Висновки

Розроблені алгоритми відновлення розв'язку крайової задачі реалізовані за допомогою засобів Microsoft Excel. Наведений алгоритм є ефективними та зручним в застосуванні. Він надає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі с більш високою точністю в порівнянні з алгоритмами розробленими за звичайними колокаційними методами. До того ж отриманий майже інтерполяційний сплайн враховує особливості шуканого розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотические методы восстановления кривых / Лигун А.А., Шумейко А.А. – К.: ИМ НАН Украины. –1997.– 358 с.
2. Худая Ж.В. Об одном свойстве L–сплайнов с переменными коэффициентами. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання. –Д.: ДНУ.–2006.–С.250-260.
3. Худая Ж.В. Об асимптотике приближения функции L –сплайнами в зависимости от положения точки. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання.–Д.: ДНУ.–2007.–С .317-327.

пост. 23.03.12

Оцінка згортки за допомогою сумішей та сплайн-експоненційних розподілів

ШВАЦЬКА Ю.І., БАЙБУЗ О.Г.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Розглянута обчислювальна технологія апроксимації згортки розподілів Вейбулла сумішшю експоненційних та сплайн-експоненційних розподілів. Проведено порівняльний аналіз результатів апроксимаційних методів з результатами побудови аналітичної функції розподілу згортки, отриманої шляхом розкладання початкового розподілу в ряд Тейлора. В результаті проведеної роботи було показано, що апроксимація згортки розподілів Вейбулла на базі суміші експоненційних розподілів с адекватною лише для розподілів Вейбулла з параметрами форми 0< β < 1. Апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом є більш універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β .

Рассмотрена вычислительная технология аппроксимации свертки распределений Вейбулла смесью експоненційних и сплайн-експоненційних распределений. Проведен сравнительный анализ результатов апроксимационных методов с результатами построения аналитической функции распределения свертки, полученной путем разложения начального распределения в ряд Тейлора. В результате проведенной работы было показано, что апроксимация свертки распределений Вейбулла на базе смеси експоненциальных распределений является адекватной только для распределений Вейбулла с параметрами формы 0< β < 1. Аппроксимация распределения Вейбулла сплайн-експоненциальным распределением является более универсальной, поскольку позволяет построение аппроксимационных процедур для любых значений параметров формы β .

The paper gives the computer technology of convolution of Weibull distributions by yhe mixture of exponential and spline-exponential distributions. It also gives the comparative analysis of the results of approximation methods with the results of construction of analytical function of the distribution of the convolution which was got by the way of the decomposition of primary distribution into Taylor's row. In the result of the filfilled work it was shown that the approximation of convolution of Weibull distributions on the basis of the mixture of exponential distribution is adequate only for Weibull distributions with the parameters of shape 0< β < 1. The approximation of Weibull distribution with the spline-exponential distribution is more universal because it allows the approximation procedures for any values of parameters of approximation β .

Вступ. Процесс відновлення Вейбулла має широке застосування в багатьох галузях, таких як управління матеріальними запасами (Liao et al., 2008; Moors and Strijbosch, 2002), аналіз черг (Girish and Hu, 2001), політика страхування (Free , 1986; Murphy and Blishke, 1992) [1].

Аналітичний розв'язок для функції розподілу згортки може бути отриманий лише для обмеженого числа розподілів, наприклад, для експоненційного. Знаходження згортки розподілів Вейбулла в явному аналітичному вигляді є неможливим, тому замість згортки розподілів Вейбулла використовуються різноманітні аналітичні апроксимації. Найвідомішим аналітичним наближенням є, запропоноване в [2], знаходження згортки розподілів Вейбулла в вигляді ряду. Цей метод є громіздким і не може бути використаним в багатьох видах практичних задач, тому найчастіше будуються апроксимації розподілу Вейбулла, засновані на експоненційному розподілі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найвідомішими дослідженнями проблеми знаходження згортки розподілів Вейбулла є роботи наступних вчених: Барлоу / Прошан (1965, 1975), Бакстер / Шойер / Блишке / МакКоналог (1981, 1982), Феллер (1966, том. II), Гнеденко / Беляев / Соловйов (1968), Росс (1970), Смітт (1958).

Існуючі дослідження в галузі апроксимацій згортки розподілів Вейбулла можна розділити на дві категорії: чисельні та аналітичні наближення.

Аналітичні наближення мають наступні види*:*

- побудова згорток за допомогою степеневих рядів t^c, яку представив Уайт (1964a), [3]
- перехід до нескінченного ряду відповідних пуассонівських функцій t^c, введених Ломіскі (1966).

Дослідження в області чисельних методів приймають один з наступних двох підходів:

- розробка алгоритмів для явного обчислення згорток, що лежать в основі розподілу,
- обчислення функції відновлення, звертаючись до перетворення Лапласа-Стільт'єса.

В роботі запропонована технологія побудови згортки розподілів Вейбулла шляхом апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом [4], методами середнього та середньоквадратичного наближення функції інтенсивності, та проведенно порівняння з апроксимацією сумішшю експоненційних розподілів, методом сердньоквардатичного наближення функцій розподілів та методом моментів. Наведені обчислювальні процедури знаходження згортки сумішей експоненційних розподілів та згортки сплайн-експоненційних розподілів, апроксимуючих розподіл Вейбулла.

Постановка задачі. Провести апроксимацію згортки розподілів Вейбулла (для n=2,3) шляхом апроксимації розподілу Вейбулла сумішшю двох експоненційних розподілів та сплайн-експоненційним розподілом. Зробити висновки про точність апроксимаційних моделей для різних параметрів форми β (без втрати загальної спільності, можна вважати параметр $\alpha = 1$).

Випадкові величини x_n - напрацювання елемента від *n-1*-ї до *n*-ї відмови [5].

Важливу роль в теорії та прикладках теорії надійності має функція відновлення H (t) - математичне очікування числа відмов за час від 0 до t

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t), \tag{1}$$

де $F^{(n)}(t)$ - n-кратна згортка функцій розподілів $F_1, F_2, ..., F_n$.

$$F^{(1)}(t) = F_1(t), F^{(2)}(t) = (F_1 * F_2)(t) = \int_0^t F_1(t-x)dF_2(x), ... \tag{2}$$
$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t)$$

Основний матеріал.

Згортка розподілів. В теорії надійності простим (звичайним) процесом відновлення називається послідовність невід'ємних взаємно незалежних випадкових величин x_n, що мають одну й ту ж функцію розподілу *F(t)*. Якщо ж функція розподілу випадкової першої величини x_1 має розподіл відмінний від *F(t)*, то маємо загальний (реверсований) процес відновлення.

Явний вигляд функції згортки розподілів є лише для деяких функцій розподілу [5]. Наприклад, для експоненційного, Ерланга, рівномірного. Нормальний розподіл, Вейбулла-Гнеденко, Гамма-розподіл потребуються побудови різноманітних апроксимацій.

Апроксимація згортки розподілів Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів. Запропонована в [6] апроксимація функції розподілу Вейбулла базується на суміші двох експоненційних функцій розподілів.

Для двопараметричного розподілу Вейбулла функція розподілу має вигляд:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\beta}}{\alpha}\right) \tag{3}$$

Представлення функції розподілу Вейбулла при $0<\beta<1$ є сумішшю двох експоненційних функцій та має функцію розподілу наступного вигляду:

$$F_a(t) = 1 - c\exp(-\lambda_1 t) - (1-c)\exp(-\lambda_2 t) \tag{4}$$

Для мінімізації похибки наближення між моделлю сумішей та надійності Вейбулла було застосовано два методи знаходження параметрів *c*, λ_1 і λ_2: метод середньоквадратичного наближення та метод моментів.

Використовуючи отримані параметри апроксимації, згортка сумішей експоненційних розподілів розраховується за наступними формулами:

- Функція розподілу та щільності згортки 2-х розподілів з однаковими параметрами (на рис. 1, а. представлена апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла 2-х випадкових величин з однаковими параметрами сумішшю експоненційних розподілів.):

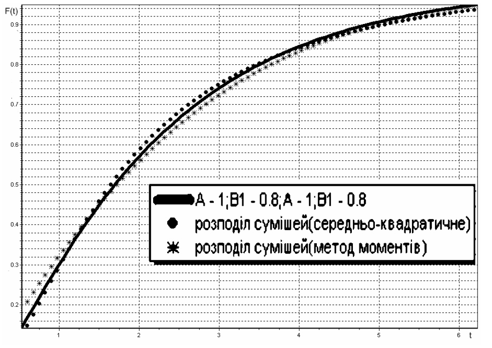
$$F_{a1}(t) = F_{a2}(t) = 1 - c\exp(-\lambda_1 t) - (1-c)\exp(-\lambda_2 t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F(t) = {} & \frac{\exp(-2t(\lambda_1+\lambda_2))}{\lambda_1-\lambda_2}\Big((\lambda_1-\lambda_2)\exp(2t(\lambda_1+\lambda_2)) - \\ & -(c-1)\big(-(1+c)\lambda_1 + (c-1)t\lambda_1\lambda_2 - (c-1)\lambda_2(1+t\lambda_2)\big)\times \\ & \times\exp(t(2\lambda_1+\lambda_2)) - c\big(-2\lambda_2 + \\ & + c(\lambda_1 + t\lambda_1^2 + \lambda_2 - t\lambda_1\lambda_2)\big)\exp(t(\lambda_1+2\lambda_2))\Big) \end{aligned} \tag{6}$$

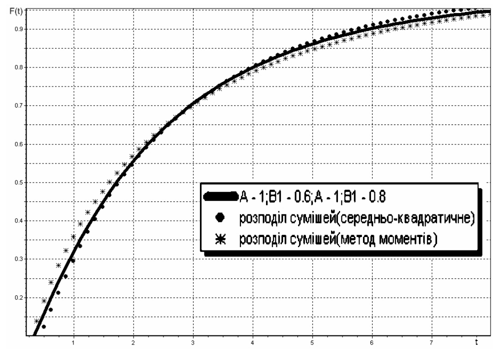
$$\begin{aligned} g(t) = {} & \frac{\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t)}{\lambda_1-\lambda_2}\Big(-(c-1)\lambda_2\big(2c\lambda_1 - (c-1)\lambda_1\lambda_2 t + \\ & + (c-1)\lambda_2^2 t\big)\exp(\lambda_1 t) + c\lambda_1\big(-2\lambda_2 + c(\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)t + \\ & + 2\lambda_2)\big)\exp(\lambda_2 t)\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

Функція розподілу та щільності згортки 2-х розподілів з різними параметрами(функція розподілу та щільності) (на рис. 1, б. представлена апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла для 2-х випадкових величин з різними параметрами сумішшю експоненційних розподілів.):

$$\begin{aligned} F_{a1}(t) &= 1 - c_1 e^{-\lambda_1 t} - (1-c_1)e^{-\lambda_2 t} \\ F_{a2}(t) &= 1 - c_2 e^{-\mu_1 t} - (1-c_2)e^{-\mu_2 t} \end{aligned} \tag{8}$$



а)



б)

Рис. 1. Апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла 2-х випадкових величин з однаковими*(а)* та різними(б) параметрами сумішшю експоненційних розподілів

$$\begin{aligned}F(t)=c_2\Bigg(&1+\frac{c_1\mu_1\exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1-\mu_1}+\frac{(c_1-1)\mu_1\exp(-\lambda_2 t)}{\mu_1-\lambda_2}+\\&+\frac{(c_1\lambda_1\mu_1-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\mu_1-c_1\lambda_2\mu_1)\exp(-\mu_1 t)}{(\mu_1-\lambda_1)(\mu_1-\lambda_2)}\Bigg)+\\&+(1-c_2)\mu_2\Bigg(\frac{c_1\exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1-\mu_2}-\frac{(c_1-1)\exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2-\mu_2}+\frac{1}{\mu_2}+\\&+\frac{(c_1\lambda_1\mu_2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\mu_2-c_1\lambda_2\mu_2)\exp(-\mu_2 t)}{\mu_2(\mu_2-\lambda_1)(\mu_2-\lambda_2)}\Bigg)\end{aligned} \tag{9}$$

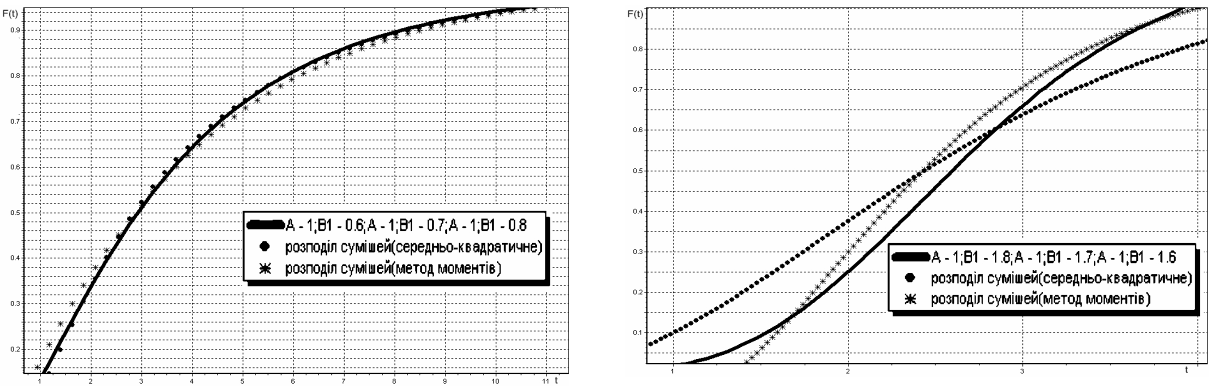
$$\begin{aligned}g(t)=&\frac{c_2\mu_1((c_1-1)\lambda_2\mu_1+\lambda_1(\lambda_2-c_1\mu_1))\exp(-\mu_1 t)}{(\mu_1-\lambda_1)(\mu_1-\lambda_2)}+\\&+\frac{(c_2-1)\mu_2(c_1\lambda_1\mu_2-\lambda_1\lambda_2(1+\mu_2-c_1\mu_2))\exp(-\mu_2 t)}{(\mu_2-\lambda_1)(\mu_2-\lambda_2)}+\\&+\frac{(c_1-1)\lambda_2(c_2\lambda_2\mu_1-\mu_2((c_2-1)\lambda_2+\mu_1))\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}+\\&+c_1\lambda_1\left(\frac{c_2\mu_1}{\lambda_1-\mu_1}+\frac{(c_2-1)\mu_2}{\mu_2-\lambda_1}\right)\exp(-\lambda_1 t)\end{aligned} \tag{10}$$

- Згортка 3-х розподілів з однаковими параметрами (функція розподілу та щільності):

$$F_{a1}(t)=F_{a2}(t)=F_{a3}(t)=1-ce^{-\lambda_1 t}-(1-c)e^{-\lambda_2 t} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}F(t)=1+&\frac{\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t)}{2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\big(-c\exp(\lambda_2 t)\big(c^2\lambda_1^2\big(2+\\&+\lambda_1 c(2+\lambda_1 t)\big)-2c\lambda_1\big(6+3\lambda_1 t+c(\lambda_1 t(\lambda_1 t-1)-\\&-4)\big)\lambda_2+\big(6+c(6\lambda_1 t-6+c(2+\lambda_1 t(\lambda_1 t-4)))\big)\lambda_2^2\big)+\\&+(c-1)\exp(\lambda_1 t)\big(-2(c-1)\lambda_1\lambda_2\big(-2-4c-\\&-(2+c)\lambda_2 t+(c-1)\lambda_2^2 t^2\big)+\lambda_1^2\big(2(1+c+c^2)-\\&-2(c-1)(1+2c)\lambda_2 t+(c-1)^2 t^2\lambda_2^2\big)+(c-1)^2\lambda_2^2\times\\&\times\big(2+\lambda_2 t(2+\lambda_2 t)\big)\big)\big)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}g(t)=&\frac{\exp(-2(\lambda_1+\lambda_2)t)}{\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2}\times\\&\times(\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)\times\\&\times\lambda_2^2\exp(2\lambda_1 t)+c\lambda_2^2((\lambda_1-2\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)\times\\&\times\exp((\lambda_1+\lambda_2)t)-2\lambda_1(4\lambda_1^2-8\lambda_1\lambda_2+3\lambda_2^2)\times\\&\times\exp(2\lambda_1 t))+c^3(\lambda_1-\lambda_2)(-(\lambda_1-2\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)\times\\&\times(\lambda_1+\lambda_2)^2\exp((\lambda_1+\lambda_2)t)+2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)\times\\&\times\exp(2\lambda_2 t)+\lambda_2(\lambda_2-2\lambda_1)\exp(2\lambda_1 t)))+\\&+c^2((\lambda_1-2\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1^2-2\lambda_2^2)\times\\&\times\exp((\lambda_1+\lambda_2)t)+\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)\exp(2\lambda_2 t)+\\&+(\lambda_2-2\lambda_1)(6\lambda_2-5\lambda_1)\exp(2\lambda_1 t)))-\\&-\frac{\exp((\lambda_1+\lambda_2)t)}{\lambda_1-\lambda_2}(-(c-1)(\lambda_1-2\lambda_2)\lambda_2^2((2+\\&+(c-6)c)\lambda_1^3+\lambda_1^2(7c-3-3c^2+2(c-1)\lambda_1 t)\lambda_2+\\&+(c-1)\lambda_1(3c-1-3\lambda_1 t)\lambda_2^2-(c-1)(c-\lambda_1 t)\lambda_2^3)\times\\&\times\exp(\lambda_1 t)-c\lambda_1^2(2\lambda_1-\lambda_2)(c^2(\lambda_1-\lambda_2)^3+\\&+\lambda_2^2(3\lambda_2-\lambda_1)+(-4\lambda_2^3+\lambda_1^2\lambda_2(2-3\lambda_2 t)+\\&+\lambda_1^3(\lambda_2 t-1)+\lambda_1\lambda_2^2(1+2\lambda_2 t)))\exp(\lambda_2 t)))\end{aligned} \tag{13}$$



а) б)

Рис. 2. Апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла для 3-х випадкових величин з різними параметрами сумішшю експоненційних розподілів при β < 1(а) та β > 1 (б)

- Згортка 3-х розподілів з різними параметрами (функція розподілу та щільності)(на рис. 2. представлена апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла для 3-х випадкових величин з різними параметрами сумішшю експоненційних розподілів при β < 1(а) та β > 1 (б).):

$$
\begin{aligned}
F_{a1}(t) &= 1 - c_1 e^{-\lambda_1 t} - (1-c_1)e^{-\lambda_2 t}\\
F_{a2}(t) &= 1 - c_2 e^{-\mu_1 t} - (1-c_2)e^{-\mu_2 t}\\
F_{a3}(t) &= 1 - c_3 e^{-\gamma_1 t} - (1-c_3)e^{-\gamma_2 t}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
F(t) = {} & (c_2-1)(-1+\frac{c_3((c-1)\gamma_1+\lambda_1)\mu_2\exp(-\gamma_1 t)}{(\gamma_1-\lambda_1)(\gamma_1-\mu_2)} -\\
& -\frac{(c_3-1)((c-1)\gamma_2+\lambda_1)\mu_2\exp(-\gamma_2 t)}{(\gamma_2-\lambda_1)(\gamma_2-\mu_2)} +\\
& +\frac{c(-\gamma_1\gamma_2+c_3\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_1-c_3\gamma_2\lambda_1)\mu_2\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_1-\gamma_1)(\lambda_1-\gamma_2)(\lambda_1-\mu_2)} +\\
& +\frac{(\lambda_1+(c_1-1)\mu_2)(-\gamma_1\gamma_2+c_3\gamma_1\mu_2+\gamma_2\mu_2-c_3\gamma_2\mu_2)}{(\mu_2-\gamma_1)(\mu_2-\gamma_2)(\mu_2-\lambda_1)} \times\\
& \times\exp(-\mu_2 t)) + \frac{(c_1-1)(c_2-1)\mu_2}{\lambda_2-\mu_2} \times\\
& \times(\frac{((c_3-1)\gamma_2\lambda_2+\gamma_1(\gamma_2-c_3\lambda_2))\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_2-\gamma_1)(\lambda_2-\gamma_2)} -\\
& -\frac{c_3\gamma_1(\lambda_2-\mu_2)\exp(-\gamma_1 t)}{(\gamma_1-\lambda_2)(\gamma_1-\mu_2)} +\\
& +\frac{(c_3-1)\gamma_2(\lambda_2-\mu_2)\exp(-\gamma_2 t)}{(\gamma_2-\lambda_2)(\gamma_2-\mu_2)} +\\
& +\frac{(-\gamma_1\gamma_2+c_3\gamma_1\mu_2+\gamma_2\mu_2-c_3\gamma_2\mu_2)\exp(-\mu_2 t)}{(\mu_2-\gamma_1)(\mu_2-\gamma_2)}),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
g(t) = {} & \frac{(c_1-1)c_2\lambda_2\mu_1}{(\lambda_2-\mu_1)(\gamma_1+\lambda_2-\mu_1)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_1)} \times\\
& \times((c_3-1)(\lambda_2-\mu_1)(\gamma_1+\lambda_2-\mu_1)\exp(-(\gamma_2+\lambda_2)t) -\\
& -c_3(\lambda_2-\mu_1)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_1)\exp(-(\gamma_1+\lambda_2)t) +\\
& +(\gamma_1+\lambda_2-\mu_1)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_1)\exp(-\lambda_2 t)\\
& +((c_3-1)\gamma_2(\lambda_2-\mu_1)-\gamma_1(\gamma_2+c_3\lambda_2-c_3\mu_1))\times\\
& \times\exp(-\mu_1 t)) +\\
& +\frac{(c_1-1)(c_2-1)\lambda_2\mu_2}{(\mu_2-\lambda_2)(\gamma_1+\lambda_2-\mu_2)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_2)} \times\\
& +\frac{(c_1-1)(c_2-1)\lambda_2\mu_2}{(\mu_2-\lambda_2)(\gamma_1+\lambda_2-\mu_2)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_2)} \times\\
& \times((c_3-1)(\lambda_2-\mu_2)(\gamma_1+\lambda_2-\mu_2)\exp(-(\gamma_2+\lambda_2)t) -\\
& -c_3(\lambda_2-\mu_2)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_2)\exp(-(\gamma_1+\lambda_2)t) +\\
& +(\gamma_1+\lambda_2-\mu_2)(\gamma_2+\lambda_2-\mu_2)\exp(-\lambda_2 t)\\
& +((c_3-1)\gamma_2(\lambda_2-\mu_2)-\gamma_1(\gamma_2+c_3\lambda_2-c_3\mu_2))\times\\
& \times\exp(-\mu_2 t))
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Похибки апроксимації побудованих функцій розподілів згорток для 2-х однаково розподілених випадквих величин відносно аналітичної функції розподілу згортки Вейбулла, обчисленої за допомогою розкладання базових функцій розподілу Вейбулла в ряд Тейлора, обмежуючись при цьому 25 членами розкладання в ряд, для обох методів приведені в таблиці 1, коли β змінюється від 0.4 до 0.8 та від 1.8 до 2.1. Значення точок t_i обрані шляхом імітаційного моделювання. В [6] рекомендується вибирати максимальний час таким, щоб $F(t_m) \le 0{,}95$, або, іншими словами, функція повинна охоплювати щонайменше 95% від реального діапазону надійності.

Результати Таблиці 1 свідчать про те, що похибка наближення для апроксимації сумішшю збільшується при збільшенні значення *β*. При *β > 1* використання апроксимації сумішшю експоненційних розподілів є неможливим.

Апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом. Пропонується технологія обчислення згортки розподілів Вейбулла на базі на апроксимації функції інтенсивності розподілу Вейбулла кусково-сталими

Таблиця 1

β	Похибка апроксимації, % (метод середньоквадратичного наближення)	Похибка апроксимації, % (метод моментів)
0.4	1.1	1.3
0.5	1.2	1.4
0.6	2.1	2.2
0.7	1.9	1.9
0.8	2.6	2.6
1.8	70	160
1.9	130	170
2.0	150	180
2.1	270	260

функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом [15] з наступною функцією щільності:

$$f(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, 0<t\le t_1\\ \lambda_2 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1-\lambda_2 t}, t_1<t<\infty\end{cases} \qquad (17)$$

Задача аппроксимації неперервної функції інтенсивності переходів в середньому представляє собою задачу найкращого наближення розподілу функції λ(x) з вісом p(x) ступінчатою функцією $c(x)$. На заданному розбитті $a=x_0\le x_1\le x_2\le\ldots x_n\le x_{n+1}=b$ $c(x)=c_i(x)=c_i$, при $x_{i-1}\le x<x_{i-1}$.

Міра близькості $f(x)$ і $c(x)$ на $(a$,b) визначається як

$$\delta_a^b=\delta_a^b(|\lambda-c|)=\int_a^b p(x)|\lambda(x)-c(x)|dx \qquad (18)$$

Задача наближення складається в найкращому виборі вузлів $x_1, x_2, \ldots x_n$, які знаходять в результаті вирішення задачі мінімізації:

$$\min_{a\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le b}\delta_a^b(|\lambda-c|), \qquad (19)$$

при цьому функція $c_i(x)$ залежить від x_{i-1} та x_i Якщо x_{i-1} і x_i фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x)\in R_i}\delta_{x_{i-1}}^{x_i}(|\lambda-c|), . \qquad (20)$$

Параметри сплайн-експоненційного розподілу визначаються формулами:

$$t_1=\frac{b}{A};\ \lambda_1=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1}A^{1-\beta}=A^{1-\beta}\lambda;$$
$$\lambda_1=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1}A^{1-\beta}\left(2^\beta-1\right)=\left(2^\beta-1\right)A^{1-\beta}\lambda. \qquad (21)$$

$$b='[-\alpha\ln\lambda]^{1/\beta},$$

де $\lambda(t)=\frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-1}$ функція інтенсивності двопараметричного розподілу Вейбулла.

Задача наближення в средньоквадратичному формулюється наступним чином. Нехай на деякому інтервалі (a,b) з ваговою функцією $p(x)$ визначена функція $\lambda(x)$, яка апроксимується ступінчатою функцією $c(x)$, $a=x_0\le x_1\le x_2\le\ldots x_n\le x_{n+1}=b$, $c(x)=c_i(x)=c_i$, при $x_{i-1}\le x<x_i$.

Міра близькості $\lambda(x)$ і $c(x)$ на (a,b) визначається як

$$\delta_a^b=\delta_a^b\left([\lambda-c]^2\right)=\int_a^b p(x)[\lambda(x)-c(x)]^2dx \qquad (22)$$

Задача наближення визначається в найкращому виборі вузлів $x_1, x_2, \ldots x_n$, які знаходяться з рішення задачі мінімізації

$$\min_{a\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le b}\delta_a^b\left([\lambda-c]^2\right), \qquad (23)$$

при цьому функція при цьому функція $c_i(x)$ залежить від x_{i-1}.та x_i. Якщо x_{i-1}.та x_i фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x)\in R_i}\delta_{x_{i-1}}^{x_i}\left([\lambda-c]^2\right), \qquad (24)$$

Нехай:

$$2\lambda(y)+\frac{\ln(1-F(y))}{y}-\frac{\dfrac{\ln(1-F(y))}{\ln(1-F(z))}}{z-y}=0 \qquad (25)$$

представимо в вигляді $y=r_2^0(z)$, тоді вузел склеювання кусочно-постійної функції t_1 визначається як

$$t_1=r_2^0(b), \qquad (26)$$

а значення λ_1, λ_2

$$\lambda_1=c_1=\frac{1}{t_0}\int_0^{t_1}\lambda(t)dt=\frac{1}{r_2^0(b)}\int_0^{r_2^0(b)}\lambda(t)dt=$$
$$=-\frac{1}{r_2^0(b)}\ln\left(1-F\left(r_2^0(b)\right)\right), \quad при \quad t\le t_1$$
$$\lambda_1=c_1=\frac{1}{t_1}\int_{t_1}^b\lambda(t)dt=\frac{1}{b-r_2^0(b)}\int_{r_2^0(b)}^b\lambda(t)dt=$$
$$=-\frac{1}{b-r_2^0(b)}\ln\frac{1-F\left(r_2^0(b)\right)}{1-F(b)}, \quad при \quad t>t_1$$

- Функція розподілу та щільності згортки 2-х сплайн-експоненційних розподілів з однаковими параметрами:

$$G_2(t)=\begin{cases}1-(1+\lambda t)\exp(-\lambda t) & 0<t\le t_1\\ 1-(1+\lambda t_1)\exp(-\lambda t)+ & t_1<t<2t_1\\ +\dfrac{1}{\lambda-\mu}\exp(-\lambda(t+t_1)-\mu t)\times & \\ \times(-2\lambda\exp(\lambda t+\mu t_1)+ & \\ +(\lambda-\mu)(1+\lambda t_1)\exp((\lambda+\mu)t)+ & \\ +(\mu+\lambda^2(t-2t_1)+\lambda(1-\mu t+2\mu t_1))\times & \\ \times\exp(\mu t+\lambda t_1)) & \\ \dfrac{-2\lambda t_1-\mu t}{\lambda-\mu}\times & 2t_1<t<\infty\\ \times(-2\lambda\exp((\lambda+\mu)t_1)+ & \\ +(\lambda-\mu)\exp(2\lambda t_1+\mu t)+ & \\ +(\lambda+\mu+\mu(-\lambda+\mu)t+ & \\ +2\lambda\mu t_1-2\mu^2 t_1)\exp(2\mu t_1)) & \end{cases} \qquad (27)$$

$$
g_2(t)=\begin{cases}
\lambda^2 t\exp(-\lambda t) & 0<t\le t_1\\
\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\exp(-(\lambda-\mu)t_1-\mu t)+ & t_1<t<2t_1\\
+\left(\lambda^2(2t_1-t)-\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)\exp(-\lambda t) & \\
\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\exp(-(\lambda-\mu)t_1-\mu t)+ & 2t_1<t<\infty\\
+\left(\mu^2(t-2t_1)-\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)\times & \\
\times\exp(-2(\lambda-\mu)t_1-\mu t) &
\end{cases}
\tag{28}
$$

▪ Згортка 3-х сплайн-експоненційних розподілів з однаковими параметрами (функція розподілу та щільності):

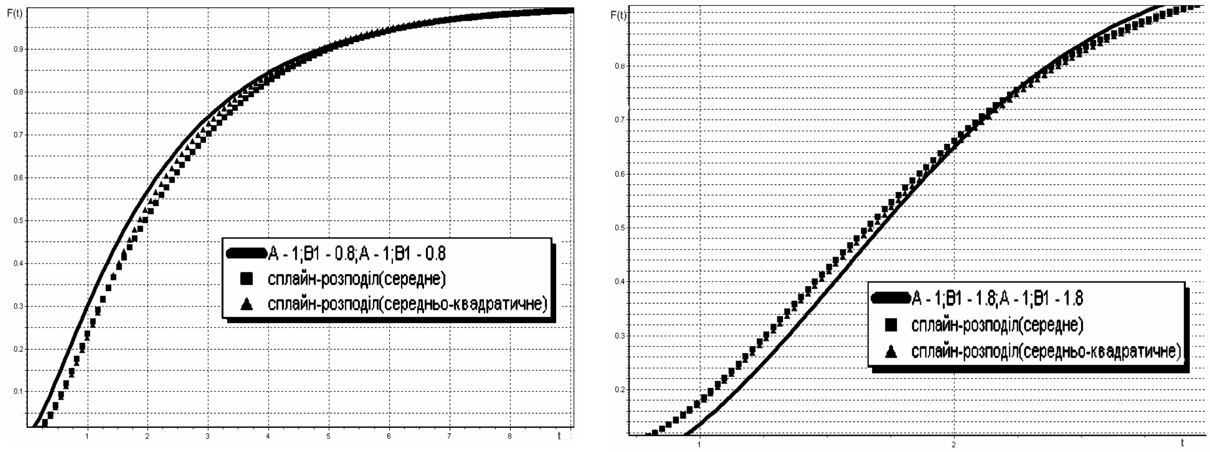
$$
G_3(t)=\begin{cases}
-\dfrac{2+\lambda t(2+\lambda t)}{2}\exp(-\lambda t) & 0<t\le t_1\\
\dfrac{\exp(-\mu t-\lambda(t+t_1)))}{2(\lambda-\mu)^2}\times & t_1<t<2t_1\\
\times(-6\lambda^2\exp(\lambda t+\mu t_1)+ & \\
+2(\lambda-\mu)^2\exp(\mu t_1+\lambda(t+t_1))+ & \\
+(4\lambda^2+4\lambda\mu-2\mu^2-6\lambda^3 t_1+ & \\
+6\lambda^2\mu t_1+3\lambda^4 t_1{}^2-6\lambda^3\mu t_1{}^2+ & \\
+3\lambda^2\mu^2 t_1{}^2-2\lambda(\mu-\lambda)\times & \\
\times(\mu+\lambda(2-3\lambda t_1+3\mu t_1))t+ & \\
+2\lambda^2(\lambda-\mu)^2 t^2)\exp(\mu t+\lambda t_1)) & \\
\dfrac{\exp(-(\lambda+\mu)t-2\lambda t_1)}{2(\lambda-\mu)^2}(-(-2\times & 2t_1<t<3t_1\\
\times(-1+\exp(\lambda t))\mu^2+ & \\
+\lambda^4(t-3t_1)^2-2\lambda^3(t-3t_1)\times & \\
\times(1-\mu t+3\mu t_1)+4\lambda\mu(\;2+\exp(\lambda t)+ & \\
\times\exp(\mu t+2\lambda t_1)+ & \\
+6\lambda(\lambda\exp(-\lambda t_1)+\exp(2\mu t_1)+ & \\
+(\lambda(1+2\mu t_1-\mu t)+\mu(2-2\mu t_1 & \\
+\mu t)))\exp(\lambda t+2\mu t_1)) & \\
\dfrac{\exp(-\mu t-3\lambda t_1)}{2(\lambda-\mu)^2}\times & 3t_1<t<\infty\\
\times(-6\lambda^2\exp((2\lambda+\mu)t_1)+ & \\
+2(\lambda-\mu)^2\exp(\mu t+3\lambda t_1)+ & \\
+6\lambda(\lambda(1+2\mu t_1-\mu t)+ & \\
+\mu(2+\mu t-2\mu t_1))\exp((\lambda+2\mu)t_1)- & \\
-(2\lambda\mu\left(4+\mu(t-3t_1)-\mu^2(t-3t_1)^2\right)+ & \\
+\mu^2\left(2+\mu^2(t-3t_1)^2+2\mu(t-3t_1)\right)+ & \\
+\lambda^2(2+\mu(t-3t_1)(4+3\mu t_1-\mu t)))\times & \\
\times\exp(3\mu t_1)) &
\end{cases}
\tag{29}
$$

$$
g_3(t)=\begin{cases}
\dfrac{\lambda^3}{2}t^2\exp(-\lambda t) & 0<t\le t_1\\
\dfrac{\lambda^2\exp(-\mu-\lambda(t+t_1))}{2(\lambda-\mu)^2}\times & t_1<t<2t_1\\
\times(6\mu\exp(\lambda t+\mu t_1)+ & \\
+6\mu(\mu-\lambda)t-2\lambda(\lambda-\mu)^2 t^2+ & \\
+6(\lambda-\mu)(\mu+\lambda^2 t-\lambda\mu t)t_1- & \\
-3\lambda(\lambda-\mu)^2 t_1^2)\exp(\mu t+\lambda t_1)) & \\
\dfrac{\lambda\exp(-(\lambda+\mu)t-2\lambda t_1)}{2(\lambda-\mu)^2}\times & 2t_1<t<3t_1\\
\times(6\lambda\mu\exp(\mu t_1+\lambda(t+t_1))- & \\
-6\mu\exp(\lambda t+2\mu t_1)(\mu+\mu^2(t-2t_1)+ & \\
+\lambda(2-\mu t+2\mu t_1))+ & \\
+\exp(\mu t+2\lambda_1)(6\mu^2+ & \\
+(\lambda^4-2\lambda^3\mu)(t-3t_1)+ & \\
+\lambda^2\mu(t-3t_1)(6+\mu t-3\mu t_1)+ & \\
+6\lambda\mu(1-\mu+3\mu t_1))) & \\
\dfrac{\mu\exp(-\mu t-3\lambda t_1+\mu t_1)}{2(\lambda-\mu)^2}\times & 3t_1<t<\infty\\
\times(6\lambda\mu\exp(2\lambda t_1)- & \\
-6\mu\exp((\lambda+\mu)t_1)(\mu+\mu^2(t-2t_1)+ & \\
+\lambda(2-\mu t+2\mu t_1))+ & \\
+(\mu^4(t-3t_1)^2+\lambda^2(6+\mu(t-3t_1)\times & \\
\times(-6+\mu t-3\mu t_1))- & \\
-2\lambda\mu(-3+\mu(t-3t_1)\times & \\
\times(-3+\mu t-3\mu t_1)))\exp(2\mu t_1)) &
\end{cases}
\tag{30}
$$

Обидва методи апроксимації згортки розподілів Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом дають адекватні результати не тільки для розподілів з параметрами $0 \le \beta < 1$, але й для $\beta > 1$ (на рис. 3 представлені результати апроксимації функції розподілу згортки Вейбулла для 2-х випадкових величин сплайн-експоненційним розподілом за методами середньоквадратичного (3, а) та середнього (3,б)).

Це можна побачити з результатів таблиці 2, де приведені похибки апроксимації згорткою сплайн-експоненційних розподілів 2-х випадкових величин з однаковими параметрами в порівнянні з аналітичною функцією розподілу згортки для β від 0.4 до 0.8 та від 1.8 до 2.1.

З Таблиці 2 видно, що метод апроксимації згортки згорткою сплайн-розподілів, на відміну від апроксимації зготкою сумішей, доцільно використовувати не тільки для розподілів Вейбулла з параметрами форми $\beta \le 1$, але й для розподілів з $\beta > 1$.



а) б)

Рис. 3. Апроксимація функції розподілу згортки Вейбулла для 2-х випадкових величин сплайн-експоненційним розподілом за методами середньоквадратичного та середнього при $\beta < 1$(а) та $\beta > 1$ (б)

Таблиця 2

β	Похибка апроксимації, % (метод середньоквадратичного наближення)	Похибка апроксимації, % (метод наближення середнім)
0.4	2.7	2.9
0.5	3.2	3.6
0.6	5.7	5.3
0.7	3.9	3.6
0.8	4.4	4.1
1.8	7.5	8
1.9	24	24
2.0	12	12
2.1	32	32

Висновки

Розглянута технологія знаходження апроксимації функції розподілу згортки Вейбулла згорткою сумішей двох експоненційних розподілів та сплайн-експоненційних розподілів.

Проведений аналіз апроксимації згортки розподілів Вейбулла показав, що апроксимація сумішшю експоненційних розподілів є адекватною лише для розподілів Вейбулла з параметрами форми $\beta < 1$.

Апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом є більш універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β.

ЛІТЕРАТУРА

1. Horst Rinne. The Weibull Distribution: A Handbook/ Chapman & Hall/CRC, 2008. – 816p.
2. L. Smith, M.R. Leadbetter. On the renewal function for the Weibull distribution. – Technometrics 5 (3), 1963. – p. 393–396.
3. White Johns. Weibull reneval analysis. 3rd Annual Aerospace Reliable and Maintainatil Conf., Washington, D.C., 1964. – New York,
4. Байбуз О.Г. Сплайны в надежности / О.Г. Байбуз, А.Ф. Приставка. – Д., 2003. – 256с.
5. Байхельт, Ф. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход./Ф. Байхельт, П. Франкен. М.: Радио и связь, 1988. 392с.
6. Jin Tongdan, Gonigunta Lakshmana S 'Exponential approximation to Weibull renewal with decreasing failure rate'. – Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 00, No. 0, 2009. – p. 1–13.

пост. 30.03.12