2\mathbf{b}'_{0,2} k'_i(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} \left[h'_i(0) \frac{dh'(0)}{du} + h'(0) \frac{dk'_i(0)}{dw} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{0,1} \left[h'_i(0) \frac{dk'(0)}{du} + \frac{dh'_i(0)}{dw} + k'(0) \frac{dk'_i(0)}{dw} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,1} h'(0) h'_i(0) + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) h'_i(0) + 2\mathbf{b}'_{0,2} k'_i(0). \end{aligned} \quad (4.197)$$

Из необходимости идентичности выражений (4.193) и (4.195), (4.192) и (4.196), а также (4.194) и (4.197) можно вывести условия, которым должны удовлетворять функции h'' и k'' .

Так, из идентичности выражений (4.193) и (4.195) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1} k''(0) + \mathbf{b}_{1,0} h''(0) &= \mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0), \\ h''(0) &= k'(0), \\ k''(0) &= h'(0), \end{aligned} \quad (4.198)$$

а из идентичности выражений (4.192) и (4.196):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1} &= \mathbf{b}_{0,1} h'(0) k'_i(0) + \mathbf{b}_{1,0} [h'_i(0) + k'(0) k'_i(0)], \\ k'_i(0) &= \frac{1}{h'(0)}, \\ h'_i(0) &= -\frac{k'(0)}{h'(0)}. \end{aligned} \quad (4.199)$$

Идентичность выражений (4.194) и (4.197), с учетом выражений (4.189) и (4.199), приводит к тому, что

$$\begin{aligned}
& \mathbf{b}_{1,1}k'(0) + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2}h'(0) + \mathbf{b}_{0,1}\frac{dk''(0)}{dv} = \\
& = \mathbf{b}_{0,1}\left[-\frac{k'(0)}{h'(0)}\frac{dh'(0)}{du} + h'(0)\frac{dk'_1(0)}{dw}\right] + \\
& + \mathbf{b}_{1,0}\left[-\frac{k'(0)}{h'(0)}\frac{dk'(0)}{du} + \frac{dh'_1(0)}{dw} + k'(0)\frac{dk'_1(0)}{dw}\right] - \\
& - \mathbf{b}_{1,1}k'(0) - 2\mathbf{b}_{2,0}\frac{k'(0)^2}{h'(0)} + 2\mathbf{b}'_{0,2}\frac{1}{h'(0)}. \tag{4.200}
\end{aligned}$$

В выражениях (4.198)—(4.200) содержатся также условия, которым должны удовлетворять функции h'_1 и k'_1 .

Заметим, что если первые производные функций h' , k' , h'' , k'' , h'_1 и k'_1 в точке $P(0, 0)$ равны нулю, т. е. $u = v = w = 0$, выражение (4.200) преобразуется к виду

$$\mathbf{b}'_{0,2} = \mathbf{b}_{2,0} [k'(0)^2 + \mathbf{b}_{1,1}k'(0)h'(0) + \mathbf{b}_{0,2}h'(0)]^2. \tag{4.201}$$

Случай n клеток. Рассмотрим n клеток, попарно касающихся вдоль n линий L и имеющих общую угловую точку P , в которой все они имеют касательную плоскость (рис. 4.83). Предположим, что известна клетка C_1 . Тогда определение клеток C_2, C_3, \dots, C_{n-1} не вызовет принципиальных трудностей, поскольку для сшивки каждой из них необходимо только выполнить условия плавного касания с предыдущей. Клетка C_n должна плавно касаться как клетки C_1 , так и клетки C_{n-1} .

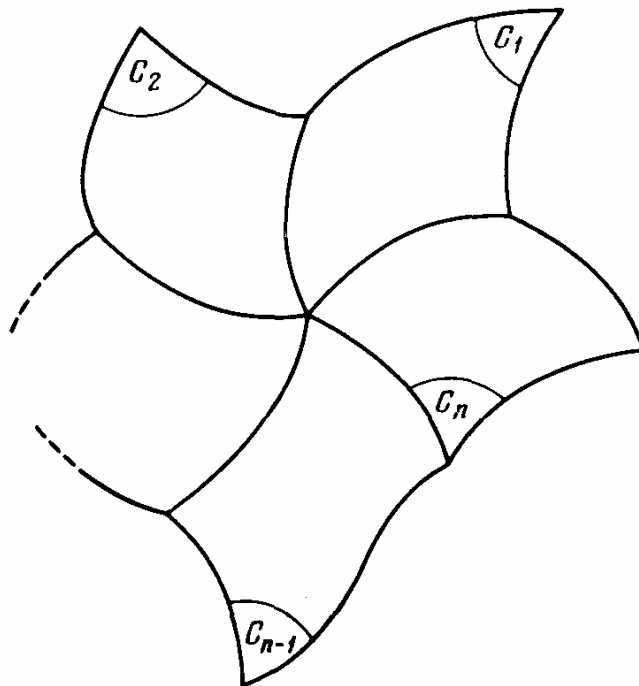


Рис. 4.83. Общий случай n примыкающих клеток.

В зависимости от того, четной или нечетной является величина n , условия сшивки этой клетки идентичны описанным в разд. 4.5.2 (случай четырех клеток).

Вспомогательные поверхности. Закругления сшиваемых клеток. Часто возникает необходимость сшивки двух клеток, которые найдены независимо друг от друга и для которых не выполняются условия плавного касания. Топологические условия взаимного расположения клеток могут быть различны, например клетки могут иметь или не иметь общей границы. Более того, назначение поверхностей клеток может быть различным, например одна поверхность играет сугубо техническую роль, а другая — в значительной степени или целиком эстетическую.

Если клетки не имеют общей границы, можно использовать методы сшивки, описанные в разд. 4.2.5. Ниже рассмотрен только случай клеток, имеющих общую границу.

Рассмотрим две клетки C' и C'' (рис. 4.84), общей границей которых является линия $L(u, 0)$. Проведем кривые L' и L'' , которые разбивают эти клетки на подклетки C'_1, C'_2, C''_1 и C''_2 . Подклетки C'_2 и C''_2 оставим без изменения, а подклетки C'_1 и C''_1 заменим на касающуюся их по линиям L' и L'' одну клетку T .

Таким образом, для выполнения сшивки с клетками C'_2 и C''_2 достаточно определить две вспомогательные образующие Δ'_1 и Δ''_1 , используя в случае необходимости рассмотренные выше методы (с помощью функций h и k). Можно также дополнительно построить вспомогательные образующие $\Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4, \dots$, обеспечив только, чтобы они были той же степени, что и кривые L' и L'' . Вершины характеристических многоугольников этих кривых будут представлять собой вершины характеристической сетки сшивающей клетки T .

В этом виде метод не очень отличается от того, который используется для нахождения произвольной клетки, кроме тех случаев, когда может потребоваться использование функций h и k для определения Δ'_1 и Δ''_1 . Затем

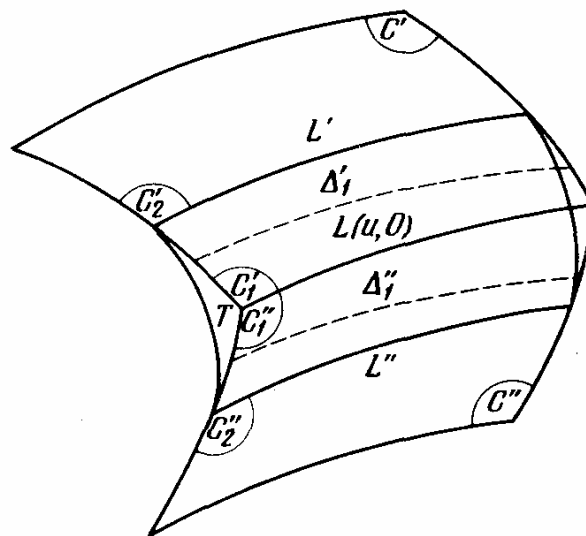


Рис. 4.84. Вспомогательная поверхность сшивки.

следует формально приравнять степени основных L' и L'' и вспомогательных $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n, \Delta''_1$ образующих. Можно также попытаться использовать более удобный с алгоритмической точки зрения метод, основанный на следующих предположениях:

- Степени клеток C'_2 и C''_2 равны соответственно $(m \times n')$ и $(m \times n'')$, а степень клетки T равна $(m \times 3)$.

- Функции сшивки имеют вид $h = \text{const}$, $k = 0$.

Для определения значения функции h можно привести следующие соображения. Характеристический многоугольник кривой L'_2 , лежащей на поверхности клетки C'_2 степени $(m \times n')$ имеет n' сторон (рис. 4.85). Если допустить, что кривые L'_2 и L''_2 не имеют резких изменений кривизны, то можно считать, что их характеристические многоугольники несильно отклоняются от самих кривых, заканчиваясь в общей с ними точке, и длина характеристического многоугольника равна $A'R = n' a'_1$ и $A''R = n'' a''_1$.

Минимальное изменение кривизны вдоль кубической кривой имеет место для значений $A'M'/A'R$ или $A''M''/A''R$, заключенных между 0,55 и 0,65, если α меняется в пределах от 45° до 90° (разд. 4.1.4, рис. 4.21). Обычно выбирают величину 0,6 тогда $h' = 0,6n'$, $h'' = 0,6n''$.

Дополнительная клетка. Рассмотрим клетки C_1, C_2, \dots, C_n , примыкающие друг к другу по граничным линиям, сходящимся в одной точке, причем примыкание осуществляется без плавного касания. Проведем в клетках изопараметрические кривые $L_1, M_1, \dots, L_n, M_n$, с помощью которых определим плавные закругления сшиваемых клеток $E_{1,2}, E_{2,3}, \dots$, по методу, описанному в разд. 4.5.2 (случай четырех клеток). После этого остается только определить поверхность F , осуществляющую сшивку поверхностей $E_{1,2}, E_{2,3}$ и т. д. (рис. 4.86).

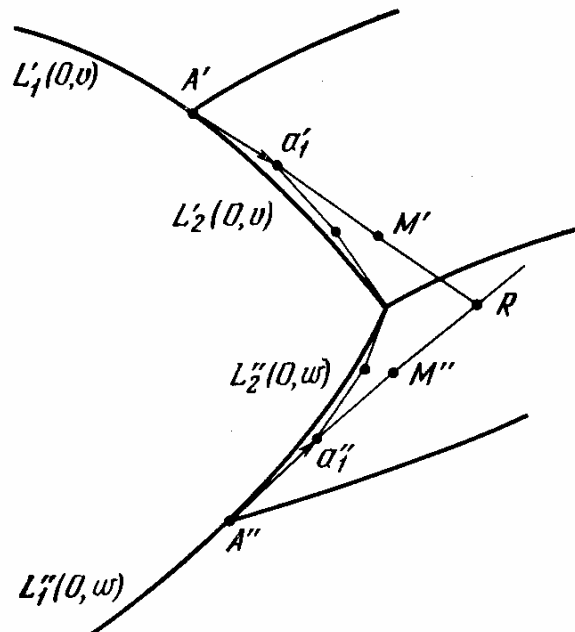


Рис. 4.85. Определение закругления сшивки.

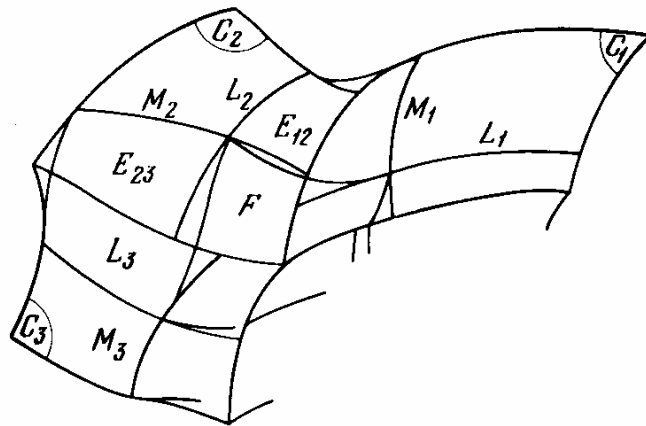


Рис. 4.86. Вспомогательные клетки для сшивки.

В общем случае на величину n — число сшиваемых поверхностей C не накладывається никаких ограничений. Следует только иметь в виду, как отмечалось в разд. 4.5.2, что имеются небольшие отличия в решении для четных и нечетных значений n .

Случай четырех поверхностей. Рассмотрим четыре клетки C_1, \dots, C_4 (рис. 4.87), полученные в результате разбиения клеток B_1, \dots, B_4 кривыми $L_1, M_1, \dots, L_4, M_4$. Определим сначала четыре сшивающие клетки $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$, степень которых равна $(m \times 3)$. Искомая поверхность F является касательной к клеткам $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$ по линиям $A_1 A_2, \dots, A_4 A_1$ и координаты точек A_1, \dots, A_4 в клетках C_1, \dots, C_4 равны $u = 0; v = 0$. Если кривые L_1, \dots, M_4 являются изопараметрическими, то функции сшивки клеток C_1, \dots, C_4 с клетками $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$ имеют вид $h(u) = \text{const}, k(u) = 0$, и если $h_{1,2}(v) = h_{2,3}(w)$, то для сшивки клеток F и $E_{1,2}$ необходимо использовать правило:

$$h'_{1,2} = h_{1,4} \text{ и } k'_{1,2} = 0.$$

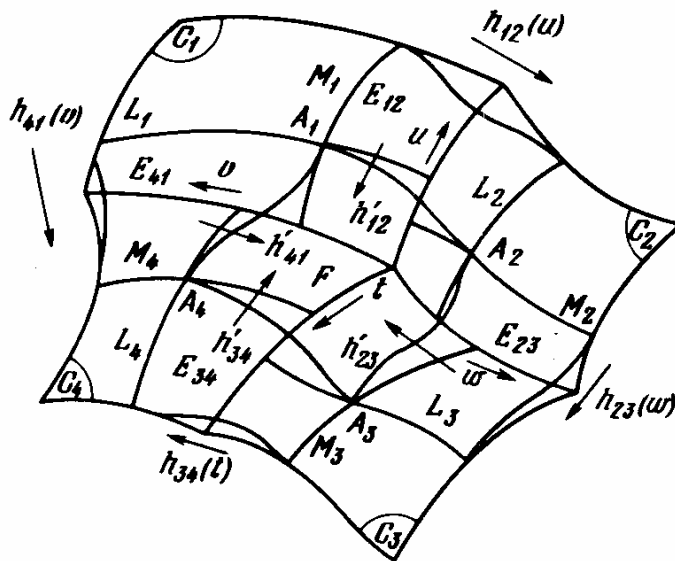


Рис. 4.87. Случай четырех вспомогательных клеток.

Если то же выполнить для всех четырех граничных линий, степень поверхности клетки F будет равна (3×3) . Но если, например, $h_{1,4} \neq h_{2,3}$, то функция $h'_{1,2}$ принимает следующий вид:

$$h'_{1,2}(\varphi) = h_{1,4}(2\varphi^3 - 3\varphi^2 + 1) + h_{2,3}(-2\varphi^3 + 3\varphi^2),$$

для того чтобы выполнялись условия

$$\frac{dh'_{1,2}(0)}{d\varphi} = \frac{dh'_{1,2}(1)}{d\varphi} = 0.$$

Выражения в скобках являются интерполяционными функциями Кунса. В этом случае степень поверхности клетки F равна (6×6) . Из 49 вершин ее характеристической сетки для получения девяти центральных вершин недостаточно использовать приведенные правила сшивки (функции h и k). Для их определения можно использовать следующий метод.

Обозначим через $S_{0,2}$, $S_{1,2}$, $S_{5,2}$ и $S_{6,2}$ вершины, полученные с помощью правил сшивки h и k . Рассмотрим вспомогательные вершины $R'_{2,2}$ и $R'_{4,2}$ (рис. 4.88), которые определим из условия равенства отрезков:

$$S_{1,2}R'_{2,2} = S_{0,2}S_{1,2}$$

и

$$S_{5,2}R'_{4,2} = S_{6,2}S_{5,2}.$$

Таким образом, у многоугольника $S_{0,2}R'_{2,2}R'_{4,2}S_{6,2}$, характеризующего кубическую кривую, мы фиктивно повышаем степень до шести за счет построения многоугольника $S_{0,2}S_{1,2}S'_{2,2}S'_{3,2}S'_{4,2}S_{5,2}S_{6,2}$.

Аналогично можно получить точки

$$S'_{2,2}, S'_{3,2}, S'_{4,2},$$

$$S'_{2,3}, S'_{3,3}, S'_{4,3},$$

$$S'_{2,4}, S'_{3,4}, S'_{4,4}.$$

Используя тот же прием, из точек

$$S_{2,0}, S_{2,1}, S_{2,5}, S_{2,6},$$

$$S_{3,0}, \dots, S_{3,6},$$

$$S_{4,0}, \dots, S_{4,6}$$

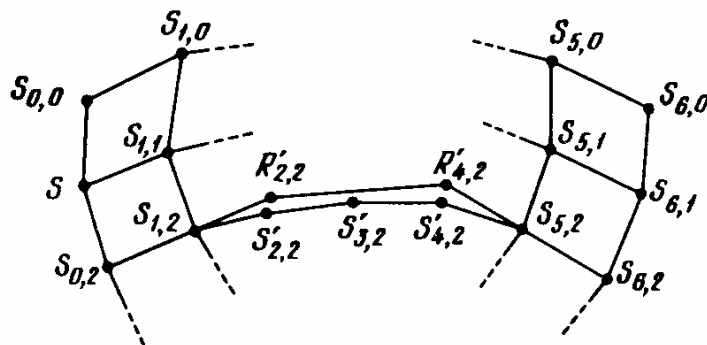


Рис. 4.88. Определение центральных точек характеристической сетки.

получают точки

$$\begin{aligned} &S''_{2,2}, S''_{2,3}, S''_{2,4}, \\ &S''_{3,2}, S''_{3,3}, S''_{3,4}, \\ &S''_{4,2}, S''_{4,3}, S''_{4,4}. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно определяются

$$S_{2,2} = \frac{S'_{2,2} + S''_{2,2}}{2}, \quad S_{3,2} = \frac{S'_{3,2} + S''_{3,2}}{2}, \quad S_{4,4} = \frac{S'_{4,4} + S''_{4,4}}{2}.$$

Случай трех поверхностей. Для этого случая используются несколько методов. Часть из них предоставляет некоторый простор для инициативы оператора и больше пригодна для решения эстетических задач, остальные же строго следуют составленному алгоритму.

Вырожденная клетка. Поверхность $A_1 A_2 A_3$ на рис. 4.89 представляет собой вырожденную клетку, сторона которой $A_4 A_1$ сведена к точке A_1 . Правило сшивки клеток C и E имеет вид $h = \text{const}$, $k = 0$, и условие $h_{1,2} = h_{3,1}$ влечет следующие выражения для правил h'_1 , h'_2 и h'_3 :

$$\begin{aligned} h'_1 &= h_{2,1} = h_{3,1}, \\ h'_2 &= h_{3,2}(-2u^3 + 3u^2), \\ h'_3 &= h_{2,3}(-2u^3 + 3u^2). \end{aligned}$$

Степень поверхности клетки F равна (6×3) .

Если $h_{2,1} \neq h_{3,1}$, выражение для h'_1 принимает вид

$$h'_1 = h_{2,1}(-2u^3 + 3u^2) + h_{3,1}(2u^3 - 3u^2 + 1),$$

а степень поверхности F равна (6×6) .

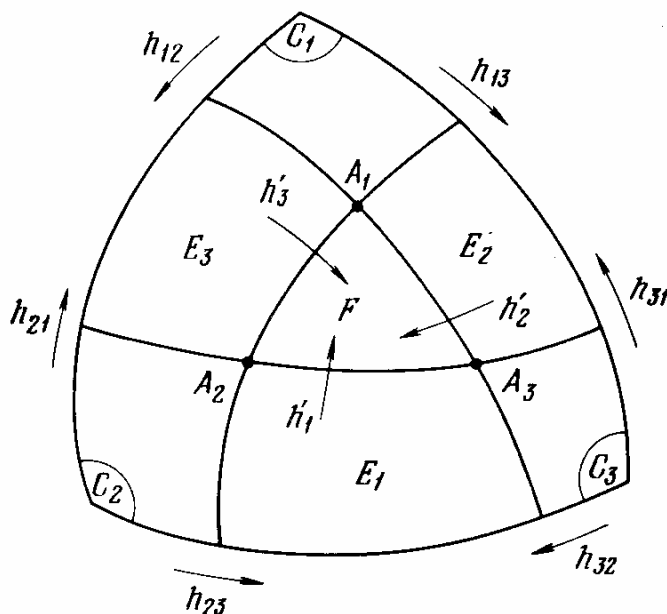


Рис. 4.89. Вырожденная клетка $A_1A_2A_3$.

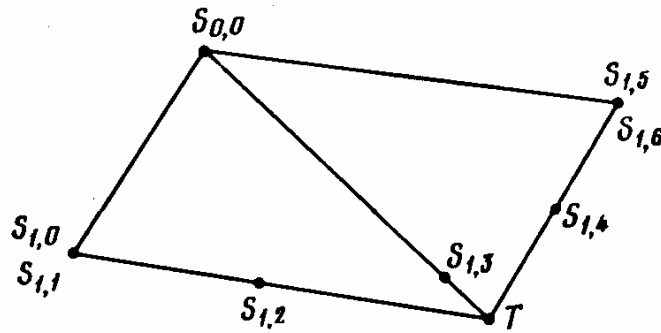


Рис. 4.90. Определение вершин характеристической сетки вырожденной клетки.

Когда степень поверхности равна (6×3) , вершины характеристической сетки определяются автоматически, а когда степень равна (6×6) , девять неопределенных вершин находятся по методу, изложенному в разд. 4.5.2 (дополнительная клетка).

Однако, как показано на рис. 4.90, вершины $S_{1,1}$ и $S_{1,5}$ совпадают соответственно с вершинами $S_{1,0}$ и $S_{1,6}$ и с помощью предыдущих методов вершины $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ и $S_{1,4}$ определить нельзя. В этом случае фигура $S_{0,0}S_{1,1}TS_{1,6}$ является параллелограммом, а точки $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ и $S_{1,4}$ могут быть определены из условий

$$\frac{S_{1,0}S_{1,2}}{S_{1,0}T} = \frac{S_{1,6}S_{1,4}}{S_{1,6}T} = 0,5,$$

$$\frac{S_{0,0}S_{1,3}}{S_{0,0}T} = 0,83.$$

Эти соотношения выбраны так, чтобы кривизна вдоль кривой, определяемой характеристическим многоугольником $S_{1,2}$, в большинстве случаев изменялась не очень сильно.

Клетка с точкой излома. На одной из трех граничных линий (рис. 4.91)

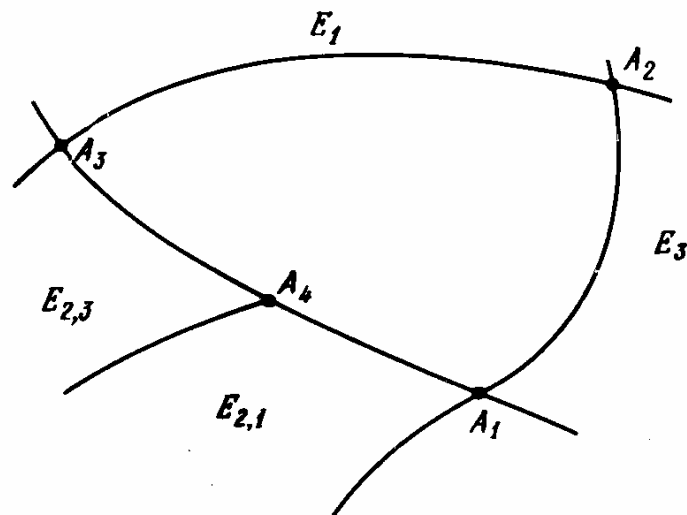


Рис. 4.91. Клетка с точкой излома.

отложим точку A_4 , для которой значение параметра u равно 0,5. Разделим клетку E_2 с помощью изопараметрической линии $L(0,5; v)$ на две полуклетки $E_{2,1}$ и $E_{2,3}$. Углами дополнительной клетки F будем считать точки A_1, A_2, A_3 и A_4 .

Заметим, что в точке A_4 частные производные $\partial P/\partial u$ и $\partial P/\partial v$ коллинеарны и что эта точка является точкой излома. Этот случай в принципе сводится к рассмотренному в разд. 4.5.2 (случай четырех поверхностей), вычисление нормали в точке A_2 выполняется не с помощью векторного произведения частных производных, а с привлечением специальной процедуры из разд. 4.2.2 (поверхности с точкой излома). Известно, что правило сшивки клеток E_2 и C_1 имеет вид

$$h_{1,3} = \text{const}, k = 0,$$

а для клеток $E_{2,1}$ и C_1

$$h' = \frac{1}{2}h_{1,2}, k' = k_{1,3} = 0.$$

Вероятно, что, кроме особых случаев, сшивка клеток E_3 и F будет описываться кубической зависимостью, хотя степень клетки F будет равна (6×6) .

Диагональное разбиение. Данный метод заключается в разбиении одной из клеток, например C_1 , пересекающей ее кривой, для которой $u = t, v = t$. Таким образом, клетка C_1 делится на две вырожденные клетки C'_1 и C''_1 (рис. 4.92), нулевая сторона которых совпадает с точкой $B = S_{m,n}$.

Клетки C'_1 и C''_1 с угловыми точками соответственно $S_{m,n}, S_{0,0}, S_{m,0}, S_{m,n}$ и $S_{m,n}, S_{0,0}, S_{0,n}, S_{m,n}$, полученные разбиением клетки $S_{0,0} S_{m,0} S_{0,n} S_{m,n}$ пересекающей кривой $L(u, v)$, можно описать с помощью следующих выражений:

$$P'(t, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} t^{(i+j)} v^j,$$

$$P''(u, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i t^{(i+j)}.$$

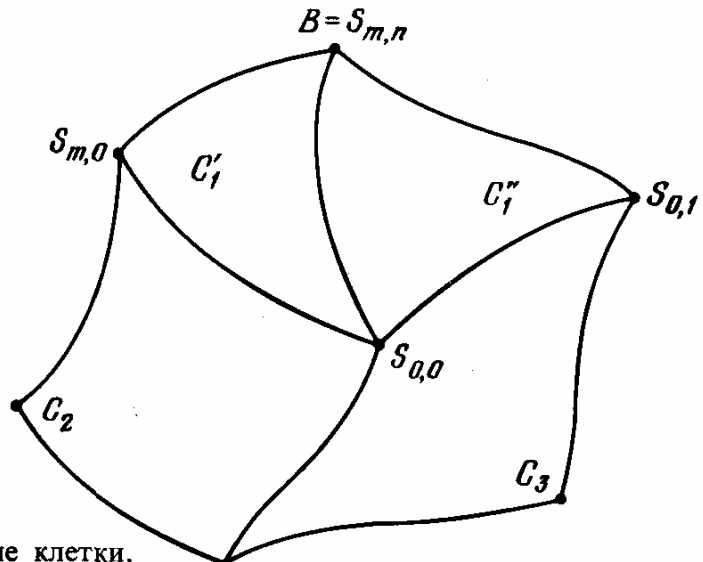


Рис. 4.92. Диагональное разбиение клетки.

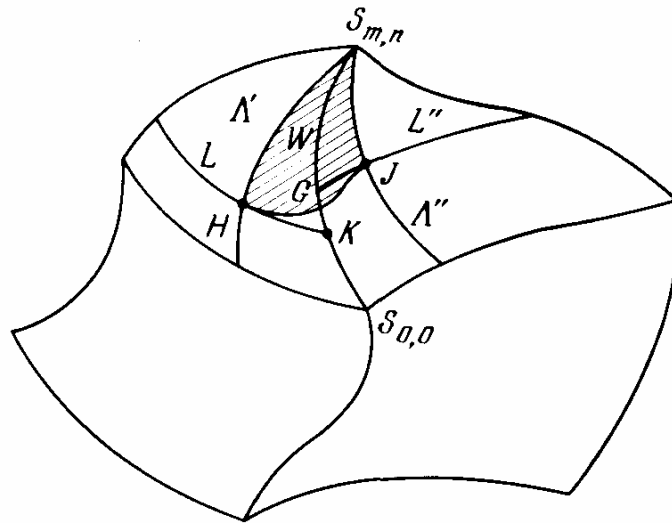


Рис. 4.93. Разбиение с помощью изопараметрических кривых.

Разбиение с помощью изопараметрических кривых. При разбиении клеток C'_1 и C''_1 с помощью изопараметрических кривых

$$L'(t'_0, v), \quad \Lambda'(t', v_0)$$

и

$$L''(u, t''_0), \quad \Lambda''(u_0, t'')$$

образуется вспомогательная клетка (рис. 4.93) степени $(m \times 3)$, и решение сводится к случаю, описанному в разд. 4.5.2 (вырожденная клетка). Заметим, что теоретически клетка $S_{m,n}HJS_{m,n}$ не совпадает с клетками $S_{m,n}HKS_{m,n}$ и $S_{m,n}GJS_{m,n}$, их нужно находить самостоятельно.

Разбиение главной образующей. В этом случае, как и прежде, клетка C_1 разбивается пересекающей кривой $(u = v)$, а подклетки C'_1 и C''_1 (рис. 4.94) разбиваются в свою очередь с помощью кривых $L'(t_0, v)$ и

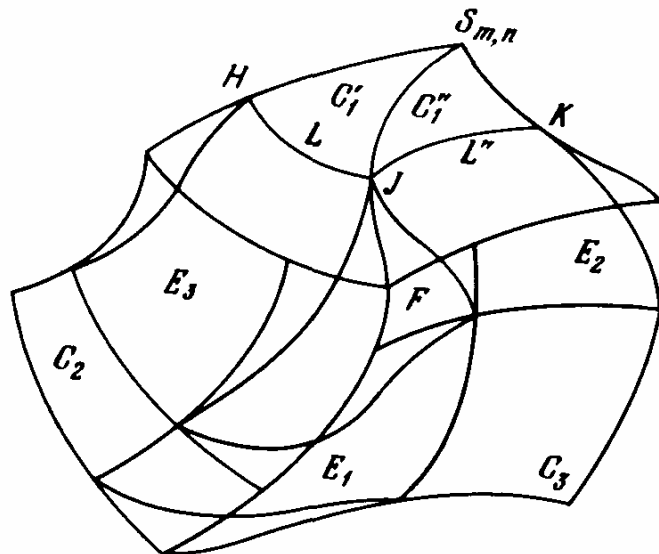


Рис. 4.94. Разбиение с помощью главных образующих.

$L''(u, t_0)$, и правило сшивки (h, k) описывается зависимостью третьей степени.

Преимущество такого решения по сравнению с предыдущим заключается в том, что клетка $S_{m,n}$ HJK является частью клетки C_1 , ограниченной кривыми L' и L'' , и полная обработка выполняется за один прием.

Разделенная клетка. Если провести разбиение трех клеток E_1 , E_2 и E_3 с помощью изопараметрических кривых, то получится шесть клеток $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, ..., $E_{3,2}$. Через произвольную точку T проведем три кривые TB_1 , TB_2 и TB_3 , которые являются границами трех клеток F_1 , F_2 и F_3 , касающихся друг друга по линиям TB_1 , TB_2 и TB_3 и одновременно касательных к клеткам $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, ..., $E_{3,2}$.

Условия, которым должно удовлетворять положение точки T , приведены в разд. 4.5.1 и 4.5.2. К ним можно добавить другие произвольные условия. Например, если требуется найти решение по строгому алгоритму, в качестве дополнительных условий можно взять следующие:

1. Разбиение клеток E_1 , E_2 и E_3 выполняется с помощью изопараметрической кривой $L(0,5; v)$.

2. Положение точки T задается на нормали к плоскости треугольника $B_1B_2B_3$, проходящей через его центр тяжести (рис. 4.95).

3. Плоскости, касательные к клеткам E_1 , E_2 и E_3 в точках B_1 , B_2 и B_3 , пересекаются с нормалью GR в точках T_1 , T_2 и T_3 . При этом положение точки T определяется следующим образом:

$$GT = (GT_1 + GT_2 + GT_3) \times 0,15.$$

Приведенное значение коэффициента 0,15 выбрано из тех соображений, что оно обеспечивает минимальное изменение кривизны клетки F при изменении углов, образуемых плоскостями, касательными к клеткам E_1 , E_2 и E_3 в точках B_1 , B_2 и B_3 в диапазоне от 90 до 180°.

4. Характеристические многоугольники граничных кривых, начинающихся в точке T , удовлетворяют следующим условиям (рис. 4.96):

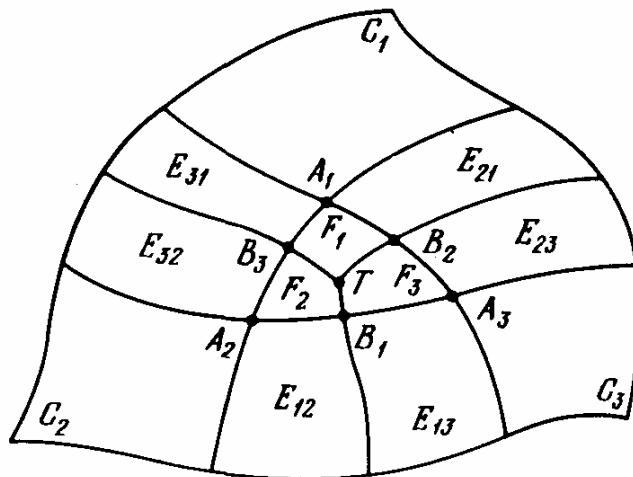


Рис. 4.95. Разделенная клетка.

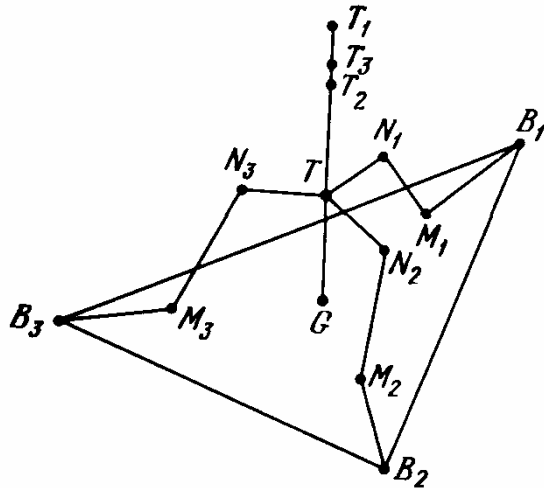


Рис. 4.96. Положение вершины T на нормали к плоскости $B_1B_2B_3$.

$$TN_1 = \frac{1}{3} GB_1,$$

...

$$B_1M_1 = \frac{1}{3} B_1G.$$

Ориентация отрезков B_1M_1 , B_2M_2 и B_3M_3 становится определенной при известных правилах сшивки клеток $E_{1,2}, \dots, E_{3,1}$, F_1 , F_2 и F_3 , например

$$h = h_0 + (h_1 - h_0)(-2u^3 + 3u^2) \text{ и } k = 0. \quad (4.202)$$

В частности, если $h_0 = h_1$, то

$$h = h_0 = \text{const.}$$

5. Для простоты используют одинаковые правила (h, k) сшивки клеток F_1 , F_2 и F_3 . Они описываются кубической зависимостью, первые производные которой равны нулю при $u = 0$ и $u = 1$ и значение которой в точках B_1 , B_2 и B_3 равны $h = 1$, $k = 0$.

6. Правило сшивки клеток $E_{2,1}$ и F_1 предусматривает, что функция h должна быть кубической, а k — нулевой. Кривая Δ_1 — первая вспомогательная образующая клетки F_1 (рис. 4.97) определяется как кривая шестой степени, при этом степень кривой A_1B_2 должна быть искусственно повышена до такого же значения, хотя на самом деле она является кубической. То же справедливо и для кривой A_1B_3 .

Затем с помощью характеристического многоугольника определяется вспомогательная образующая Δ'_1 . Вершины многоугольника лежат на серединах отрезков прямых, соединяющих одноименные вершины характеристических многоугольников кривых A_1B_2 и Δ_1 . Аналогичная процедура применяется и для Δ_1 , первой вспомогательной образующей, используемой при сшивке клеток $E_{3,1}$ и F_1 .

Правила сшивки клеток $E_{2,1}$, C_1 , $E_{3,1}$ и F_1 должны в точке A_1 удовлет-

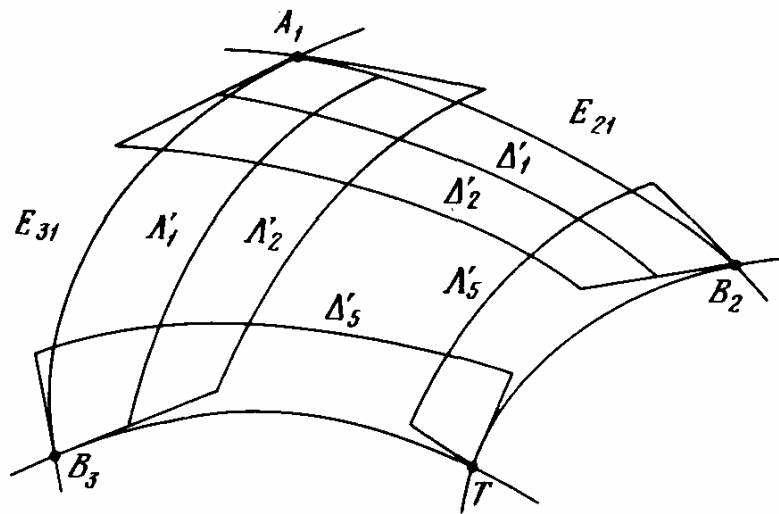


Рис. 4.97. Определение вспомогательных образующих.

ворять следующим условиям:

$$\frac{dh(0)}{du} = 0, \quad k(u) = 0.$$

При этом никаких специальных условий не накладывается на значение вторых производных в этой точке. Граничные кривые TB_2 и TB_3 являются кубическими, но их степень должна быть искусственно поднята до шести.

Для определения вспомогательных образующих Δ'_5 и Λ'_5 сначала находят четвертую вершину ячейки, одна из угловых точек которой является точкой T . С учетом условий, приведенных в разд. 4.5.2, кривые Δ'_5 и Λ'_5 являются кубическими, и так как их степени искусственно увеличиваются до шести, характеристические многоугольники имеют по шесть сторон.

Таким путем определяются сорок вершин характеристической сетки, а для нахождения девяти последних применяется метод, описанный в разд. 4.5.2 (закругления сшиваемых клеток).

7. Клетки F_2 и F_3 находятся по методу, описанному в разд. 4.5.2 (случай четырех поверхностей).

Общее решение. На поверхности клеток C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 4.98) проводятся изопараметрические или пересекающие кривые L и Λ . Клетки $E_{1,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n,1}$ определяются по методу, описанному в разд. 4.5.2 (разделенная клетка). Каждая из клеток делится изопараметрической кривой $K(0,5; v)$, а затем находятся клетки F_1, F_2, \dots, F_n , попарно касательные друг к другу, граница между которыми проходит по кривой, служащей продолжением кривой K .

Условия сшивки в точке T описаны в разд. 4.5.2 (примыкающие клетки).

Обобщение. Покажем, как можно обобщить решения, приведенные в разд. 4.5.2. Рассмотрим множество клеток, имеющих общие границы (рис. 4.99), на которых не выполняются условия сшивки по касательной. В этом случае возможно использование методов, описанных в разд. 4.5.2 (примыкающие клетки и вспомогательные поверхности).

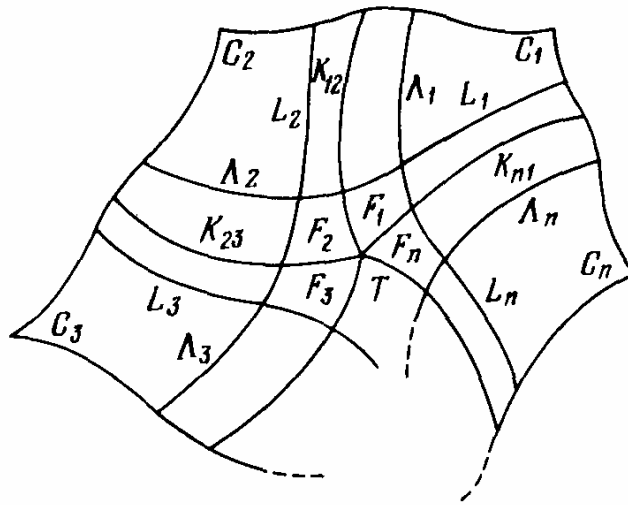


Рис. 4.98. Поверхности C_1, C_2, \dots , разделенные кривыми L и Λ .

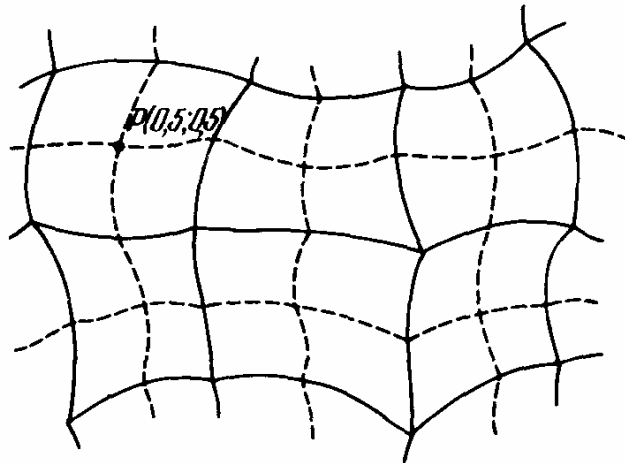
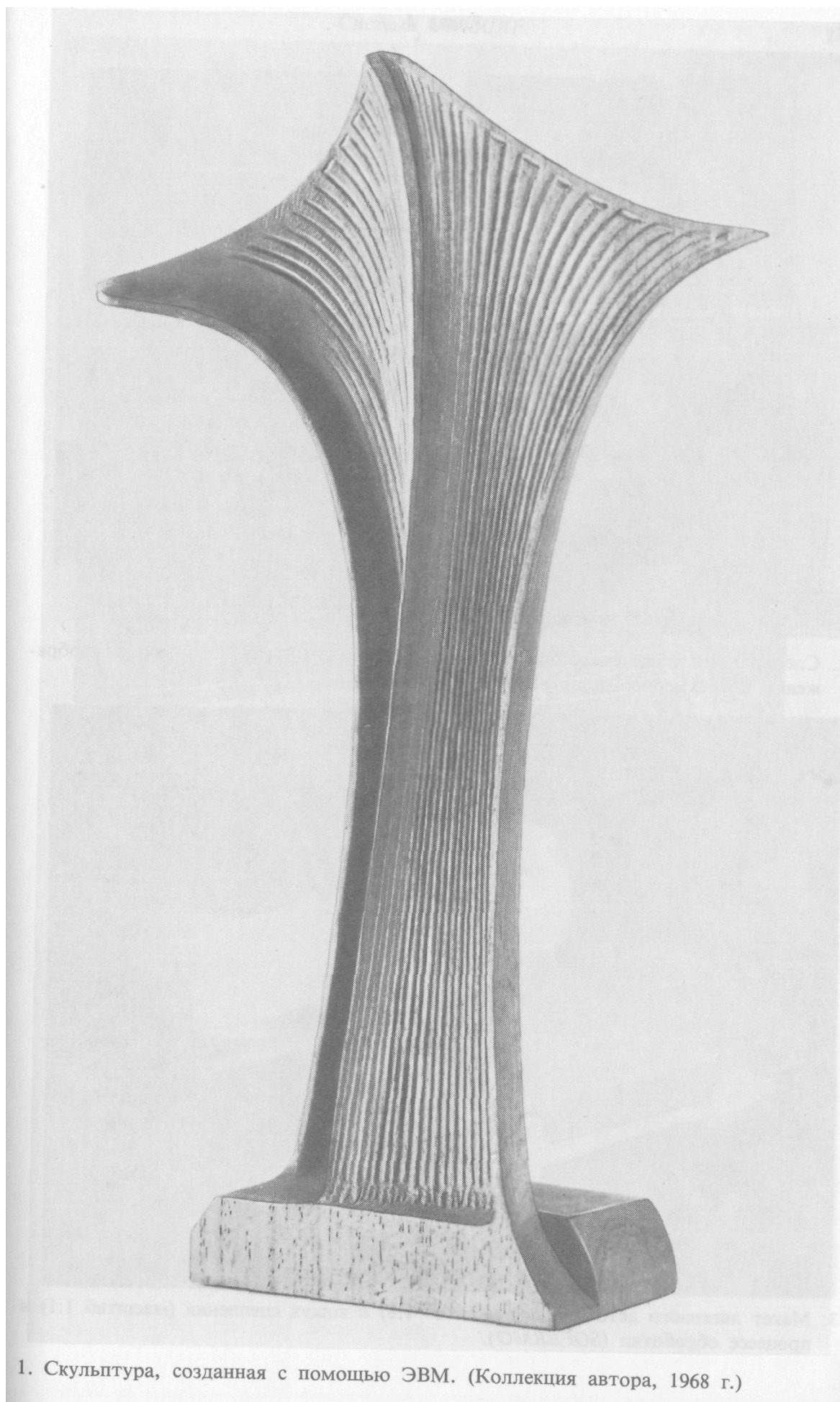


Рис. 4.99. Обобщение вспомогательных поверхностей.

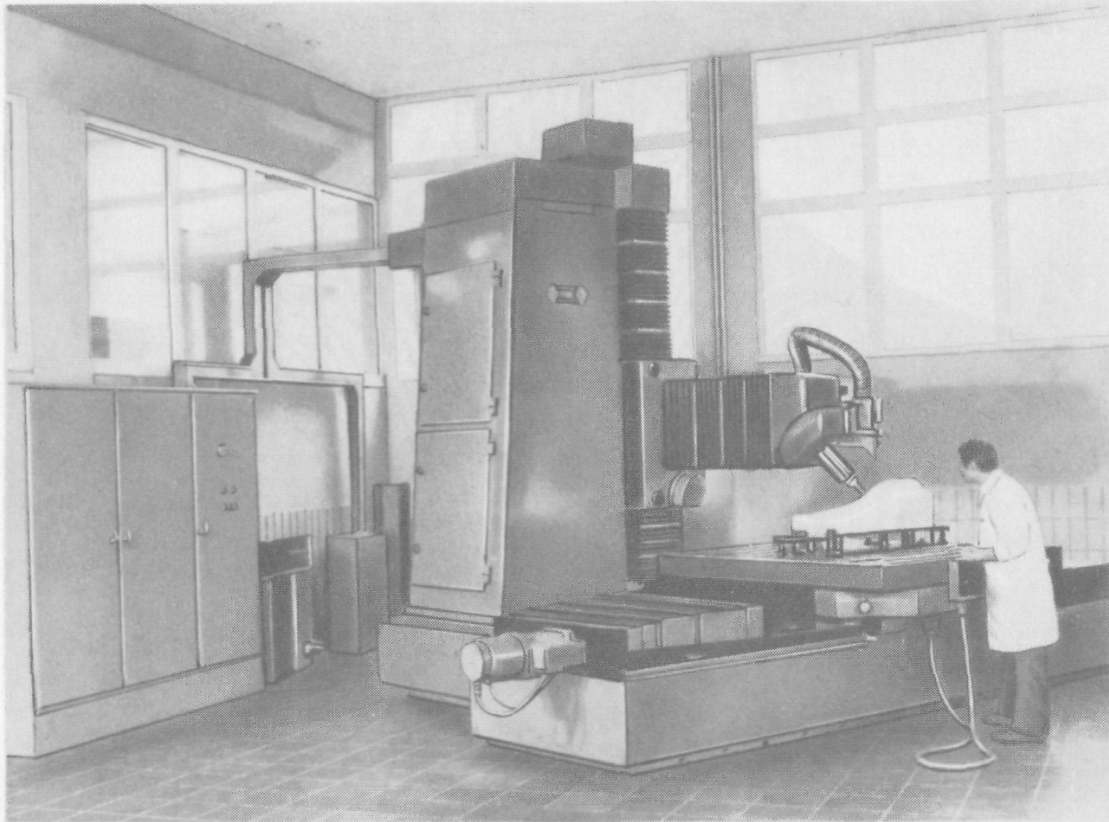
К наиболее простому решению привело бы разбиение клеток кривыми $L(u; 0,5)$ и $\Lambda(0,5; v)$. В этом случае полная поверхность состояла бы из множества клеток, описанных в разд. 4.5.2 (вспомогательные поверхности), и от исходных клеток остались бы только их центральные точки $P(u = 0,5; v = 0,5)$.

Заключение

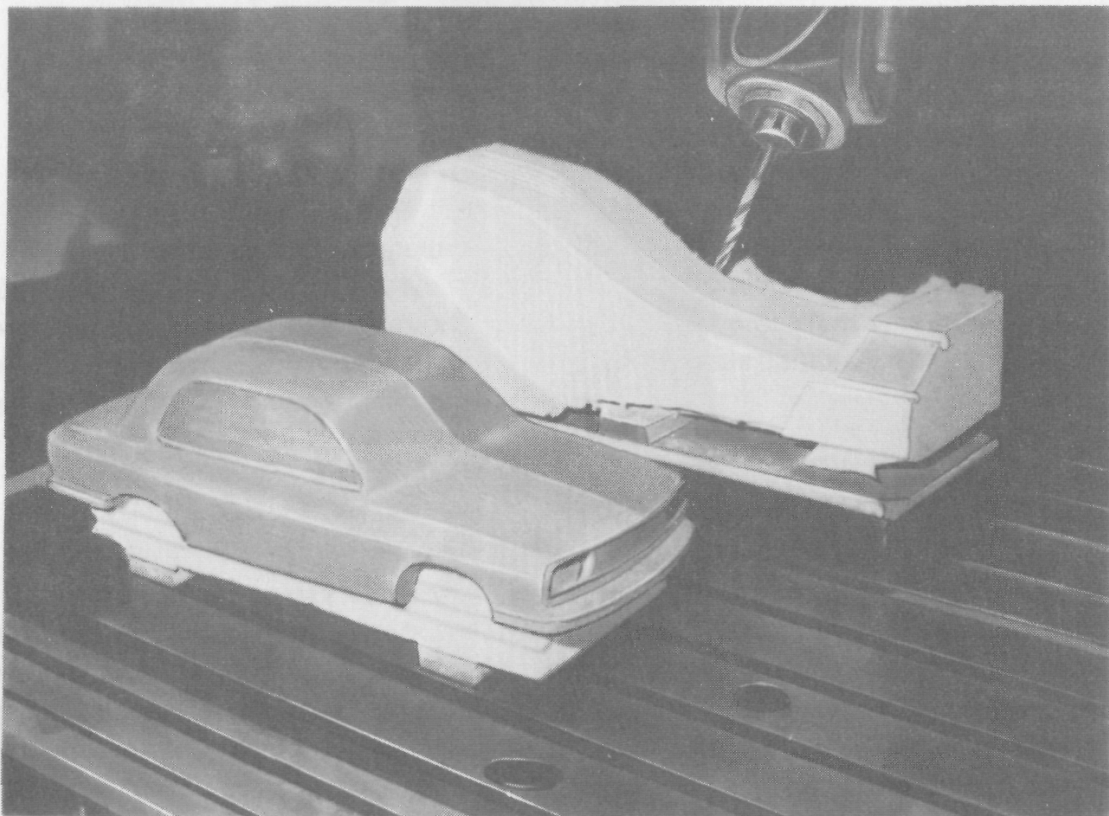
В настоящее время системы автоматизированного проектирования уже не являются чисто техническим средством. Они оказывают большое экономическое и социальное воздействие на развитие промышленности. Благодаря им появилась возможность провести исследования в области математики, механики, информатики и др. (рис. 1—10). Можно, по-видимому, уже сейчас сказать, что САПР являются реальной силой технического прогресса. Поэтому целесообразно сделать обзор и подвести некоторые итоги развития САПР.



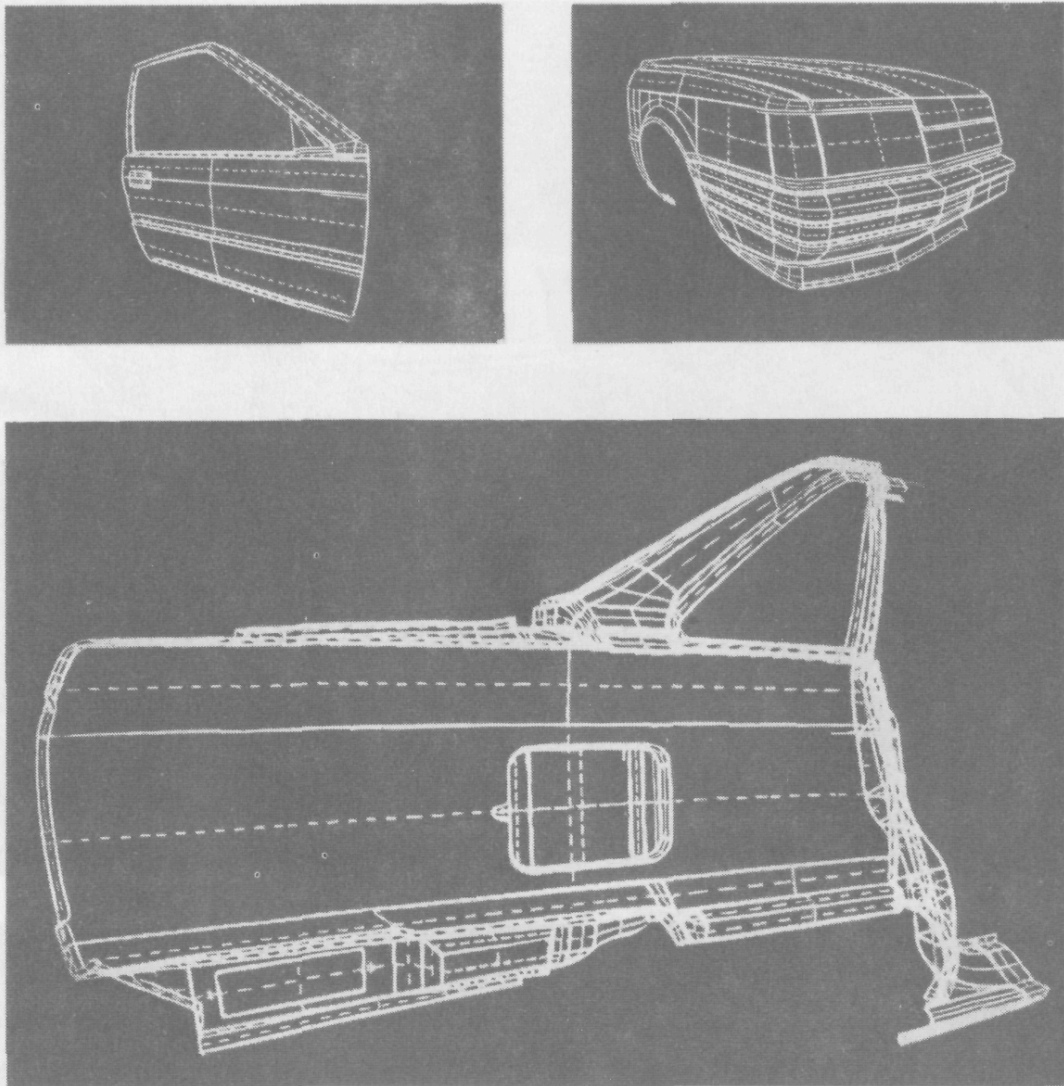
1. Скульптура, созданная с помощью ЭВМ. (Коллекция автора, 1968 г.)



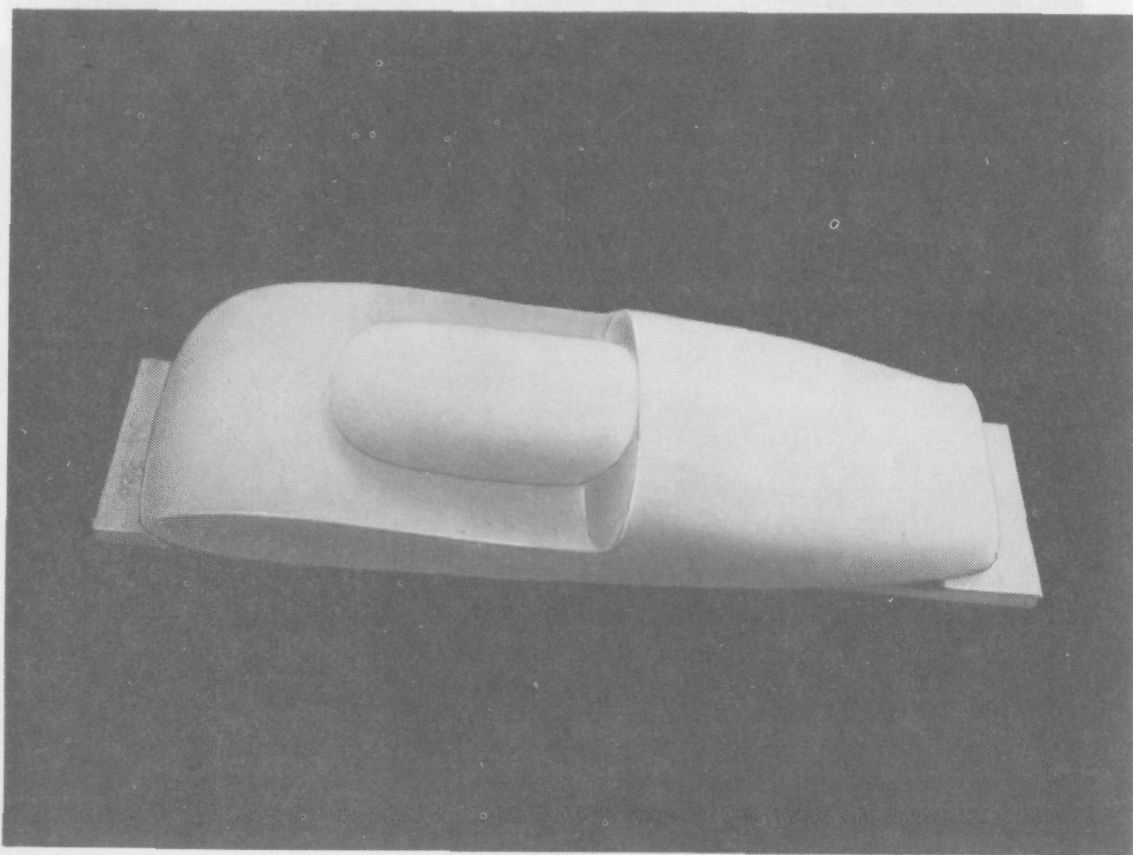
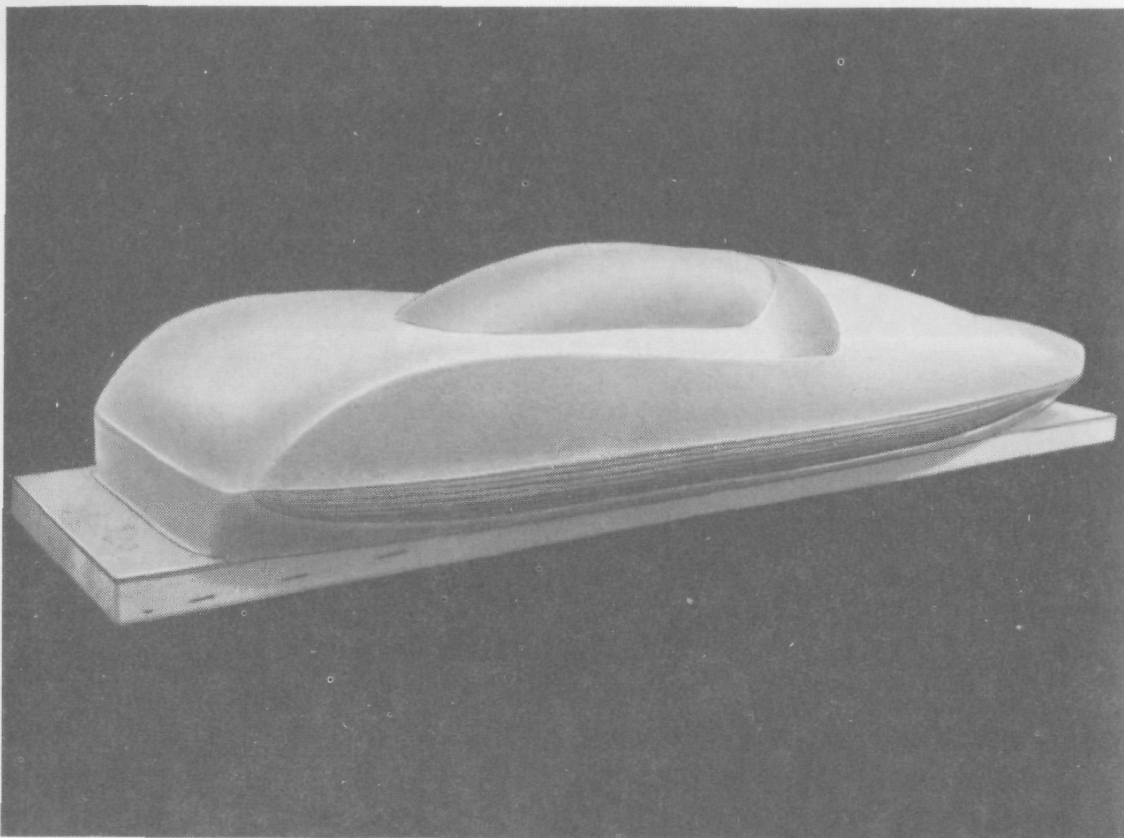
2. Специальный обрабатывающий станок, используемый как построитель изображений в трехмерном пространстве (*SOFERMO*).



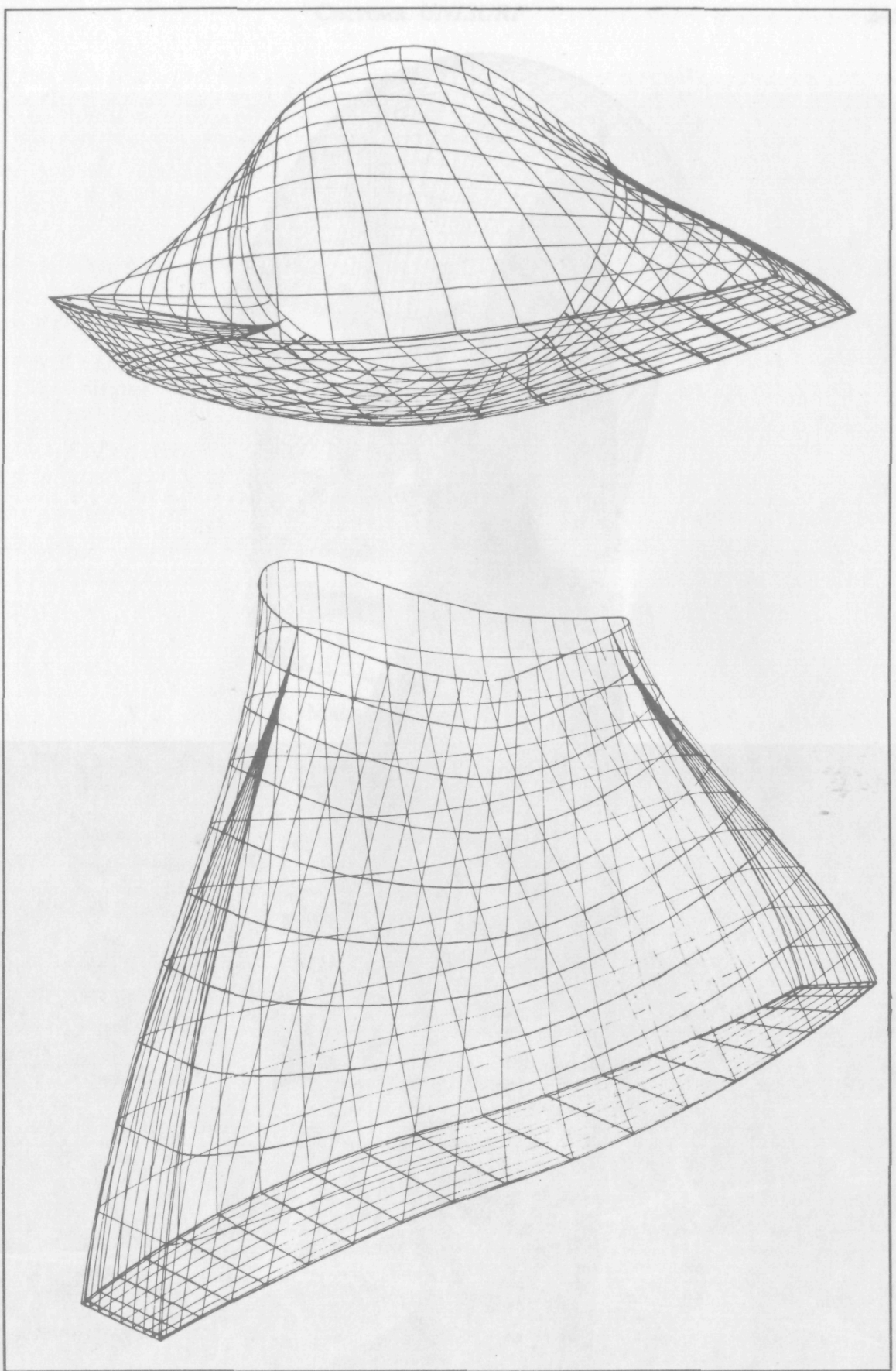
3. Макет легкового автомобиля (масштаб 1:8) и кожух сцепления (масштаб 1:1) в процессе обработки (*SOFERMO*).



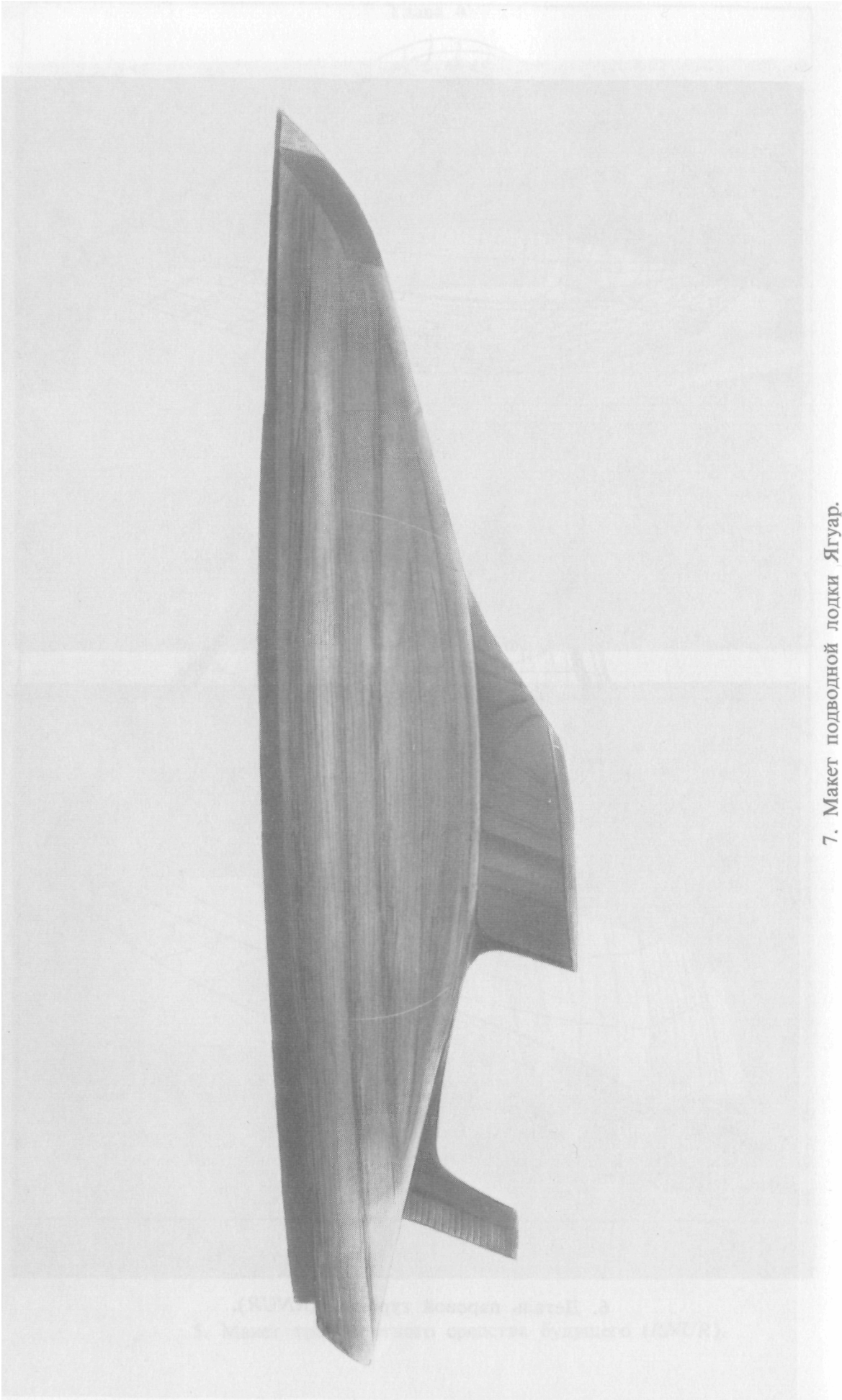
4. Детали кузова легкового автомобиля (*SOFERMO*).



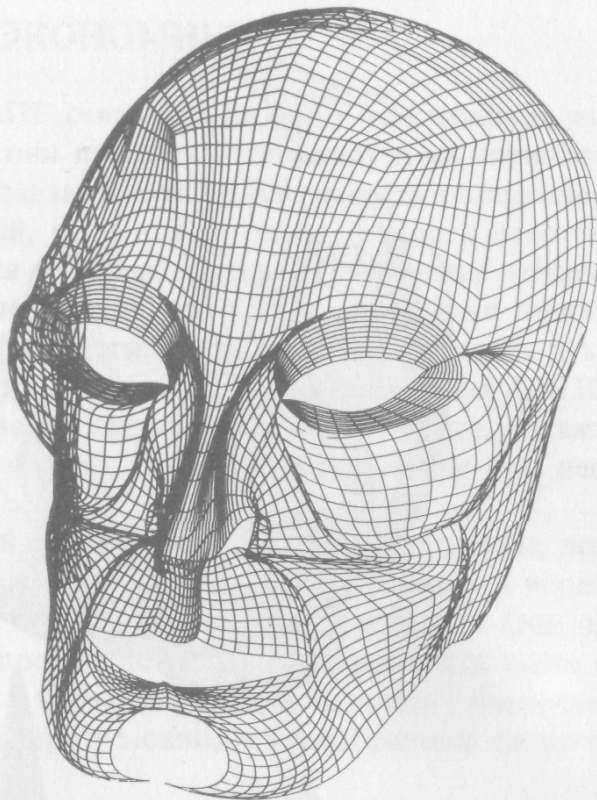
5. Макет транспортного средства будущего (RNUR).



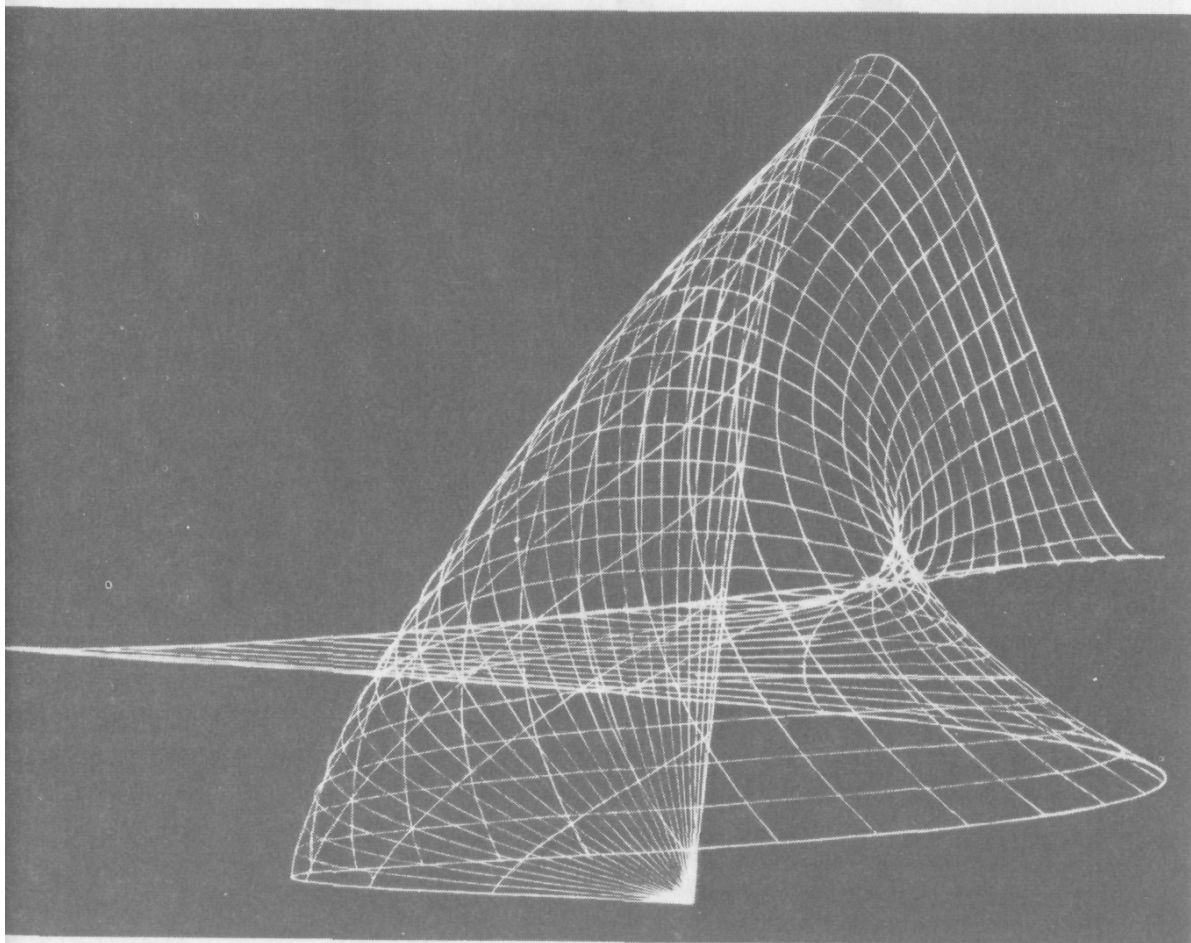
6. Деталь паровой турбины (RNUR).



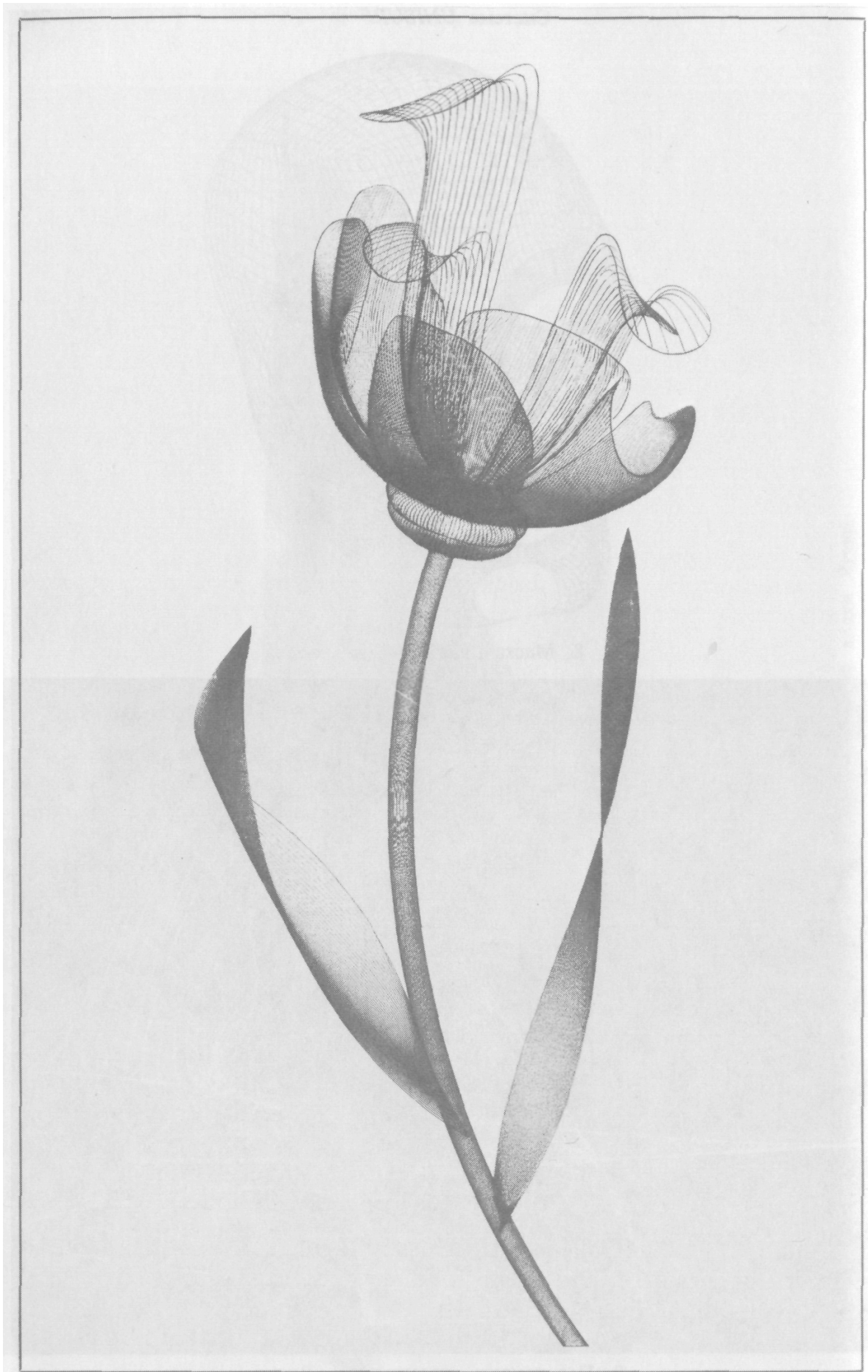
7. Макет подводной лодки Ягуар.



8. Маска (SOFERMO).



9. Поверхность, называемая «Верне».



10. Цветок.

РОЛЬ САПР В ЭКОНОМИКЕ

Еще недавно САПР считались не более чем модным увлечением, однако в настоящее время они применяются всюду и их экономическая эффективность полностью доказана. Эта эффективность определяется не только достигнутой экономией, но и повышением точности изготовления изделий и ускорением освоения их производства. Повышение точности изготовления приводит к уменьшению общего времени освоения новой продукции, что позволяет более гибко реагировать на запросы рынка и конъюнктуру. Количественно оценить эффективность от применения САПР довольно трудно. Во всяком случае, это нужно делать не в книге, посвященной собственно САПР, а в каком-либо экономическом обзоре или непосредственно на производстве.

В такой развитой отрасли, как автомобилестроение, вот уже 20 лет широко используются станки с числовым программным управлением для производства опытных образцов и серийных изделий. Они произвели настоящую революцию в производстве. Высказывавшиеся ранее опасения относительно их низкой эффективности оказались беспочвенными. То же относится и к САПР при условии, если выбранные средства соответствуют поставленной цели.

ОБУЧЕНИЕ ПОЛЬЗОВАНИЮ САПР

Обработка в САПР в основном делается автоматически, но тем не менее всегда существует возможность неудачного решения, полученного алгоритмическим путем. В этом случае необходимо вмешательство оператора, что требует уделять больше внимания подготовке квалифицированного персонала для обслуживания САПР.

Содержание этой подготовки известно уже давно, однако до сих пор в учебные программы большинства учебных заведений включены только краткие разделы, касающиеся САПР. Они содержат лишь геометрию в описательном изложении и основы анализа. Это считается большим препятствием для широкого использования САПР в промышленности. В действительности эти опасения лишены оснований: для использования САПР необязательно знать теоретические основы ее работы. Практика показала, что сбоев при эксплуатации САПР, обусловленных низкой квалификацией персонала, почти не бывает. САПР вполне доступны таким категориям пользователей, как конструкторы, лаборанты, операторы ЭВМ.

КАЧЕСТВО ПРОЕКТОВ, СОЗДАВАЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ САПР

В последние годы появилось большое количество публикаций, посвященных обработке кривых и поверхностей. Часть из них имеет чисто математическую направленность и непосредственно не связана с запросами

пользователей САПР. Это, казалось бы, лишает их права на существование, однако опыт показывает, что многие из таких разработок, часто являющихся маленькими открытиями, влекут за собой далеко идущие последствия.

Что же касается чисто практических разработок, то их можно разбить на две категории. В разработках первой категории обрабатываемые объекты представляются традиционным образом с помощью отрезков прямых и дуг окружностей, комбинациями простейших геометрических тел. Несмотря на простоту исходных положений, применение таких методов становится весьма сложным для случаев определения зон сшивки между поверхностями. В разработках второй категории решение основывается на параметрическом представлении кривых и поверхностей, что приводит к неполным решениям, обладающим невысокой точностью.

Теоретические и практические исследования долгое время развивались независимо друг от друга, однако в настоящее время возникает потребность в их сближении. Этот процесс уже начался, но еще потребуются внести глубокие изменения в традиционные подходы к проблеме всех, кто участвует в ее решении: математиков, конструкторов, специалистов по информатике и другим областям науки и техники. Все идет к тому, что скоро станет необходимым получение с помощью САПР трехмерных объектов с помощью голографических средств или станочной обработки как для эстетической оценки объектов, так и для проведения их испытаний. Обрабатывающие станки станут необходимым дополнением к дисплейным экранам и графопостроителям,

ДВА ПОДХОДА К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ САПР

Существуют два различных подхода к использованию САПР. При первом сохраняются традиционные средства изготовления опытного образца. Если конструируемый объект имеет техническое назначение, сначала изготавливаются его чертежи, затем специалисты высокой квалификации изготавливают его с помощью шаблонов, выполняя плавные переходы между плоскими поверхностями. После этого проводят измерение координат большого числа точек, расположенных на поверхности объекта, и, наконец, специалисты по САПР переводят эту информацию в цифровую форму, доступную ЭВМ. Если же объект имеет только эстетическое назначение, чаще всего он предварительно изготавливается самим автором из воска или глины, затем модельщиками — из твердых материалов и только после этого он может быть представлен в виде цифровых данных.

При втором подходе конструкторы и дизайнеры учатся использовать средства САПР в процессе разработки. Таким образом, замысел реализуется самими авторами, и информация остается в такой форме, в какой она возникла в процессе разработки. При этом исключается процесс перевода в цифровую форму, который иногда приводит к появлению ошибок.

Необходимо отметить, что в настоящее время первый подход применяется более часто. Его особенность заключается в том, что конструктору не требуется менять привычный стереотип действий, сложившийся на протяжении долгого времени, и приобретать новые знания, которые, по его мнению, лежат в стороне от его основной деятельности. В то же время непосредственное использование САПР при работе позволяет ускорить процесс конструирования, избежать затрат на перевод данных в цифровую форму и связанных с этим ошибок. Эти преимущества указывают на безусловную предпочтительность второго подхода.

В технике и технологии время от времени происходят перемены, и создание САПР является этому хорошим примером. Важно, однако, понимать, что этот процесс перемен происходит непрерывно и постоянно.

ЛИТЕРАТУРА

Часть 3

Глава 3

1. Conor J. J., Brebia C. A. Finite element techniques for fluid flow. Newnes-Butterworths, 1976.
2. Wilkinson J. H. The algebraic eigenvalue problem, Clarendon Press, 1965. [Имеется перевод: Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.]
3. Bathe K. J., El Wilson. Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall, 1976.
4. Zienkiewicz O. C. The finite element method in engineering science, MacGraw Hill, 1977. [Имеется перевод: Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.]
5. Gallagher R. H. Finite element analysis: fundamentals, Prentice Hall, 1975. [Имеется перевод: Галлагер Р. Метод конечных элементов: Основы. — М.: Мир, 1984.]
6. Dhatt G., Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S. A., 1981.
7. Imbert J. F. Analyse des structures par éléments finis, Cepadues Editions, 1979.
8. Gardan Y. Mathématiques et CAD, Hermes, 1985. [Имеется перевод: Математика и САПР: В 2-х кн. 1 — М.: Мир, 1988.]
9. Yeysseyre H. Analyse Numérique, Cours ECP, 1986—1987.
10. Laurent-Gengoux P. Analyse de quelques problèmes mathématiques en mécanique. Cours ECP, 1986—1987.
11. Mammeri B. Exercices d'analyse numérique, Cours ECP, 1986—1987.
12. Bezier P. Mathématiques et CAD — Courbes et surfaces, Hermes, 1986. [Имеется перевод: Математика и САПР. Перевод книги содержится в данной книге в ч. 4.]

Глава 4

1. MODULEF: "Une bibliothèque modulaire d'éléments finis", INRIA, 1985.
2. MODULEF: "Génération automatique de maillages", P. L. George, INRIA, 1986.
3. Diaporama: Bibliothèque Modulef: "Quelques réalisations concrètes de maillages", P. L. George, E. Saltel, INRIA.
4. "SIMAIL: "Logiciel de maillages" documentation technique et descriptif des commandes version 3.1., juillet 86, SIMULOG.

Часть 4

1. American Machinist, "How Cross uses special computer in designing special machines", 12 nov. 1966.
2. Andrighetto, Verge. Détermination des contours apparents et des zones en contre-dépouille. Mémoire de l'Ecole National Supérieure des Arts et Métiers, 1974.
3. Ansal di S., de Florian i L., Falcidieno B. Geometric Modelling of Solid Objects by Using a Face-adjacency Graph Representation, Computer Graphics, July, 1985.
4. Araki H., Amano Y. Replacement of physical models by highly accurate numerical models for manufacturing stamping dies in the integrated CAD/CAM system, Pro-lamat 1985.
5. Atkins D. A., Tapia R. A. Mathematical ship lofting, Society of Naval Architects and Marine Engineers, Santa Barbara Congress, 13 oct. 1962.
6. Auffray, Pichouron. Définition des surfaces développables s'appuyant sur une courbe. Application à la détermination des surfaces annexes des outils d'emboutissage, Mémoire du Conservatoire National des Arts et Métiers, juin 1974.
7. Automotive Engineer, "Advanced techniques for body engineering (GMC)", march 1969.
8. Ball A. A., Consurf, Introduction of the conic lofting tile. Computer Aided Design, 6—4, oct. 1974.
9. Ball A. A., Storry D. J. T. Recursively generated B-spline surfaces, CAD, 84.
10. Barnhill R. E., Smooth interpolation over triangles. Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.
11. Barnhill R. E. Smooth interpolation over triangles, CAGD 1974.
12. Barnhill R. E. Surfaces in computer-aided geometric design a survey with new results, CAGD, sept. 1985.
13. Beeker E. Smoothing of shapes designed with free-form surfaces, CAD, may 1986.
14. Bernard F. Surfaces complexes lissées selon un critère d'énergie minimale, Avions Marcel Dassault.
15. Bezier P. Numerical control, Mathematics and application, J. Wiley, 1972.
16. Bezier P., Sioussiou S. Semi-automatic system for defining free-form curves and surfaces, CAD, march 1983.
17. Bezier P. UNISURF, from styling to tool shop. Proceedings of C. A. P. E. 83 meeting. North Holland 1983.
18. Bezier P. Emploi de la commande numérique pour l'étude des carrosseries et des outillages, *J. de la Société des l'Automobile* (S. I. A.), Avril 1968.
19. Bezier P. Essai de définition numérique des courbes et des surfaces expérimentales, Thèse, Université de Paris VI, 1977.
20. Board of Trade Journal, Electronic control of machine tools for contour milling (supplement, 1963).

21. Boehm W. Generating the Bézier points of triangular splines, SGAGD, 1983.
22. Boehm W. Generating the Bézier-points of triangular splines, Surfaces in CAGD, North Holland, 1983.
23. Boehm W. The de Boor algorithm for triangular splines, SCAGD, 1983.
24. Boehm W. On the efficiency of knot insertion algorithm, CAGD, mai 1985.
25. Boehm W. Triangular spline algorithms, CAGD, mai 1985.
26. Boehm W. Multivariate spline method in CAGD, CAD, mars 1986.
27. Boehm W. Curvature continuous curves and surfaces, CAD, mars 1986.
28. Braid I. C., Hillyard R. C., Stroud I. A. Stepwise construction of polyhedra in geometric modelling, MMCGD.
29. Braid I. C. From geometric to product modelling, PROLAMAT 1985.
30. Brodlie K. W. A review of methods for curves and function drawing MMCGD, Academic Press, 1980.
31. Brunet P. Increasing the smoothness of bi-cubic spline surfaces, CAGD, mai 1986.
32. CAD, Computer Aided Design, Butterworth.
33. CAD. 84, Actes du congrès CAD de Brighton, 1984, Butterworth.
34. CAGD, Computer Aided Geometric Design, Elsevier-North-Holland.
35. CAGD. 74, Actes du colloque CAGD-Salt Lake City 1974, Academic Press.
36. Caja E., Garetti R. NC grinder makes press-tools, Metalworking Production, may 1965.
37. Casteljaou P. (de), Mathématiques et CAD, Volume 2: formes à pôles. Edition Hermès 1985. [Имеется перевод: Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1 — М.: Мир, 1988.]
38. Catmull E. A class of local interpolating splines. CAGD 1974.
39. Chalvet M. Machine à dessiner et à sculpter, procédé Unisurf Renault/CII, Ingénieurs et Techniciens, juin 1969.
40. Chang G. Z. Matrix formulation of Bézier techniques, CAD 14, № 6, nov. 1982.
41. Chang G. Z. An elementary proof of the convergence for the generalized Bernstein-Bézier polynomials, University of Science and technology of China. Heféi, Anhui (Peoplé's Republic of China).
42. Chang G. Z. Families of adjoint patches for a Bézier triangular patch, CAGD, mai 1985.
43. Chang G. Z. The application of Bézier's functions to a proof of the Bernstein's theorem, University of Utah Salt Lake City. feb. 1981.
44. Chang S. J. A class of matrix methods for surface representation. Academy of China.
45. Chemla B. Système conversationnel de détermination mathématique de courbes et surfaces. Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1971.
46. Chen J., Wu J. H. Non-modal interpolation, an improved technique for the uniforme B-spline method, CAD, 1984.
47. Chung W. L. A new method of view synthesis for solid modelling, CAD, 1984.
48. Coons S. A. Surfaces for computer-aided design of space forms, Technical report MAC-TR-41, M. I. T. Cambridge, Mass, juin 1967.
49. Coons S. A. Surface patches and B-splines curves, CAGD, 1974.
50. Dahmen W., Micchelli C. A. Line average algorithm: a method for the computer generation of smooth surfaces, CAGD, mai 1985.
51. Daulte J. J. Informations Schnittstellen zwischen Beischreibung und Fertigung gekrummter Flächen, Ecole Fédérale Polytechnique de Zurich, Thèse de doctorat, 1974.
52. Dokkan T. A design system for products with sculptured surfaces, CAD, 1984.
53. F-Mesh, Computer program manual, Fujistu Ltd.
54. Farin G. Bézier polynomials over triangles and the construction of C^r polynomials, Brunel University. Uxbridge, Great Britain (1980).

55. Farin G. Algorithm for rational Bézier-curves, CAD, march 1983.
56. Farin G. Smooth interpolation to scattered 3D data, SCAGD, 1983.
57. Farin G. A modified Cloud-Tocher interpolant, CAGD, sept. 1985.
58. Farin G. Piecewise triangular C^1 surface strips, CAD, fev. 1986.
59. Fayard G. Les fabrications mécaniques à partir des équations mathématiques, La Technique Moderne, avril 1961.
60. Ferguson J. Multivariable Curve interpolation, *J. of the Association for Computing Machinery*, avril 1964.
61. Filip D. J. Adaptive subdivision algorithm for a set of Bézier triangles, CAD, mars 1986.
62. Forrest A. R. Computational Geometry, achievements and problems, CAGD, 1974.
63. Forrest A. R. Recent work on geometric algorithms, MMCGD, 1980.
64. Forrest R. Notes on Chaikin's algorithm, Computational geometry Memorandum (CGM 74-1) University of East Anglia, G. B.
65. Forrest R. A. Interactive interpolation and approximation by Bézier's polynomials, *Computer Journal*, **151**, 1972.
66. Furukawa S., Kobatake S., Ishizuka G. Succinct representation of 3-D objects and its application to hidden-line problem, PROLAMAT, 1983.
67. Gardan Y., Mathématiques et CAO — Volume 1. Méthodes de Base. Editions Hermès. [Имеется перевод: Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1. — М.: Мир, 1988.]
68. Germain Lacour P. et. al. Mathématiques et CAO, Volume 3: calcul scientifique. Editions Hermès. [Русский перевод содержится в данной книге в ч. 3.]
69. Goldman R. N. Using degenerate Bézier triangles and tetrahedra to subdivide Bézier curves, CAD, nov. 1982.
70. Gordon W., Riesenfeld R. Bernstein-Bézier methods for the computer-aided design of free-form curves and surfaces. *J. of the Association for Computing Machinery*, april 1974.
71. Gordon W. L. Blending-function Methods of Bi-variate and Multivariate Interpolation and Approximation. S. I. A. M. — *J. numer. Anal.*, № 8, 1971.
72. Cordon W. L., Riesenfeld R. B-splines and surfaces, CAGD, 1974.
73. Gregory J. A., Smooth interpolation without twist constraints, CAGD, 1974.
74. Gregory J. A. Shape preserving spline interpolation, CAD, fév. 1986.
75. Guenn, Lagain, Représentation automatique d'une forme tridimensionnelle, Effacement des parties cachées, Mémoire de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 1974.
76. Haapaniemi A., Nagase H., Fujimoto M. et al. Development of a real time numerical controller for machining of sculptured surfaces, PROLAMAT, 1985.
77. Haschek J. Dual Bézier curves and surfaces, SCAGD, 1983.
78. Henderson M. R. Extraction and organization of form features, PROLAMAT, 1985.
79. Higashi M., Kohzeni J., Nagasaka J. An interactive CAD system for construction of shapes with high quality surfaces, PROLAMAT, 1983.
80. Ho-bin, Inputing constructive solid geometry representations directly from 2D orthographic engineering drawings, CAD, april 1986.
81. Hoschek J. Dual Bézier-curves and surfaces, Surfaces in CAGD, North Holland, 1983.
82. Hoschek J., Smothing of curves and surfaces, CAGD, mai 1985.
83. Jared G. E. M., Varady T. Synthesis of volume modelling and sculptured modelling, CAD, 1984.
84. Johnson W. L. Interactive computer graphics as an engineering tool, Document SAE 69 0192, Detroit congress, Jan. 1969.

85. Kahmann J., Continuity of curvature between adjacent Bézier-patches, Surfaces in CAGD, North Holland, 1983.
86. Kahmann J. Continuity of curvature between adjacent Bézier patches, SCAGD, 1983.
87. Lasser D., Bernstein-Bézier representation of volumes, CAGD, mai 1985.
88. Lasser D. Intersection of parametric surfaces on the Bernstein-Bézier representation, CAD, mai 1986.
89. Le Tac G. Définition des courbes et surfaces au langage APT et ADAPT, Mécanique et Electricité, août 1968.
90. Lon R. B-spline convex surfaces, Beijing University, 1980. People's Republic of China.
91. Machinery and Production Engineering, 15 sept. 1965, Large Ceramic tape controlled drafting machine.
92. Machinery and Production Engineering, 4 june 1969, "ICL off-line system for computer produced drawings".
93. Machinery, April 1970, "New computer numerical control system".
94. Machinery, May 1969, "Chevrolet is using computers, NC, EDM, abrasive machining and advanced casting techniques to reduce stamping die cost".
95. Marchesseau C. La programmation point par point — Bulletin du GAMI, № 3, 1967.
96. McDermott R. J. Graphical representation over triangles and rectangles. Computer Aided Geometric Design, Academic Press 1974.
97. Mehlum E. Curve and surface fitting based on variational criteriae for smoothness, Central Institute for Industrial Research, déc. 1969.
98. Mehlum E. Non-linear splines, CAGD, 1974.
99. Merris D. K. New approaches to computer-aided design, Product Engineering, 3 Feb. 1964.
100. Middletich A., Sears K. H. Blended surfaces for set theoretic modelling systems, Computer graphics, july 1985.
101. Minagawa M., Okino N., Kakazu Y. Development of full automatic dimensioning system based on 3D solid geometry, PROLAMAT 85.
102. MMCGD: Mathematical Methods in Computer Graphics Drawing, Academic Press, 1960.
103. Moreau R. Machine mathématique à usiner les formes compliquées, Science et Techniques, mai 1966.
104. Nielsen G. M. Some piecewise polynomial alternatives: splines under tension, CAGD, 1974.
105. Nielsen G. M., Franke R. Surface construction based upon triangulation, SGAGD, 1983.
106. Nilson G. Computation of v-splines, Arizona State University, juin 1974.
107. Parizot S., Bouffard-Vercelli R. Application de la commande numérique à l'étude et à la réalisation d'une carrosserie. Encyclopédie des Métiers, la Carrosserie, Edition des Compagnons du Tour de France.
108. Parkinson A. The use of solid models in BUILD as a database for NC Machining, PROLAMAT 1985.
109. Peters G. J. Interactive computer graphics application of the parametric bi-cubic surface to engineering design problems, CAGD, 1974.
110. Petersen D. P. Boundary to constructive solid geometry mapping — a focus on 2D issues, CAD, févr. 1986.
111. Piegl L. Representation of quadric primitives by rational polynomials, CAGD, mai 1985.

112. Pilcher D. Smooth parametric surfaces, CAGD, 1974.
113. Ponte J. Le système "Profile Data", Mécanique et Electricité, août 1968.
114. Prautzsch H. Generalised subdivision and convergence, CAGD, mai 1985.
115. PROLAMAT 69. Actes du Congrès Prolamat de 1969 à Rome, North Holland.
116. PROLAMAT 83. Actes du Congrès Prolamat de 1983 à Amsterdam, North Holland.
117. PROLAMAT 85. Actes du Congrès Prolamat de 1985 à Paris, North Holland.
118. Prudhomme M. R. Applications industrielles de la CN. Société des Ingénieurs de l'Automobile (S. I. A.), mai 1963, mars 1964.
119. Richards T. H., Onwubolu G. C. Automatic interpretation of engineering drawings for 3D surfaces representation in CAD, CAD, avril 1986.
120. Riesenfeld R. Application of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design, Thèse, mars 1974, Computer Science University of Utah, Salt Lake City, USA.
121. Ris G. Raccordement à l'ordre N entre carreaux de surfaces définies par des polynômes paramétriques à coefficients vectoriels, Application aux surfaces UNISURF, Thèse de doctorat de l'Université de Nancy, April 1975.
122. Sabin M. Parametric splines in tension, British Aircraft Corporation, juillet 1970.
123. Sabin M., Spline surface, British Aircraft Corporation, Juin 1969.
124. Sabin M. Trinomial basis functions for interpolation in triangular regions (Bézier-triangles), Notes British Aircraft Corporation, July 1971.
125. Sabin M. A. Some negative results in n -sided patches, CAD, fév. 1986.
126. Sablonnière P. Interpolation d'Hermite pour des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux, Université d'Ascq-lès-Lille, 1981.
127. Sablonnière P. Bases de Bernstein et approximants splines, Thèse de doctorat, Université d'Ascq-lès-Lille, 1982.
128. Sablonnière P. Bernstein-Bézier methods for the construction of bi-variate spline approximants, CAGD, mai 1985.
129. Sawai S. et al. Development of SMDS: SONY Mold Design System, PROLAMAT, 1985.
130. SCAGD: Surfaces in Computer Aided Geometric Design. Actes de la conférence d'Oberwolfach an 1982, North Holland.
131. Schoenberg I. J. On variation diminishing approximation methods, On numerical approximation, University of Wisconsin Press, 1959.
132. Schoenberg I. J. Smoothing operators and their generating functions, Bulletin of the american mathematics Society, 1953.
133. Sederberg T. W. Piecewise algebraic surface patches, CAGD, mai 1985.
134. Shi F. S., Hand K. On the derivation of the Bézier's function, Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, People's Republic of China, 1979.
135. Shu H., Hori S., Mann W. R., Little R. N. The synthesis of sculptured surfaces, PROLAMAT 1969.
136. Sioussiou S. Procédé de description de formes par courbes polynomiales, Thèse de doctorat de l'Université de Paris, 1982.
137. Skappel E. The Saab sculptured surfaces, system "Formela". Saab-Scania A. B.
138. Steel, 9 november 1964, NC diesinking is here. Are you ready?
139. Sutcliffe D. C., Contouring over rectangular and skewed rectangular grids, MMCGD, 1980.
140. Toth D. L. On Ray Tracing Parametric surfaces, Computer Graphics, july 1985.
141. Varady T. Operations to integrate free-form surfaces into the BUILD volumetric modeller, PROLAMAT 1985.

142. Veron M. Contribution à l'étude des surfaces numériques UNISURF, Conditions de raccordement. Thèse de doctorat de l'Université de Nancy, 1973.
143. Wielinga R. F. Constrained interpolation using Bézier curves as a new tool for computer-aided geometric design, CAGD, 1974.
144. Wu J. H. Mathematical foundations of Bézier's curves, Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, 1979. People's Republic of China.
145. Xiong Z. X. The spline functions of $(2n + 1)^{\text{th}}$ degree, Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, People's Republic of China.
146. Yajima A., Jonishi H., Tsuda J., Osada N., MDM. 1: a computer-aided Mold Design and Manufacturing system. Graphics Interface' 82, National Computer Graphics Association of Canada.
147. Farin G. Triangular Bernstein-Bézier patches-CAD, août 1986.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоматизация поиска минимума 62
Автоматизированное вычисление 7
Автономные вычисления 8
Алгоритм 106
Алгоритмы построения 157—160
— — характеристической сетки 186—195
«Аналитические» зависимости 103—111
— тела 103, 114
Аппроксимация 106, 131
А-устойчивость метода 20
- Базовая кривая 136
Барицентрические координаты 18, 19
Булевы комбинации 111
- Внешний алгоритм с интерфейсом 8
Внутренний алгоритм 7
Вырожденная клетка 131
Вырожденные поверхности 175
- Годографы 153—154, 182
Графическая система 72
- Диагональное разбиение 233
- Интерактивность 73
Интерполяционная функция *Кунса* 126
Интерполяция 106, 114
- Квадратичная сходимость метода 13
Клетка с точкой излома 232
Коммерческие САПР 6
- Ленточная матрица 9
Линейная сходимость метода 13
Линейное преобразование 135
Линии видимого контура 185
Локальная система баз данных 72
- Макроинструкции 8
Матрица *Хессенберга* 11
Метод *Бэрстоу* 14
— *Галеркина* 29
— *Гаусса—Лежандра* 17
— дихотомии 14
— *Инаба* 121
- *Кастельжо* 131
— коллокации 26
— конечных разностей 31—36
— — элементов 40—45, 74
— *Кунса* 125
— моментов 28
— наименьших квадратов 27
— неопределенных множителей 62
— *Ньютона* 62
— *Ньютона—Рафсона* 13
— релаксации 62
— *Ризенфольда* 133
— *Рэля—Ритца* 29
— сопряженных градиентов 12
— *Файяра* 121
— *Фергюсона* 123
— штрафных функций 62
Методы построения разбиения 74, 77—86
— спуска 62
- Невязка 25, 26
Неявная формула *Милна* 22
— — *Эйлера* 19
- Объемное моделирование 110
Ограничительные линии 112
Операционная система 72
Оптимизация 61
Отображения 201
- Параметрические преобразования 197
Передача геометрических данных 8
Плоские кривые 107
Поверхности сшивки 113
Погрешность метода 20
Полиномиальные функции 152, 175
Полиномы *Бернштейна* 147
Последовательные годографы 185
Принцип возможных перемещений 53
Проекционные методы 25
Пространственные кривые 107
— тела 196
- Разбиение 72
Разреженная матрица 12

- Свойства функций *Бернштейна* 147—150
Система UNISURF 184
Смешанные годографы 183
Слайны 114
Структура данных 74
Схема *Кранка—Никольсона* 59
Сшивка 210
- Тестирование метода 73
Трехсторонние многоугольники 137
- Формула *Грина* 45
— трапеций 20
— *Хемминга* 22
Функция *Дирака* 49
- Характеристические сетки 172
Характеристический многоугольник 136,
141
- Число обусловленности матрицы 11
Чувствительность решения 61
- Эволюционные уравнения 56
Экспериментальные зависимости 103
- Явная формула *Адамса* 22
— *Милна* 22
— *Эйлера* 19

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Часть 3. Вычислительные методы <i>П. Жермен-Лакур</i>	
Глава 1. Введение	6
1.1. Общие положения	6
1.2. Вычисления и САПР	7
Глава 2. Численные методы	9
2.1. Алгебраические уравнения	9
2.2. Численное интегрирование	16
2.3. Дифференциальные уравнения с начальными условиями .	19
2.4. Проекционные методы	25
2.5. Метод конечных разностей	31
2.6. Дискретные системы	36
2.7. Метод конечных элементов для одной переменной	40
2.8. Метод конечных элементов для двумерного оператора Лапласа	45
2.9. Уравнения с контурными интегралами	48
2.10. Статическая линейная трехмерная задача сопротивления материалов	51
2.11. Особые случаи	55
2.12. Нелинейная механика	56
2.13. Эволюционные уравнения	56
2.14. Оптимизация	61

Оглавление	259
Глава 3. Реализация численных методов в САПР	65
3.1. Построение разбиения	65
3.2. Визуализация результатов	66
3.3. Программирование	72
3.4. Связи	73
3.5. Тестирование	73
Глава 4. Разбиения для метода конечных элементов.....	74
4.1. Постановка задачи	74
4.2. Разбиение и структура данных	75
4.3. Методы построения разбиения и методология проектирования	77
4.4. Методы построения разбиения	80
4.5. Визуализация. Контроль. Примеры	86
4.6. Замечания о полном решении задачи	88
Заключение	88

Часть 4. Геометрические методы

П. Безье

Предисловие	96
Глава 1. Введение	100
1.1. Задачи САПР	100
1.2. Геометрия, статика и динамика	100
1.3. Производство: подготовка и организация	101
Глава 2. Кривые и поверхности	102
2.1. Основные проблемы. Определяемые зависимости	102
2.2. Схемы получения решений	105
2.3. Условия, учитываемые при поиске решения	107
Глава 3. Системы	110
3.1. Объемное моделирование	110
3.2. Интерполяция	114
3.3. Аппроксимация	131

Глава 4. Система UNISURF	135
4.1. Кривые	135
4.2. Поверхности	172
4.3. Пространственные тела	
4.4. Параметрические преобразования	197
4.5. Сшивка	210
Заключение	238
Литература	249
Предметный указатель	256

Научное издание

Пьер Жермен-Лакур, П. Л. Жорж, Ф. Пистр, Пьер Безье

МАТЕМАТИКА И САПР

В 2-х книгах

Книга 2

Заведующий редакцией д-р техн. наук А. Л. Щерс

Зам. заведующего редакцией Э. Н. Бадиков

Ст. научный редактор И. М. Андреева

Мл. научный редактор Н. И. Сивилева

Художник Л. М. Муратова

Художественный редактор Н. И. Иванов

Технические редакторы Л. А. Тихомирова, М. А. Анциферова

Корректор Р. Л. Вибке

ИБ № 6883

Подписано к печати 21.08.89. Формат 60 × 90^{1/16} Бумага офсетная № 1
Гарнитура таймс. Печать офсетная. Объем 8,25 бум. л.
Усл. печ. л. 16,50. Усл. кр.-отт. 30,80. Уч.-изд. л. 17,19.
Изд. № 6/6143. Тираж 23000 экз. Зак. 1172. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Мир»

В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано в Межиздательском фотонаборном центре
издательства «Мир»

Можайский полиграфкомбинат

В/О «Совэкспорткнига»

Государственного комитета СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

143200, Можайск, ул. Мира, 93.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» ВЫПУСТИЛО КНИГУ

Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с франц./
Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др. — 1988. — 204 с., 1р.
10к.

Книга французских специалистов посвящена математическим основам методов графического построения кривых и поверхностей, используемых в САПР. Излагаются методы интерполяции, аппроксимации, сглаживания, метод конечных элементов и метод конечных разностей.

Для специалистов в области САПР и студентов высших учебных заведений.