

К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы

ГОРБУНОВ А.Д.

Днепропетровский государственный технический университет

Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы. Ключевые слова: аналитический расчет, нагрев, термическое напряжение, тела простой формы.

Розроблено інженерну методику аналітичного розрахунку термічних напружень при конвективному нагріванні простих тіл. Ключові слова: аналітичний розрахунок, термічні напруження, нагрівання, тіла класичної форми.

The article represents the developed engineering technique of thermal tension during convective heating of simple bodies. Key words: analytical calculations, heating, thermal tension, simple bodies.

Постановка проблемы и анализ публикаций.

Без знания температурных полей и термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить рациональные энерго- и материалосберегающие тепловые и температурные режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, сушильных установок, химических реакторов и т. п. При значительных скоростях нагрева в телах могут возникать термические напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_c

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta(X, Fo), \quad (1)$$

на поверхности при $X=1$

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (2)$$

и в центре пластины при $X=0$

$$\tilde{\sigma}_c(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_c(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0 / (1-\nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры: в любой точке $X = x/R_0$

$$\theta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (4)$$

на поверхности

$$\theta_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (5)$$

в центре

$$\theta_c(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo} \quad (6)$$

и среднемассовая

$$\theta_{cp}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (7)$$

где $\theta(Fo) = (t(\tau) - t_c) / \Delta t_0$; $\Delta t_0 = t_0 - t_c$; t_0 — начальная температура тела, °C; $Fo = \alpha t / R_0^2$ — число Фурье; $Bi = \alpha R_0 / \lambda$ — число Био; $P_n(\mu_n) = 2 Bi / [Bi(Bi + 1) + \mu_n^2]$ — тепловая амплитуда; $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) / \cos \mu_n$; $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot Bi / \mu_n^2$; $C_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$; $D_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - P_n(\mu_n)$; $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$; μ_n — собственные числа, определяемые характеристическим уравнением:

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi. \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), можно получить формулу связи между термонапряжениями в центре и на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = -\Delta \theta(Fo) + \tilde{\sigma}_c(Fo), \quad (9)$$

где относительный перепад температур получается путем вычитания из (5) уравнения (6)

$$\Delta \theta(Fo) = \theta_n - \theta_c = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (10)$$

в котором $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$.

Из анализа уравнений (2), (3), (9) и (10) следует, что динамика изменения напряжений во времени аналогична изменению температурной разности, т.е. резко возрастают, достигая максимального значения при числах Фурье $Fo_{\max} = 0,05 \dots 0,50$, а затем постепенно падают, т.е. несут колоколообразный характер.

На практике иногда важнее знать не всю динамику изменений напряжений во времени, а только их максимально возможные характерные величины, например, на поверхности и в центре тела. Целью данной работы является получение объединенного уравнения для аналитического определения указанных величин для тел простой геометрической формы.

Изложение материалов исследования.

В монографии Н.Ю. Тайца [2] показано, что для цилиндрических тел следует различать термические напряжения:

радиальные на поверхности

$$\tilde{\sigma}_r(1, Fo) = [\theta_{cp}(Fo) - \theta_n(Fo)] / 2, \quad (11)$$

тангенциальные на оси

$$\tilde{\sigma}_\theta(0, Fo) = [\theta_{cp}(Fo) - \theta_c(Fo)] / 2, \quad (12)$$

и осевые

$$\tilde{\sigma}_z(X, Fo) = \tilde{\sigma}_r(X, Fo) + \tilde{\sigma}_\theta(X, Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta(X, Fo). \quad (13)$$

Из одинаковости выражения (13) и уравнения (1) вытекает, что формулы для расчета осевых напряжений в цилиндре и шаре совпадают с формулами (1)...(3) для пластины и можно ограничиться анализом этих уравнений. Поэтому задачу определения термических напряжений в телах простой формы будем решать в предположении такой же их зависимости от температур на поверхности, в центре и среднемассовой как для плоских тел.

Для цилиндрических тел согласно [8] будут справедливы уравнения (1)...(7), (9), (10) для пластины с заменой координатной функции $U(X)$, входящей в уравнение (4) $U_n(X) = J_0(\mu_n X) H_2$, где $H_2 = 1/J_0(\mu_n)$, тепловых амплитуд $P_n(\mu_n) = 2\text{Bi}/(\text{Bi}^2 + \mu_n^2)$ для уравнения (5), $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) H_2$ — для (6) и $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) 2\text{Bi}/\mu_n^2$ — для (7). Теперь корни μ_n вместо (8) определяются из характеристического уравнения:

$$J_0(\mu_n)/J_1(\mu_n) = \mu_n/\text{Bi}, \quad (14)$$

где J_0 и J_1 — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

Для сферических тел согласно [7] координатная функция $U_n(X) = \sin(\mu_n X)/\mu_n X \cdot H_3$, где $H_3 = \mu_n/\sin \mu_n$; тепловые амплитуды $P_n(\mu_n) = 2\text{Bi}/[-\text{Bi}B + \mu_n^2]$; $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot H_3$; $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot 3\text{Bi}/\mu_n^2$. Теперь μ_n вместо (8) определяется из характеристического уравнения:

$$\text{ctg} \mu_n = B/\mu_n, \quad (15)$$

где $B = 1 - \text{Bi}$.

Объединенное решение.

Следует отметить, что простому объединению «поддаются» не все величины. Так, амплитуды P и M легко обобщаются формулами

$$P_n(\mu_n) = 2\text{Bi}/[\text{Bi}(\text{Bi} + 2 - k) + \mu_n^2], \quad (16)$$

$$M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot k\text{Bi}/\mu_n^2,$$

а для амплитуды

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot H_k, \quad (17)$$

$$\text{где } H_k = \begin{cases} 1/\cos \mu_n = (-1)^{n+1} \sqrt{1 + m_n \cdot \text{Bi}} & \text{если } k = 1 \\ 1/J_0(\mu_n) = (-1)^{n+1} \sqrt{2m_n/(S_n P_n)} & \text{при } k = 2; \\ \mu_n/\sin \mu_n = (-1)^{n+1} \sqrt{B^2 + \mu_n^2} & \text{при } k = 3 \end{cases}$$

k — коэффициент геометрической формы, равный 1 — для пластины, 2 — цилиндра и 3 — шара; $m_n = \text{Bi}/\mu_n^2$; $S_n = J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)$.

Дифференцируя уравнения (2), (3) и (10) по времени, приравнявая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулы для расчёта максимальных времен Фурье:

$$\text{Fo}_j = (1/a) \ln(1/b_j), \quad (18)$$

где $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$; $b_1 = -\delta D_1/D_2$; $b_2 = -\delta E_1/E_2$; $b_3 = -\delta C_1/C_2$; $\delta = (\mu_1/\mu_2)^2$.

Подставляя Fo_j из (18) в уравнения (2), (10) и (3), получим максимальные значения величин с учётом двух членов ряда:

$$S_j(\text{Fo}_j) = (1 - \delta) O_j e^{-\mu_1^2 \text{Fo}_j}. \quad (19)$$

При $j = 1$, $O_1 = D_1(\mu_1)$ имеем время $\text{Fo}_1 = \text{Fo}_{\text{м.п}}$ и максимальное термическое напряжение на поверхности $S_1 = \tilde{\sigma}_{\text{м.п}}(\text{Fo}_1)$; при $j = 2$, $O_2 = E_1(\mu_1)$ и $S_2 = \Delta\theta_{\text{max}}(\text{Fo}_2)$ и при $j = 3$, $O_3 = C_1$ и $S_3 = \tilde{\sigma}_{\text{м.ц}}(\text{Fo}_3)$.

Анализ полученных решений.

Наибольшую и основную трудность при практических расчётах по уравнениям (1)...(19) представляет определение по соотношениям (8), (14), (15) бесчисленного множества корней. В работе [3] приведена общая приближенная формула расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}, \quad (20)$$

где $D = k\text{Bi}/m$; $m = 1 + \text{Bi}/(k + 2)$ — коэффициент термической массивности; $\gamma = (1 + \sqrt{1 + 4\rho})/2$; $\rho = D^2/[k(k + 2)^2(k + 4)]$; k — см. уравнение (17); при малых ρ число $\gamma \cong 1 + \rho$.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева при больших и малых числах Био [4, 5, 6].

При малых числах Био ($\text{Bi} < 3$)

$$\mu_n = b_n(1 + \text{Bi}/b_n^2), \quad (21)$$

где b_n — корни уравнений (8), (14), (15) при $\text{Bi} = 0$.

При больших числах Био ($\text{Bi} \geq 3$)

$$\mu_n = a_n(1 - \beta(1 - \beta/k)), \quad (22)$$

где $\beta = 1/\text{Bi}$; a_n — корни уравнений (8), (14), (15), при $\text{Bi} = \infty$.

Следует отметить, что при числах Био $\text{Bi} > 6$ первый корень μ_1 следует вычислять не по уравнению (20), а по (22).

Получим упрощенные расчетные соотношения в двух предельных случаях.

Асимптотика при малых числах Био. Первый корень характеристического уравнения вычисляем по соотношению (20), а второй — по (21). Тогда отношение собственных чисел

$$\delta = (\mu_1/\mu_2)^2 = D/(\gamma b_2^2). \quad (23)$$

Разность квадратов корней $a = \mu_2^2 - \mu_1^2 \approx b_2^2 - D/\gamma$.

Первая амплитуда, входящая в уравнение (5) температуры поверхности

$$P_1 \approx 1/(m\gamma) \approx 1 - \text{Bi}/(k + 2). \quad (24)$$

По аналогии любая амплитуда

$$P_n(\mu_n) = 2m_n/(1 + e_n) \approx 2m_n(1 - e_n), \quad (25)$$

где $m_n = \text{Bi}/\mu_n^2$ — n -ый коэффициент термической массивности; $e_n = (\text{Bi} + 2 - k) \cdot m_n$.

Интересно отметить, что в отличие от других амплитуд зависимость P_2 от числа Био носит немонотонный характер, возрастает от нуля до максимального

значения $P_{2max} \cong 0,23$ при числе $Bi_* \cong (k+2)$, а затем уменьшается до нуля, оставаясь меньше $P_1(Bi)$.

$$\eta = P_2/P_1 = (\delta + \nu)/(1 + \nu), \quad (26)$$

где $\nu = m_2 \cdot Bi$.

При определении тепловой амплитуды A воспользуемся разложением функций H_k уравнения (17) при малых аргументах и обобщая эти разложения, получим

$$A_1 \approx 1 + K_A \cdot Bi, \quad (27)$$

где $K_A = k/2(k+2)$.

Для среднемассовой температуры:

$$M_1 = P_1 \cdot kBi/\mu_1^2 = P_1 m \gamma \approx (1 - Bi^2/(k+2)^2) \text{ и} \\ M_2 = P_2 \cdot km_2. \quad (28)$$

Для перепада температур по уравнению (10)

$$E_1 = P_1 - A_1 = P_1 - (1 + K_A \cdot Bi) \approx -Bi/2. \quad (29)$$

Для термических напряжений в центре тела по (3)

$$C_1 = M_1 - A_1 = P_1(kBi/\mu_1^2) - (1 + K_A \cdot Bi) \approx -K_A \cdot Bi. \quad (30)$$

Для термонапряжений на поверхности

$$D_1 = M_1 - P_1 = P_1(kBi/\mu_1^2 - 1) \cong P_1(m\gamma - 1) \approx P_1 \cdot Bi/(k+2), \\ D_2 = M_2 - P_2 = P_2(km_2 - 1). \quad (31)$$

С целью проверки амплитуды D можно использовать равенство $D = C - E$.

Выражения для расчета максимальных времен по уравнению (18) также упрощаются.

Коэффициент поверхности ($j=1$)

$$b_1 = -\delta D_1/D_2 = -\delta(m\gamma - 1)/[\eta(km_2 - 1)] \approx K_A \cdot Bi,$$

для перепада температур ($j=2$)

$$b_2 = -\delta E_1/E_2 \approx Bi/(7-k), \quad (32)$$

и центра ($j=3$)

$$b_3 = -\delta C_1/C_2 \approx Bi/(2(7+k)).$$

Для оценки различия наиболее возможных максимальных времен, которые получаются в предельном случае при числах $Bi=0$, с помощью уравнений (32) составим их разности

$$\Delta Fo_1 = Fo_2 - Fo_1 = (1/a)[\ln(Bi/(7-k)) - \ln(Bi/K_A)] = \\ = (1/a)\ln((7-k)/K_A), \quad (33)$$

$$\Delta Fo_2 = Fo_3 - Fo_2 = (1/a)\ln(2(7+k)/(7-k)) \text{ и} \\ \Delta Fo_3 = Fo_3 - Fo_1. \quad (34)$$

Результаты расчетов разности чисел Фурье по уравнениям (33) и (34) при $a = b_2^2(k)$ и различном коэффициенте геометрической формы k приведены в табл. 1.

Таблица 1. Разности максимальных времен в зависимости от k при $Bi=0$

Фактор формы k	$a = b_2^2$	ΔFo_1	ΔFo_2	ΔFo_3
1	$(2\pi)^2$	0,5703	0,1846	0,7548
2	$3,8317^2$	0,2040	0,0872	0,2912
3	$(3\pi/2)^2$	0,1166	0,0725	0,1891

Из анализа данных табл. 1 следует, что с ростом коэффициента k , т. е. при переходе от плоских тел к сферическим, разности ΔFo_i уменьшаются примерно в 3—1,5 раза. Во столько же раз ΔFo_1 больше чем ΔFo_2 .

Для выяснения динамики изменения термических напряжений от фактора формы и других числах Био поступим следующим образом.

Результаты расчетов при $Bi=1$ максимальных времен Fo_j по формуле (18) и соответствующих этим временам максимальных термических напряжений на поверхности, $\Delta\theta_m$ и термонапряжений в центре тел по уравнению (19) приведены в табл. 2. Там же представлены данные при $Bi = \infty$.

Таблица 2. Коэффициенты b_j , максимальные времена Fo_j , $\tilde{\sigma}_{м.п}$, $\Delta\theta_m$ и $\tilde{\sigma}_{м.ц}$ при $Bi=1$ и ∞

Пластина ($k=1$)						
j	Число Био $Bi=1$			$Bi=\infty$		
	b_j	Fo_j	S_j	b_j	Fo_j	S_j
1	0,121350	0,191828	0,208348	1	0	1
2	0,082567	0,226851	-0,308331	1/3	0,05666	-0,98655
3	0,051086	0,270518	-0,101940	0,09993	0,11669	-0,30838
Цилиндр ($k=2$)						
1	0,197757	0,107580	0,159022	1	0	1
2	0,101231	0,152028	-0,306990	0,28556	0,05074	-0,96792
3	0,069533	0,176960	-0,152620	0,14446	0,07833	-0,46734
Шар ($k=3$)						
1	0,249570	0,070318	0,13075	1	0	1
2	0,099923	0,116690	-0,30837	1/4	0,04682	-0,9449
3	0,073222	0,132440	-0,18445	0,16172	0,06153	-0,5688

Анализ уравнений (18) и табл. 2 позволяет сделать вывод о том, что максимум величин наступает в последовательности $j=1, 2, 3$ и с ростом числа Био эти времена уменьшаются, а различия максимальных времен увеличиваются, вплоть до $\Delta Fo_3 \cong Fo_{3,\infty} = 0,07833$ — см. например табл. 2 для цилиндра.

Следует отметить также, что при малых и умеренных числах Био максимальный перепад температур $\Delta\theta_{max}$ не зависит от формы тела, а определяется только числом Био.

На практике технологов интересует вопрос — насколько термические напряжения на поверхности тела больше, чем в его середине. Обозначим их отношение $R = \sigma_{п}/\sigma_{ц}$. Наиболее просто R можно найти в стадии регулярного режима нагрева (РРН), который наступает при числах Фурье $Fo > 0,3$ и когда вместо бесконечных сумм в уравнениях (2)...(10) можно ограничиться одним членом ряда. Тогда, деля уравнение (2) на (3) и учитывая упрощенные соотношения (30) и (31), получим

$$R = \tilde{\sigma}_{п}/\tilde{\sigma}_{ц} = D_1/C_1 = \\ = P_1 Bi/(4K_A Bi) \approx R_0(1 - Bi/(k+2)). \quad (35)$$

При числе $Bi=0$ $R_0 = R(0) = -2/k$.

Таким образом, в отличие от процесса нагрева плоских тел, когда при $k=1$ $R_0 = -2$, термические напряжения на поверхности тела в 2 раза больше термонапряжений в центре, при нагреве цилиндрических тел напряжения в центральных точках тела примерно равны, а для сферических тел в 1,5 больше, чем на поверхности.

Асимптотика при больших числах Био. Теперь корни μ_n , в том числе и первый, находим по уравнению (22). Тогда отношение

$$\delta = [a_1(1-\beta)]^2 / [a_2(1-\beta)]^2 \approx (a_1/a_2)^2 = \text{const}. \quad (36)$$

В данном случае отношение корней совпадает с максимально возможным, которое получается в предельном случае при $Bi = \infty$: $\delta_\infty = \delta(\infty)$.

Разность квадратов корней

$$a = a_2^2(1-\beta)^2(1-\delta). \quad (37)$$

При $Bi = \infty$ $a = a_\infty = a_2^2(1-\delta_\infty)$.

Амплитуды:

$$P_1 = 2\beta / (e + z^2) \approx 2\beta;$$

$$P_2 = 2\beta / (e + z^2/\delta) \approx 2\beta \approx P_1,$$

где $z = \mu_1/Bi = a_1(1-\beta)\beta$; $e = 1 + \beta(2-k)$.

В работе [1] было получено, что тепловая амплитуда при больших числах Био для плоских тел пропорциональна $\sqrt{1-z^2}$. Предполагая такую же зависимость для любых тел, получим

$$A_1 = A_{1,\infty} \cdot \sqrt{1-z^2} \approx A_{1,\infty} \cdot (1-z^2/2); \quad (38)$$

$$A_2 = A_{2,\infty} \cdot \sqrt{1-z^2/\delta} \approx A_{2,\infty} (1-z^2/2\delta),$$

где $A_{1,\infty}$ и $A_{2,\infty}$ — амплитуды при $Bi = \infty$. Осуществляя в уравнении (17) предельный переход при $Bi = \infty$, т.е. полагая в нем $\mu_n = a_n$, будем иметь для пластины

$$A_{n,\infty} = (-1)^{n+1} 2/a_n \text{ и шара } A_{n,\infty} = (-1)^{n+1} 2. \quad (39)$$

В случае цилиндра ($k=2$), с учетом характеристического уравнения (14), т.е. при $H_2 = Bi/(\mu_n J_1(\mu_n))$ вместо $H_2 = 1/J_0(\mu_n)$, получим

$$A_{n,\infty} = 2/(a_n J_1(a_n)). \quad (40)$$

Можно также, используя в (17) разложение $S(x) = J_0^2(x) + J_1^2(x) \approx 2/(\pi x)$ при больших аргументах получить по аналогии (39) приближенную формулу $A_{n,\infty} \approx (-1)^{n+1} \sqrt{2\pi/a_n}$.

Подробности вывода уравнений (17), (39) и (40) приведены в [1, 7, 8].

Некоторые наиболее важные коэффициенты и амплитуды при $Bi = \infty$ представлены в табл. 3.

Для приближенных расчетов можно принять

$$a_\infty \approx 5(3+k). \quad (41)$$

Расчет амплитуды, например, для цилиндра по уравнению (38) при $Bi=10$ дает $A_1 \approx 1,5636$ с погрешностью 0,3% по сравнению с точным значением $A_1^T(10) = 1,5677$ [9].

Таблица 3. Коэффициенты и амплитуды при $Bi = \infty$

Фактор формулы k	a_1	a_2	δ_∞	$a_\infty = a_2^2(1-\delta_\infty)$	$A_{1,\infty}$	$-A_{2,\infty}$
1	$\pi/2$	$3\pi/2$	1/9	19,739209	$4/\pi$	$4/(3\pi)$
2	2,404826	5,520078	0,189792	24,688073	1,6021	1,0648
3	π	2π	1/4	29,608813	2	2

Амплитуды

$$M_1 = P_1 k Bi / \mu_1^2 = 2 \cdot k / [a_1^2(1-\beta)^2(e+z^2)] \approx M_{1,\infty}(1+k\beta-z^2);$$

$$M_2 = M_{2,\infty} \cdot (1+k\beta-z^2/\delta),$$

где $M_{1,\infty} = 2 \cdot k / a_1^2$; $M_{2,\infty} = 2k / a_2^2 = \delta_\infty \cdot M_{1,\infty}$.

$$C_1 = M_1 - A_1 = M_{1,\infty}(1+k\beta) - A_{1,\infty} \sqrt{1-z^2};$$

$$C_{1,\infty} = M_{1,\infty} - A_{1,\infty}.$$

$$C_2 = M_2 - A_2; \quad C_{2,\infty} = M_{2,\infty} - A_{2,\infty}$$

Например, для цилиндра $C_{1,\infty} = -0,910425$;

$C_{2,\infty} = 1,196071$.

$$E_1 = P_1 - A_1 = 2\beta / (1+z^2) - A_{1,\infty} \cdot \sqrt{1-z^2}; \quad E_{1,\infty} = -A_{1,\infty};$$

$$E_2 = 2\beta / (1+z^2/\delta) - A_{2,\infty} \sqrt{1-z^2/\delta}; \quad E_{2,\infty} = -A_{2,\infty}.$$

$$D_1 = M_1 - P_1; \quad D_{1,\infty} = M_{1,\infty};$$

$$D_2 = M_2 - P_2; \quad D_{2,\infty} = M_{2,\infty}.$$

Теперь коэффициенты для расчета максимальных времен примут вид:

$$b_1 = \frac{\delta [M_{1,\infty} \cdot (1+k\beta-z^2) - 2\beta / (e+z^2)]}{-M_{2,\infty} \cdot (1+k\beta-z^2/\delta) + 2\beta / (e+z^2/\delta)}; \quad (42)$$

$$b_2 = \frac{\delta [A_{1,\infty} \sqrt{1-z^2} - 2\beta / (e+z^2)]}{-A_{2,\infty} \sqrt{1-z^2/\delta} + 2\beta / (e+z^2/\delta)}; \quad (43)$$

$$b_3 = \frac{\delta [A_{1,\infty} \sqrt{1-z^2} - M_{1,\infty} \cdot (1+k\beta-z^2)]}{-A_{2,\infty} \sqrt{1-z^2/\delta} + M_{2,\infty} \cdot (1+k\beta-z^2/\delta)}. \quad (44)$$

В предельном случае при $Bi = \infty$:

$$b_{1,\infty} = -\delta_\infty D_{1,\infty} / D_{2,\infty} = -1;$$

$$b_{2,\infty} = -\delta_\infty A_{1,\infty} / A_{2,\infty};$$

$$b_{3,\infty} = -\delta_\infty C_{1,\infty} / C_{2,\infty}. \quad (45)$$

Так как $b_{1,\infty} = -1$ лишено физического смысла, следует взять $b_{1,\infty} = |1|$.

Величины $b_{j,\infty}$, вычисленные по уравнению (45), времена $Fo_{j,\infty}$ согласно (18) и максимальные термические напряжения $S_{j,\infty}$ при $Bi = \infty$ приведены в табл. 2.

Отношение термонапряжений при $Bi = \infty$ $R_\infty = D_{1,\infty} / C_{1,\infty}$.

Следует отметить, что если приближенно считать $R = -2/k$, то из уравнения (9) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = -K_\sigma \cdot \Delta\theta(Fo), \quad (46)$$

где $K_\sigma = 2/(2+k)$.

Это соотношение при $k=1$ и 2 полностью совпадает с формулами Н.Ю. Тайца [2] для максимальных термических напряжений

$$\sigma_{max}(\tau) = K_\sigma \beta E \Delta t(\tau)/(1-\nu). \quad (47)$$

Из анализа уравнения (42) вытекает, что коэффициент b_1 меняет знак по причине изменения знака амплитуды D_2 , изменяющейся от $-kBi/b_2^2$ при малых числах Био до $D_{2,\infty} \cong +0,13$. Из условия равенства нулю D_2 можно получить граничное число $Bi_M = 15$ выше которого имеем случаи нагрева термически «массивного» тела. Таким образом, при числах $Bi < Bi_M$ для определения времени Fo_1 можно применять формулу (18) в которой b_1 определяется по уравнению (42), а при $Bi > Bi_M$ коэффициент b_n становится отрицательным и нельзя пользоваться формулой (18). Возникшую ситуацию можно объяснить следующим образом. Формулы (16)...(19) получены с учетом всего двух членов ряда. С ростом числа Био максимальное время Fo_1 уменьшается, вплоть до 0 при $Bi = \infty$.

При очень малых числах Фурье ($Fo < 0,1$) расчёт температур по уравнениям (1)...(10) затруднителен из-за необходимости учета большого количества членов ряда, ввиду его плохой сходимости. В этом случае для расчёта поверхностной температуры можно использовать формулы, полученные методом операционного исчисления в работе [9]. Объединяя эти формулы в одно уравнение для простых тел, будем иметь:

$$\theta_n(Fo) = 1 - H(1 - \varphi(y)), \quad (48)$$

где $H = Bi/G$; $G = Bi - (k-1)/2$; $y = G\sqrt{Fo} \equiv Ti$ – модифицированное время, число Тихонова; $\varphi(y) = e^{y^2} \operatorname{erfc}y$; $\operatorname{erfc}y = (1 - \operatorname{erf}y)$ — дополнительный интеграл вероятностей; $\operatorname{erf}y = p \cdot \int_0^y e^{-x^2} dx$ — функция ошибок Гаусса; $p = 2/\sqrt{\pi}$; k — фактор формы, см. уравнение (17).

Зная температуру поверхности и используя методику [1], можно найти среднемассовую температуру

$$\theta_{cp}(Fo) = 1 - k \int_0^{Fo} Bi \cdot \theta_n(Fo) dFo = 1 - k[(1-H) \cdot Fo + H\Phi(y)/G], \quad (49)$$

где $\Phi(y) = G^2 \int_0^{Fo} \varphi(y) dFo = \varphi(y) + py - 1$.

Следует отметить, что при больших числах Био величины $G \approx Bi$, $H = 1$ и решение (48) для температуры поверхности и (49) — среднемассовой соответствуют случаю нагрева (охлаждения) плоских тел.

Сопоставление приближенных зависимостей (48) и (49) с точными решениями (5) и (7) показало, что погрешность уравнения (49) при расчете средней температуры гораздо меньше, чем уравнения (48) для температуры поверхности. Так, например, в случае нагрева пластины при $Bi = 1$ формулой (48) можно пользоваться

с относительной погрешностью $\delta t_n = (t_n^{\text{точное}} - t_n^{\text{прибл}}) \cdot 100/t_n^{\text{точн}}$ менее +5% при времени начальной стадии от 0 до $Fo_{н.с} = 0,4$, а формулой (49) с погрешностью $\delta t_{cp} \leq -5\%$ до момента времени $Fo_{н.с} = 0,53$.

Знаки перед погрешностями δt означают, что температура поверхности при расчете по уравнению (48) занижена, а средняя температура по (49) — завышена по сравнению с точными значениями. При расчетах процессов охлаждения знаки погрешностей поменяются на обратные.

Решения (48) и (49) можно упростить путем разложения функции $\varphi(y)$ в ряд при малых ($y < 1$):

$$\varphi(y) = 1 - py + y^2 - \frac{2p}{3}y^3 + \frac{y^4}{2!} \dots \quad (50)$$

и при больших ($y \gg 1$) аргументах:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}y} [1 - u(1 - 3u(1 - 5u(1 - \dots)))] \quad (51)$$

где $u = 1/(2y^2)$.

Графическое решение уравнений (48) и (49) приведено на рисунке 1.

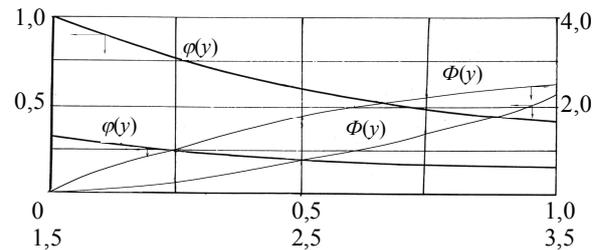


Рис. 1. Зависимость функций φ и Φ от времени y

Интересно отметить, что, в отличие от уравнения (5), где температура поверхности зависит от двух величин – числа Био и Фурье, из уравнения (48) следует, что θ_n зависит только от одного параметра — числа Тихонова $Ti = G\sqrt{Fo}$. Вместо семейства кривых (5) на рисунке 1 имеем всего одну линию. Решения, подобные (48), когда исчезает зависимость процесса от какого-либо параметра, принято называть автомодельными.

При числах $Bi = 1$ для шара или $1/2$ для цилиндра коэффициент $G = 0$ и в расчетных соотношениях (48) и (49) следует раскрывать неопределенность типа $0/0$. Используя разложение (50) функции $\varphi(y)$ при малых аргументах, из уравнения (48) получим для температуры на поверхности:

$$\theta_n(Fo) = 1 - pBi_*\sqrt{Fo} \quad (52)$$

и для среднемассовой из (49)

$$\theta_{cp}(Fo) = 1 - kBi_*Fo \left(1 - 2pBi_*\sqrt{Fo}/3\right), \quad (53)$$

где $Bi_* = 1$ и $k = 3$ для шара и $Bi_* = 1/2$ и $k = 2$ — для длинного цилиндра.

Таким образом, при малых временах процесса ($Fo < 0,1$) вместо уравнения (5) будет (48), вместо (7) — (49), а температуру в центре тела на начальной стадии нагрева приближенно можно принять $\theta_{ц} \cong 1$.

С учетом сказанного уравнение (2) для расчета термических напряжений на поверхности примет вид

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = H(1 - \varphi(y)) - k[(1 - H)Fo + H\Phi(y)/G]. \quad (54)$$

При $G = 0$, после раскрытия неопределенности с помощью (50), получим

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = \rho Bi_* \sqrt{Fo} (1 + 2k Bi_* \sqrt{Fo}/3) - k Bi_* Fo. \quad (55)$$

Дифференцируя уравнение (54) по времени и приравнявая производную нулю с учетом разложений (50) и (51) можно получить формулу, аналогично (18), для расчета времени наступления $Fo_{м.п}$ максимального термического напряжения на поверхности. Ввиду сложности (54) и необходимости в дальнейшем решать трансцендентные уравнения, покажем ход расчета на более простом уравнении (55). Из соотношения $d\tilde{\sigma}_{п}/dFo = 0$ получим квадратное уравнение, решение которого имеет вид:

$$Fo_{м.п} = G_3/\gamma_3, \quad (56)$$

где $G_3 = 1/[k(\pi k - 4Bi_*)]$; $\gamma_3 \cong 1 - \rho_3$; $\rho_3 = (2k Bi_* \cdot G_3)^2$.

Расчет для шара при $k = 3$ и $Bi_* = 1$ дает $Fo_{м.п}(1) = 0,071$, что хорошо согласуется с ранее полученной при $Bi = 1$ по (18) величиной 0,070 (см. табл. 2).

Получим приближенные формулы для расчета максимального времени $Fo_{м.п}$ для двух предельных случаев. При малых Био время $y < 1$ и можно воспользоваться разложением (50), тогда, полагая в уравнении (54) $\varphi(y) \cong 1 - \rho y$ и $\Phi \cong y^2$ из соотношения $d\tilde{\sigma}_{п}/dFo = 0$, получим

$$Fo_{м.п} = (1/\pi)(Bi/V)^2, \quad (57)$$

где $V = Bi^2(1 - k/G) - k(H - 1)/H$. Для плоских тел $Bi/V = \beta/(1 - \beta)$. При больших числах Био $y > 1$ используем (51) $\varphi(y) \approx 1/(\sqrt{\pi} y)$ и аналогично получению (57) будем иметь

$$Fo_{м.п} = \beta^6/16. \quad (58)$$

Иногда требуется определить расположение координаты $X_{н}$ нейтрального слоя в котором термические напряжения меняют знак с $+\tilde{\sigma}$ на $-\tilde{\sigma}$, т.е. в этой точке равны нулю. Наиболее просто это можно сделать в стадии РРН. Тогда согласно уравнению (1) $\theta_{ср}(Fo) = \theta(X_{н}, Fo)$ или $M_1 = P_1 \cdot U_1(X_{н})H_k$. Разрешая последнее выражение относительно $X_{н}$, с помощью разложения функции U_1 и H_k в ряд, получим при малых числах Био

$$X_{н,0} = \sqrt{2K_A} \quad (59)$$

и при больших числах Био

$$X_{н,\infty} = \sqrt{M_{1,\infty}(1 - M_{1,\infty}/A_{1,\infty})}. \quad (60)$$

Значения отношений термонапряжений и координата нейтрального слоя в зависимости от фактора

формы при крайних значениях чисел Био $Bi = 0$ и $Bi = \infty$ приведены в табл. 4.

Таким образом, поскольку $X_{н} > 0,5$ нейтральные слои расположены ближе к поверхности, а само $X_{н}$ колеблется в узких пределах — от 0,56 до 0,78.

Следует отметить, что при нагреве абсолютные, т.е. размерные термические напряжения $\sigma = \sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ поменяют знаки за счет отрицательности σ_0 из-за $\Delta t_0 = (t_0 - t_c) < 0$.

Таблица 4. Значения R и $X_{н}$ при $Bi = 0$ и $Bi = \infty$

Фактор формы $ k$	- R		$ X_{н}$	
	$ Bi = 0$	$ Bi = \infty$	$ Bi = 0$	$ Bi = \infty$
1	2	1,752	$ 1/\sqrt{3} = 0,577$	0,5607
2	1	0,760	$ 1/\sqrt{2} = 0,707$	0,6269
3	2/3	0,606	$ 1/\sqrt{3/5} = 0,775$	0,7797

В заключение укажем, что все полученные решения описывают как процесс конвективного нагрева тел, так и их охлаждение.

Выводы

1. Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) тел простой формы. Получены простые и эффективные формулы для двух предельных случаев малых и больших чисел Био на начальной и регулярной стадиях нагрева. Сделан акцент на определение максимальных термонапряжений и времени их наступления.

2. При нагреве на поверхности тел возникают сжимающие (отрицательные) напряжения, а в середине растягивающие (положительные); в случае процесса охлаждения знаки поменяются.

3. Нейтральные слои расположены ближе к поверхности.

4. Наибольшие отличия термонапряжений поверхность-центр испытывает пластина, в которой напряжения на поверхности в 2 раза больше, чем в центральных точках, для цилиндра они примерно равны, а для сферических тел, наоборот в 1,5 раза больше, чем на поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

- Горбунов А.Д. К расчёту термических напряжений при конвективном нагреве пластины // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: 2010. № 1(22). – С. 16–21.
- Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Металлургиздат, 1950. – 151 с.
- Гольдфарб Э.М., Горбунов А.Д. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел в прямотоке и противотоке // ИФЖ. – 1984. – Т.46. – № 5. – С. 870–871.
- Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах тепло-

проводности цилиндра при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 12. – С. 94–97.

5. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности пластины при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 8. – С. 104–108.

6. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности шара при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1984. – № 2. – С. 79–83.

7. Горбунов А.Д. К расчету термических напряжений при конвективном нагреве шара // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2011. № 1(24). – С. 23–28.

8. Горбунов А.Д. К расчету термических напряжений при конвективном нагреве цилиндрических тел // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2011. № 2(25). – С. 11–16.

9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.

пост. 26.01.12

Тепловые аспекты реализации совмещенных процессов разлива-прокатки

БИРЮКОВ А.Б.

Донецкий национальный технический университет

Разработаны приемы использования математической модели тепловой обработки материалов для изучения тепловых процессов в рамках литейно-прокатных модулей. Для эффективного и прозрачного анализа тепловых процессов предложен ряд зависимостей, позволяющих определять количества теплоты, необходимые для реализации конкретных операций на основании использования понятия среднемассовой энтальпии.

Розроблено заходи щодо використання математичної моделі теплової обробки матеріалів для вивчення теплових процесів в рамках литейно-прокатних комплексів. Для ефективного і прозорого аналізу теплових процесів запропоновано ряд залежностей, що дозволяють визначити кількість теплоти, що необхідна для реалізації конкретних операцій на базі використання поняття середньомасової ентальпії.

Subways for material heat processing mathematical model use for casting-rolling complexes heat processes study are worked out. For heat processes effective and clear analysis some dependences that allow heat quantity demanded for concrete operations realization estimating on the base of mass average enthalpy concept use are proposed.

Постановка проблемы исследования. Известно, что технологии совмещенной разлива-прокатки необычайно перспективны с точки зрения повышения энергоэффективности. Данная работа посвящена исследованию тепловых аспектов реализации совмещенных процессов разлива-прокатки.

Анализ публикаций на тему исследования

Уже несколько десятилетий во многих странах активно ведутся исследования в области реализации совмещенных процессов разлива прокатки, что позволило накопить достаточно богатый практический и теоретический опыт. Усилия ученых, работающих в этом направлении, сосредоточены на минимизации расходов теплоты на нагрев материала перед прокатным станом. В идеальном случае должна реализовываться прямая прокатка без всякого подогрева. Значительные успехи в данной области достигнуты российскими исследователями. В рамках украинской черной металлургии совмещенные процессы разлива-прокатки до сих пор не нашли применения, а для цветной металлургии актуальной является задача совершенствования существующих литейно-прокатных модулей и создания новых конструкций [1-2].

Изложение основного материала. Для оценки эффективности использования литейно-прокатных модулей (ЛПМ) по сравнению с разомкнутым технологическим циклом и для сравнения тепловой работы различных ЛПМ в данной работе предложено ввести понятие эффективности использования тепла разливаемого металла:

$$\eta_{эф} = \frac{Q_{х.п.} - Q_{ЛПМ}}{Q_{х.п.}},$$

где $Q_{х.п.}$ – теплота, затрачиваемая на нагрев металла под прокатку при холодном посаде, Дж/кг;

$Q_{ЛПМ}$ – теплота, затрачиваемая на нагрев металла под прокатку с учетом использования тепла разливаемого металла (горячий посад или прямая прокатка), Дж/кг.

Крайними значениями эффективности использования тепла разливаемого металла являются «0» и «1», причем первое значение соответствует полному отсутствию использования тепла разливаемого металла и холодному посаду, а второе – прямой прокатке без промежуточного нагрева. Использование предложенного показателя позволяет сравнивать между собой