МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Алгоритм підвищення точності розв’язання крайових задач на основі L-сплайнів

*ХУДА Ж.В., КАРМАЗИНА В.В., ТОНКОНОГ Є.А., ГРАНКІНА Т.О.**

Дніпродзержинський державний технічний університет
Український дніпропетровський хіміко-технолологічний університет*

У статті запропонований алгоритм відновлення розв’язку крайової задачі за допомогою L-сплайнів порядку два і порядку три, які в свою чергу побудовані на узагальнених базисних майже інтерполяційних сплайнах. Наведені тестові приклади, які підтверджують точність запропонованого алгоритму.

В статье предложен алгоритм восстановления решения краевой задачи с помощью L-сплайнов порядка два и порядка три, которые в свою очередь построены на обобщенных базисных почти интерполяционных сплайнах. Приведенные тестовые примеры, подтверждающие точность предложенного алгоритма.

The authors propose a reconstruction algorithm solving the boundary value problem with L-splines of order two and order three, which in turn built on the basis of almost generalized splines interpolation. These test cases, confirming the accuracy of the algorithm.

Вступ. Дослідженнями шляхів підвищення точності сплайн-схем розв’зання крайових задач присвячено чимало робіт, серед них варто відзначити праці Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошниченко, Маранді, А.О. Лигуна. Як правило, засновані ці схеми на поліноміальних сплайнах. Новим напрямком у вирішенні питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші стало використання різних узагальнень сплайнів. Досить широким класом функцій, які узагальнюють поліноміальні, тригонометричні, напружені та інші види сплайнів є L-сплайни. Ці функції були розглянуті К. Де Бором, М.П. Корнійчуком, А.І.Гребенніковим, Лигуном А.О. [1]. Розвиток теорії L-сплайнів був багато в чому обумовлений потребами обчислювальної математики, зокрема при відновленні розв’язку диференційних рівнянь. Побудова узагальнених L-сплайнів, їх точність розглянута в роботах Ж.В.Худої [2], [3].

Постановка задачі. Побудова алгоритмів відновлення рішення математичної моделі параметричного коливального процесу лінійної динамічної системи другого порядку при заданих крайових умовах з використанням L-сплайнів та їх реалізація відомими програмними засобами залишається актуальною проблемою.

Тому **метою** даної статті є розробка алгоритму пошуку наближеного сплайн-розв’язку для крайової задачі виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,; \qquad (1)$$

$$y(a) = y_a\,,\ y(b) = y_b\,, \qquad (2)$$

де коефіцієнти рівняння $p(x)\,, q(x)\,, f(x) \in C^2_{[a,b]}$. Н побудувати алгоритм пошуку наближеного розв’язку задачі (1), (2) у вигляді сплайну

$$S_\nu(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} C_{\nu,i} B_{\nu,i}(x), \quad (\nu = 2\,, 3), \qquad (3)$$

з вузлами на сітці $\Delta_{N[a,b]}$ ($\Delta_{N[a,b]} = \{x_i | x_i = a + ih, h > 0, i = 0,1,...,N\}$), які, в свою чергу, є рішеннями рівнянь виду

$$S_\nu^{(\nu+1)} + P_i S_\nu^{(\nu)} + Q_i S_\nu^{(\nu-1)} = 0\,, (\nu = 2\,, 3)\,, \qquad (4)$$

а $B_{\nu,i}(\bullet)$ − базисні функції, які також задовольняють рівнянню (4).

Оскільки підібрати єдине рівняння виду (4), яке найкращим чином описує наближене рішення задачі (1) - (2) на кожному проміжку дуже складно, то доводиться використовувати рівняння, коефіцієнти якого змінюються від відрізка до відрізка. При цьому в якості коефіцієнтів P_i, Q_i можуть бути обрані значення функцій $p(x), q(x)$ в точках розбиття $\Delta_{N[a,b]}$. Таким чином, ми можемо пыдбирати вид сплайна $S_\nu(x)$ (ν=2, 3) для кожного конкретного рівняння виду (1). Побудувавши один раз базисні функції, а потім, змінюючі тільки вид p(x), q(x), можна очікувати, що отримаємо сплайн виду (3), параметри якого підібрані таким чином, що цей сплайн, краще (в сенсі мінімізації ухилення від точного рішення) описує поведінку шуканого розв’язку моделі, ніж поліноміальні сплайни.

Результати роботи. Маючи явний вигляд базисних L-сплайнів $B_{\nu,i}(x)$ $(i = \overline{-1, N+1})$ $(\nu = 2,3)$, отриманий в в роботі [2], обчислюємо значення базисних функцій та їх похідних у вузлах розбиття $\Delta_{N[a,b]}$. На основі отриманих значень будуємо узагальнені L-сплайни, які задовольняють рівнянню (4).

Спочатку побудуємо L-сплайни порядку два у вигляді

$$S_2(y,x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{2,i}(x-(i-1/2)h) . \tag{5}$$

При цьому коефіцієнти C_k підберемо таким чином, щоб отриманий сплайн асимптотично співпадав з інтерполяційним, тобто значення сплайна у вузлі майже збігалися зі значеннями інтерпольованої функції, яка в свою чергу задовольняє рівнянню (1). Ця умова виконується у разі, якщо коефіцієнти C_i обрані таким чином

$$C_i = y_{i-1/2}(1-\frac{1}{12}p_i' h^2) - \frac{1}{24}\Delta y_i p_i h - \frac{1}{8}\Delta^2 y_i , \tag{6}$$

де $y_{i-1/2} = y((i-1/2)h)$, $p_i = p(ih)$, $\Delta y_i = y_{i+3/2} - y_{i-1/2}$, $\Delta^2 y_i = y_{i+1/2} - 2y_{i-1/2} + y_{i-3/2}$, $(i=\overline{-1,N+1})$.

Очевидно, що коефіцієнти C_i виду (6) вибиралися таким чином, щоб у значенні сплайна (5) в точках $x = x_{i-1/2}$ $(i=\overline{-1,N+1})$ був відсутнім доданок, що містить h^2. Сплайн (5) с коефіцієнтами (6) інтерполює розв'язок задачі (1)-(2) у вузлах с точністю до $O(h^4)$, а в довільній точці з точністю $O(h^3)$.

Аналогічним чином будуються майже інтерполяційні сплайни порядка три $S_3(\Delta_{N[a,b]},\{p_i\},\{q_i\})$ $(i=\overline{0,N})$. Використовуючи явний вигляд базисних L-сплайнів $B_{3,i}(x)$ $(i=\overline{-1,N+1})$, отриманий в в роботі [3], обчислюємо значення базисних функцій та їх похідних у вузлах розбиття $\Delta_{N[a,b]}$. На основі отриманих значень будуємо узагальнені майже інтерполяційні L-сплайни порядка три у вигляді

$$S_3(y,x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{3,i}(x-ih) , \tag{7}$$

де $B_{3,i}(x-ih)$ - узагальнені базисні функції, які задовольняють рівнянню (4) при $x \in [x_{i-2}, x_{k+2}]$, а коефіцієнты C_i $(i=\overline{-1,N+1})$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} C_i = {} & y_i(1-\frac{1}{12}p_i' h^2 - \frac{1}{120}h^4(\frac{5}{6}p_i''' + q_i'' - \\ & -\frac{1}{3}(p_i p_i'' + (p_i')^2) + \frac{3}{4}(p_i' q_i + p_i q_i' - p_i^2 p_i') + \\ & + \frac{1}{42}q_i{}^2 - \frac{1}{504}q_i p_i^2 - \frac{1}{252}p_i^4)) - \\ & -\Delta y_i(\frac{1}{24}p_i h + (\frac{1}{180}q_i' - \frac{1}{1440}p_i{}^3 - \frac{11}{1440}p_i p_i' + \\ & + \frac{1}{480}p_i q_i)h^3) - \Delta^2 y_i(\frac{1}{6} + (-\frac{1}{72}p_i' - \frac{1}{45}q_i - \frac{1}{180}p_i^2)h^2 , \end{aligned} \tag{8}$$

де $y_i = y(ih)$, $y_i = y(ih)$, $q_i = q(ih)$ $(k=\overline{-1,N+1})$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_{k-1}$, $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$.

Таким чином, ми обрали коефіцієнти C_i так, щоб сплайн (7) асимптотично збігався з інтерполяційним, тобто значення сплайна у вузлі «майже» збігалися зі значеннями функції, яку ми наближуємо. Сплайн (7) с коефіцієнтами (8) інтерполює розв'язок задачі (1)-(2) в узлах с точністю до $O(h^5)$, а в довільній точці з точністю $O(h^5)$.

На основі побудованих майже інтерполяційних сплайнів (5) або (7) складемо алгоритм відновлення точного розвязку задачі (1)-(2).

Наведемо (6)алгоритм для L-сплайнів порядку два.

1. Функції $p(x), q(x), f(x)$ задані або задані їх чисельні значення, а також задані значення $y_{i-1/2} = y(a-(i+1/2)h)$, де $y(x)-$ точний розв'язок, $y_{i-1/2} = y(a-(i+1/2)h)$ $-$ значення, отримані в результаті експерименту, h - крок рівномірного розбиття відрізка $[a,b]$.

2. Якщо $p(x), q(x), f(x)$ задані аналітично, то обчислюємо значення p_i, q_i, f_i у вузлах розбиття $p_i = p(a-ih)$, $q_i = q(a-ih)$, $f_i = f(a-ih)$.

3.Обчислюємо

$$C_i = y_{i-1/2}(1-\frac{1}{12}p_i' h^2) - \frac{1}{24}\Delta y_i p_i h - \frac{1}{8}\Delta^2 y_i h^2$$

$-$ для випадку, коли $p(x), q(x), f(x)$ задані аналітично або

$$C_i = y_{i-1/2}(1-\frac{1}{24}(p_{i+1} - p_{i-1})h) - \frac{1}{24}\Delta y_i p_i h - \frac{1}{8}\Delta^2 y_i h^2$$

$-$ для випадку, коли параметри моделі задані сукупністю чисельних значень,
де

$$\Delta y_i = y_{i+3/2} - y_{i-1/2} ,$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+1/2} - 2y_{i-1/2} + y_{i-3/2} ,$$

$(i=\overline{-1,N+1})$.

4. Для кожного интервалу $[x_{i-1}, x_i]$ виписуємо явний вигляд B-сплайнів

$$\begin{aligned} B_{2,i}(u) = {} & \frac{3}{4} - \frac{p_i}{4}u + \frac{u^2}{24}(p_i^2 + q_i) + \frac{u^3}{36}(p_i q_i - \frac{p_i^3}{2}) + \\ & + \frac{u^4}{288}(p_i^4 - q_i^2 - 3p_i^2 q_i) + \left(-\frac{p_i^2}{192} - \frac{q_i}{64} - \right. \\ & - \frac{u}{96}(p_i q_i - \frac{1}{2}p_i^3) + \left(\frac{13}{5760}p_i^2 q_i u^2 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{7}{1920}q_i^2 - \frac{7}{5760}p_i^4 \right) u^2 \right) h^2 + \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{3}p_i u^3 - \right. \\ & \left. - u^2 + \frac{u^4}{12}(q_i - p_i^2) + \frac{u^5}{30}(-p_i q_i + \frac{p_i^3}{2}) \right) + O(h^4); \end{aligned}$$

де $u = x-(i-1/2)h$, $(i=\overline{-1,N+1})$.

А також

$$B_{2,i+1}(u)=\frac{1}{8}+\frac{p_{i+1}}{24}h+\left(\frac{p_{i+1}^2}{384}+\frac{q_{i+1}}{128}\right)h^2+$$
$$+\left(\frac{31}{11520}p_{i+1}q_{i+1}-\frac{1}{1440}p_{i+1}^3\right)h^3+$$
$$u\left(\frac{1}{8}p_{i+1}+\frac{1}{2h}+\frac{q_{i+1}}{48}h\ \ +\left(\frac{p_{i+1}q_{i+1}}{192}-\frac{1}{384}p_{i+1}^3\right)h^2+\right.$$
$$\left.+\frac{7h^3}{11520}\left(q_{i+1}^2-q_{i+1}p_{i+1}^2\right)\right)+\frac{u^2}{11520}\left(\frac{576}{h^2}-240\left(q_{i+1}+p^2{}_{i+1}\right)-\right.$$
$$\left.-120hp_{i+1}q_{i+1}-h^2\left(21q_{i+1}^2+13q_{i+1}p_{i+1}^2-7p_{i+1}^4\right)\right)+$$
$$\frac{u^3}{11520}\left(-\frac{1920p_{i+1}}{h^2}-\frac{960q_{i+1}}{h}-160p_{i+1}q_{i+1}-80p_{i+1}^3-\right.$$
$$\left.-40h(q_{i+1}^2-q_{i+1}p_{i+1}^2)\right)+\frac{u^4}{11520}\left(\frac{1}{h^2}\left(-480q_{i+1}+480p_{i+1}^2\right)\right.$$
$$\left.+240\frac{p_{i+1}q_{i+1}}{h}+20q_{i+1}^2-20p_{i+1}^4+60p_{i+1}^2q_{i+1}\right)+$$
$$\frac{u^5}{11520h^2}\left(192p_{i+1}q_{i+1}+48hq_{i+1}^2-48hp_{i+1}^2q_{i+1}-96p_{i+1}^3\right)+$$
$$+O(h^4),$$

де

$u=x-(i-1/2)h$, $(i=\overline{-1,N+1})$

$$B_{2,i-1}(u)=\frac{1}{8}-\frac{p_{i-1}}{24}h+\left(\frac{p_{i-1}^2}{384}+\frac{q_{i-1}}{128}\right)h^2-\left(\frac{31}{11520}p_{i-1}q_{i-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1440}p_{i-1}^3\right)h^3+u\left(\frac{1}{8}p_{i-1}-\frac{1}{2h}-\frac{q_{i-1}}{48}h+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{p_{i-1}q_{i-1}}{192}-\frac{1}{384}p_{i-1}^3\right)h^2-\frac{7h^3}{11520}\left(q_{i-1}^2-q_{i-1}p_{i-1}^2\right)\right)+$$
$$+\frac{u^2}{11520}\left(\frac{576}{h^2}-240\left(q_{i-1}+p^2{}_{i-1}\right)+120hp_{i-1}q_{i-1}-\right.$$
$$\left.-h^2\left(21q_{i-1}^2+13q_{i-1}p_{i-1}^2-7p_{i-1}^4\right)\right)+$$
$$+\frac{u^3}{11520}\left(-\frac{1920p_{i-1}}{h^2}+\frac{960q_{i-1}}{h}-160p_{i-1}q_{i-1}+\right.$$
$$\left.+80p_{i-1}^3+40h(q_{i-1}^2-q_{i-1}p_{i-1}^2)\right)\ +$$
$$\frac{u^4}{11520}\left(\frac{1}{h^2}\left(-480q_{i-1}+480p_{i-1}^2\right)-240\frac{p_{i-1}q_{i-1}}{h}+\right.$$
$$\left.+20q_{i-1}^2-20p_{i-1}^4+60p_{i-1}^2q_{i-1}\right)+\frac{u^5}{11520h^2}\left(192p_{i-1}q_{i-1}-\right.$$
$$\left.-48hq_{i-1}^2+48hp_{i-1}^2q_{i-1}-96p_{i-1}^3\right)+O(h^4),$$

где $u=x-(i-1/2)h$, $(i=\overline{-1,N+1})$.

При необхідності, значення В-сплайнів можна обчислити в точках розбиття проміжку $[x_{i-1},x_i]$.

5. На кожному интервалі $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=\overline{-1,N+1})$ сплайн-розв'язок має вигляд

$$S(x)=C_{i+1}B_{2,i+1}(u)+C_iB_{2,i}(u)+C_{i-1}B_{2,i-1}(u)$$

В якості тестових прикладу розглянемо таку модель.

Приклад. $y''+\frac{0{,}5}{1+x}y'-\frac{x}{1+x}y=-\frac{1{,}5+x^2+x^3}{(1+x)^3}$ з граничними умовами $y(0)=0$, $y(2)=0.67$ та $y=\frac{x}{1+x}$ - точний розв'язок.

В таблиці 1 наведено розрахунки, які описані в пунктах 1,2,3.

В таблиці 2 наведено обчислення В-спланів та S(x) не тільки у вузлах, а і у декількох точках усередині проміжків, знайдено відхилення побудованого сплайну від точного розв'язку. Для демонстрації підвищення точності розв'язку в таблиці 2 наведено обчислення класичного сплайну та відхилення його від точного розв'язку (рис. 1).

Таблиця 1

№ інтервалу	Границі інтервалів	y(x)=	p(x)=	p(x) перша похідна	p(x) друга похідна	q(x)=	q(x) перша похідна	Ci
	-0,2	-0,18	0,63	-0,78	1,95	0,25	-1,56	
	-0,1	-0,05	0,56	-0,62	1,37	0,11	-1,23	-0,05
1	0	0,05	0,50	-0,50	1,00	0,00	-1,00	0,05
2	0,1	0,13	0,45	-0,41	0,75	-0,09	-0,83	0,13
3	0,2	0,20	0,42	-0,35	0,58	-0,17	-0,69	0,20
...	...	...	...	...	...	...	...	...
18	1,7	0,64	0,19	-0,07	0,05	-0,63	-0,14	0,64
19	1,8	0,65	0,18	-0,06	0,05	-0,64	-0,13	0,65
20	1,9	0,66	0,17	-0,06	0,04	-0,66	-0,12	0,66
21	2	0,67	0,17	-0,06	-4,48	4,48	-0,11	

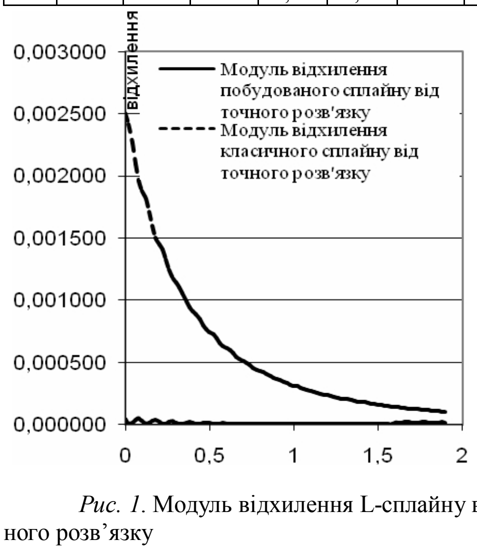

Рис. 1. Модуль відхилення L-сплайну від точного розв'язку

Таблиця 2

			Для L-сплайну								*Для класичного сплайну*		
	X	U	B i-1	B i	B i+1	Сплайн	Точний розв'язок	Класичний сплайн	Модуль відхилення побудованого сплайну від точного розв'язку	Модуль відхилення класичного сплайну від точного розв'язку	B i+1	B i	B i-1
1інтервал	0	-0,05	0,495	0,504	0,000	0,000	0,0000	-0,003	0,000046	0,002506	0,000	0,500	0,500
	0,02	-0,03	0,316	0,663	0,020	0,020	0,0196	0,017	0,000010	0,002413	0,020	0,660	0,320
	0,04	-0,01	0,177	0,741	0,081	0,038	0,0385	0,036	0,000016	0,002262	0,080	0,740	0,180
	0,06	0,01	0,078	0,739	0,182	0,057	0,0566	0,055	0,000038	0,002098	0,180	0,740	0,080
	0,08	0,03	0,020	0,657	0,323	0,074	0,0741	0,072	0,000050	0,001959	0,320	0,660	0,020
2 інтервал	0,1	-0,05	0,496	0,504	0,000	0,0909	0,0909	0,0890	0,000029	0,001882	0,000	0,500	0,500
	0,12	-0,03	0,316	0,663	0,020	0,1071	0,1071	0,1053	0,000006	0,001818	0,020	0,660	0,320
	0,14	-0,01	0,177	0,741	0,081	0,1228	0,1228	0,1211	0,000011	0,001714	0,080	0,740	0,180
	0,16	0,01	0,079	0,739	0,182	0,1380	0,1379	0,1363	0,000027	0,001600	0,180	0,740	0,080
	0,18	0,03	0,020	0,657	0,323	0,1526	0,1525	0,1510	0,000035	0,001503	0,320	0,660	0,020
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
19 інтерв.	1,8	-0,05	0,498	0,501	0,000	0,6428	0,6429	0,6427	0,000017	0,000114	0,000	0,500	0,500
	1,82	-0,03	0,319	0,661	0,020	0,6454	0,6454	0,6453	0,000017	0,000112	0,020	0,660	0,320
	1,84	-0,01	0,179	0,741	0,080	0,6479	0,6479	0,6478	0,000017	0,000110	0,080	0,740	0,180
	1,86	0,01	0,079	0,740	0,181	0,6503	0,6503	0,6502	0,000018	0,000107	0,180	0,740	0,080
	1,88	0,03	0,020	0,659	0,321	0,6528	0,6528	0,6527	0,000018	0,000104	0,320	0,660	0,020
20 інтерв.	1,9	0,05	0,000	0,499	0,501	0,6552	0,6552	0,6551	0,000017	0,000103	0,500	0,500	0,000
Максимальне відхилення									0,000050	0,002506			

Висновки

Розроблені алгоритми відновлення розв'язку крайової задачі реалізовані за допомогою засобів Microsoft Excel. Наведений алгоритм є ефективними та зручним в застосуванні. Він надає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі с більш високою точністю в порівнянні з алгоритмами розробленими за звичайними колокаційними методами. До того ж отриманий майже інтерполяційний сплайн враховує особливості шуканого розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотические методы восстановления кривых / Лигун А.А., Шумейко А.А. – К.: ИМ НАН Украины. –1997.– 358 с.
2. Худая Ж.В. Об одном свойстве L–сплайнов с переменными коэффициентами. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання. –Д.: ДНУ.–2006.–С.250-260.
3. Худая Ж.В. Об асимптотике приближения функции L –сплайнами в зависимости от положения точки. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання.–Д.: ДНУ.–2007.–С .317-327.

пост. 23.03.12

Оцінка згортки за допомогою сумішей та сплайн-експоненційних розподілів

ШВАЦЬКА Ю.І., БАЙБУЗ О.Г.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Розглянута обчислювальна технологія апроксимації згортки розподілів Вейбулла сумішшю експоненційних та сплайн-експоненційних розподілів. Проведено порівняльний аналіз результатів апроксимаційних методів з результатами побудови аналітичної функції розподілу згортки, отриманої шляхом розкладання початкового розподілу в ряд Тейлора. В результаті проведеної роботи було показано, що апроксимація згортки розподілів Вейбулла на базі суміші експоненційних розподілів є адекватною лише для розподілів Вейбулла з параметрами форми $0<\beta<1$. Апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом є більш універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β.

Рассмотрена вычислительная технология аппроксимации свертки распределений Вейбулла смесью експоненційних и сплайн-експоненційних распределений. Проведен сравнительный анализ результатов аппроксимационных методов с результатами построения аналитической функции распределения свертки, полученной путем разложения начального распределения в ряд Тейлора. В результате проведенной работы было показано, что аппроксимация свертки распределений Вейбулла на базе смеси експоненциальных распределений является адекватной только для распределений Вейбулла с параметрами формы $0<\beta<1$. Аппроксимация распределения Вейбулла сплайн-экспоненциальным распределением является более универсальной, поскольку позволяет построение аппроксимационных процедур для любых значений параметров формы β.

The paper gives the computer technology of convolution of Weibull distributions by yhe mixture of exponential and spline-exponential distributions. It also gives the comparative analysis of the results of approximation methods with the results of construction of analytical function of the distribution of the convolution which was got by the way of the decomposition of primary distribution into Taylor's row. In the result of the filfilled work it was shown that the approximation of convolution of Weibull distributions on the basis of the mixture of exponential distribution is adequate only for Weibull distributions with the parameters of shape $0<\beta<1$. The approximation of Weibull distribution with the spline-exponential distribution is more universal because it allows the approximation procedures for any values of parameters of approximation β.

Вступ. Процесс відновлення Вейбулла має широке застосування в багатьох галузях, таких як управління матеріальними запасами (Liao et al., 2008; Moors and Strijbosch, 2002), аналіз черг (Girish and Hu, 2001), політика страхування (Free , 1986; Murphy and Blishke, 1992) [1].

Аналітичний розв'язок для функції розподілу згортки може бути отриманий лише для обмеженого числа розподілів, наприклад, для експоненційного. Знаходження згортки розподілів Вейбулла в явному аналітичному вигляді є неможливим, тому замість згортки розподілів Вейбулла використовуються різноманітні аналітичні апроксимації. Найвідомішим аналітичним наближенням є, запропоноване в [2], знаходження згортки розподілів Вейбулла в вигляді ряду. Цей метод є громіздким і не може бути використаним в багатьох видах практичних задач, тому найчастіше будуються апроксимації розподілу Вейбулла, засновані на експоненційному розподілі.