

№ 1, 2, 3 с. Чумаки, с. Заря, с.м.т. Ювілейне, № 1, 2 с. Партизанське, с. В.Маївка, с. Степне за наступними гідрохімічними показниками: Fe , Cl , Cu , SO_4^{2-} , NH_4^+ , NO_3 , сухий залишок, загальна жорсткість за 2003 -2008рр.

Дані о концентрації гідрохімічних показників подано у вигляді масиву: $\{x_{ij}^{(k)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$, де $n=8$ - кількість гідрохімічних показників; m - момент часу дослідження; $k=9$ - кількість точок забору питної води; $x_{ij}^{(k)}$ - концентрація i -го гідрохімічного показника в j -й момент часу для k -ї точки забору води.

Для дослідження впливу техногенного навантаження та якості питної води застосовувалось математичне моделювання, яке засноване на марковських процесах та дозволяє виділити стан питної води та його зміну у часі. Зміна в часі контролює інтенсивність $\lambda(\Delta t)$. Такі показники більш адекватно оцінюють якість питної води так і зміну якості у часі.

Провівши попередній аналіз концентрацій гідрохімічних показників $\{x_{ij}^{(k)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ було виявлено, що процес, який підлягає дослідженню, є нестационарним та розглянувши розсів даних відносно $\overline{x_i^{(k)}}$, $S_i^{(k)}$ і застосувавши модель процесу загибелі та відтворення [2] було виділено 3 зони:

$$\begin{cases} 0: x_{ij}^{(k)} < \overline{x_i^{(k)}} - S_i^{(k)}; \\ 1: \overline{x_i^{(k)}} - S_i^{(k)} \leq x_{ij}^{(k)} \leq \overline{x_i^{(k)}} + S_i^{(k)}; \\ 2: x_{ij}^{(k)} > \overline{x_i^{(k)}} + S_i^{(k)}, \end{cases}$$

де $\overline{x_i^{(k)}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k)}$, $S_i^{(k)} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (x_{ij}^{(k)} - \overline{x_i^{(k)}})^2$.

Відповідно заданих зон була проведена оцінка інтенсивностей потоку вимог протягом часу Δt для знаходження вірогідних кусково-сталих інтенсивностей. Оцінка інтенсивностей пов'язана з процедурою перевірки гіпотези $H_0: \lambda_i = \lambda_{i+1}$ та обчисленням статистичної характеристики

$$t = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\sqrt{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}} \sqrt{\frac{n_i n_{i+1} (n_i + n_{i+1} - 2)}{n_i + n_{i+1}}}$$

яка має t - розподіл з кількістю степенів вільності $v = n_i + n_{i+1} - 2$. Якщо $|t| \leq t_{\alpha/2, v}$, то гіпотеза H_0 є вірною та здійснюється перерахування значення λ_i .

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{\lambda_{21} \lambda_{10}}{\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21}} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_1)(\lambda_{21} + S_1) - \lambda_{12} \lambda_{21}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_2)(\lambda_{21} + S_2) - \lambda_{12} \lambda_{21}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)} \\ P_1(t) = \frac{\lambda_{01} \lambda_{21}}{\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01} (\lambda_{21} + S_1)}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \frac{\lambda_{01} (\lambda_{21} + S_2)}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)} \\ P_2(t) = \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)} \end{cases}$$

де $\Delta = S^3 + S^2(\lambda_{12} + \lambda_{01} + \lambda_{21} + \lambda_{10}) + S(\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21})$
 $\Delta^1 = 3S^2 + 2S(\lambda_{12} + \lambda_{01} + \lambda_{21} + \lambda_{10}) + (\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21})$
 S_1, S_2 - корені рівняння Δ .

$$\lambda_i = \frac{n_i + n_{i+1}}{(N - N_i)(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})}, \text{ де } N_i = \sum_{j=1}^{i+1} n_j.$$

В результаті оцінки інтенсивностей потоків вимог відповідно заданих зон було виділено $\lambda_{ij} = \text{const}, i, j = \overline{0, 2}$.

Граф можливих переходів концентрації хімічних елементів між зонами подано на рис. 1.

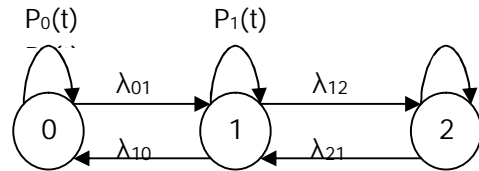


Рис. 1. Граф переходів між зонами.

Так для визначення ймовірностей перебування в різних зонах при $\lambda_{ij} = \text{const}, i, j = \overline{0, 2}$ було розв'язано систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} P_0(t) + \lambda_{10} P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{10} + \lambda_{12}) P_1(t) + \lambda_{01} P_0(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12} P_1(t) - \lambda_{21} P_2(t); \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1, \\ P_0(t_0) = 1, P_1(t_0) = 0, P_2(t_0) = 0 \end{cases}$$

Та було отримано розв'язок для динамічного та стаціонарного режимів.

Розв'язком стаціонарного режиму є:

$$P_0 = \frac{\lambda_{21} \lambda_{10}}{\lambda_{01} \lambda_{21} + \lambda_{01} \lambda_{12} + \lambda_{10} \lambda_{21}},$$

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0,$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} P_0.$$

Для знаходження розв'язку в динамічному режимі застосовувалось перетворення Лапласа. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

Наступним кроком аналізу марківської системи є визначення моменту, у який процес переходить з динамічного режиму в стаціонарний. Для цього задаючись похибкою знаходять границі стаціонарності щодо зон.

$$P_0^{u,s} = P_0 \mp \alpha/2 P_0$$

$$P_1^{u,s} = P_1 \mp \alpha/2 P_1,$$

$$P_2^{u,s} = P_2 \mp \alpha/2 P_2$$

Для знаходження моментів t_0, t_1, t_2 із яких починається стаціонарний режим стосовно

$$P_0(t), P_1(t), P_2(t),$$

розв'язано рівняння вигляду:

$$P_0^s = \frac{\lambda_{21}\lambda_{10}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_1)(\lambda_{21} + S_1) - \lambda_{12}\lambda_{21} \exp^{(S_1 t_0)} + (\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_2)(\lambda_{21} + S_2) - \lambda_{12}\lambda_{21} \exp^{(S_2 t_0)}}{\Delta^1(S_1)}$$

$$P_1^s = \frac{\lambda_{01}\lambda_{21}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}(\lambda_{21} + S_1) \exp^{(S_1 t_0)} + \lambda_{01}(\lambda_{21} + S_2) \exp^{(S_2 t_0)}}{\Delta^1(S_1)}$$

$$P_2^s = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12} \exp^{(S_1 t_0)} + \lambda_{01}\lambda_{12} \exp^{(S_2 t_0)}}{\Delta^1(S_1)}$$

Застосування апарату на основі кусково-марковських процесів представлено на прикладі гідрохімічного показника *Fe* водозабор № 1 с. Чумаки. Ряд спостережень містить дані з 03.06.03 по 01.10.07 рік (рис. 2 а).

З урахуванням представлених зон було розраховано інтенсивності переходів з *i*-ї у *j*-ту зону, результати наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Інтенсивності переходу

Інтенсивності λ_{ij}	Проміжок часу	Кількість вимог	Значення інтенсивностей λ_{ij}
λ_{21}	(20,86; 155,67]	135	0,0015
	(174,88; 185,98]	11	0,0015
	(187,6; 194,9]	7	0,0015
	(304,4; 321,4]	17	0,0016
	(369,49; 448]	81	0,0018
λ_{12}	[0; 20,86]	21	0,0013
	(155,67; 174,66]	19	0,0013
	(185,98; 187,6]	2	0,0016
	(194,9; 304,39]	110	0,0016
	(321,4; 367,48]	81	0,0017
λ_{01}	(513,96; 802]	288	0,0019
λ_{10}	(448; 513,96]	65	0,0013

Для оцінки λ_{ij} було використано процедуру оцінки інтенсивностей потоку вимог наведену вище.

Отримано

$$\lambda_{01} = 0,0019, \lambda_{12} = 0,0015,$$

$$\lambda_{21} = 0,0016, \lambda_{10} = 0,0013$$

Розв'язком стаціонарного режиму при отриманих інтенсивностях є:

$$P_0 = 0,2616, P_1 = 0,3805, P_2 = 0,3579.$$

Динамічний режим при заданих інтенсивностях представляється наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} P_0(t) = 0,2616 + 0,5185 \cdot \exp^{(-0,0018t)} + 0,2227 \cdot \exp^{(-0,0046t)} \\ P_1(t) = 0,3805 + 0,0707 \cdot \exp^{(-0,0018t)} - 0,4471 \cdot \exp^{(-0,0046t)} \\ P_2(t) = 0,3579 - 0,5892 \cdot \exp^{(-0,0018t)} + 0,2244 \cdot \exp^{(-0,0046t)} \end{cases}$$

Задаючись похибкою $\alpha=0.5$ було отримано час переходу системи у стаціонарний режим, який дорівнює 1188 діб або 3,3 років.

За рахунок істотного обсягу обчислень, застосування підходу передбачає автоматизацію процесу аналізу тому даний підхід було реалізовано за допомогою геоінформаційної системи «AquaGIS». В системі «AquaGIS» моделювання як стаціонарного, динамічного режимів та імітаційного моделювання представлено у графічному вигляді (рис. 2 б) так і у табличному (рис. 2 в) з обчисленням похибки імітаційного моделювання.

Аналогічно було проведено моделювання стану підземних за іншими водозаборами та гідрохімічними показниками питної води. В результаті аналізу було отримано значення інтенсивностей по кожному з гідрохімічних показників так і середнє значення інтенсивностей системи, яке має наступні значення: $\lambda_{01}=0,0016$, $\lambda_{12}=0,0017$, $\lambda_{21}=0,0014$, $\lambda_{10}=0,001$. Обчислено середні значення ймовірностей у стаціонарному режимі за гідрохімічними показниками, які наведені у таблиці 2.

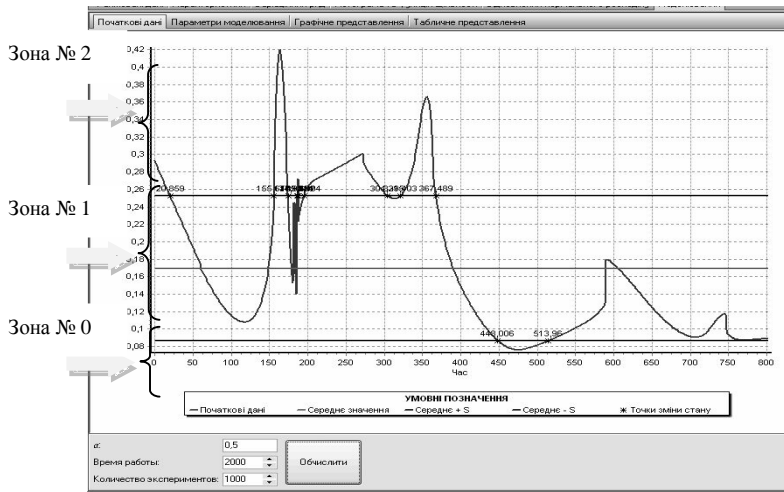
Та середні значення ймовірностей системи у стаціонарному режимі, які дорівнюють

$$P_0 = 0,3024, P_1 = 0,3682, P_2 = 0,3294.$$

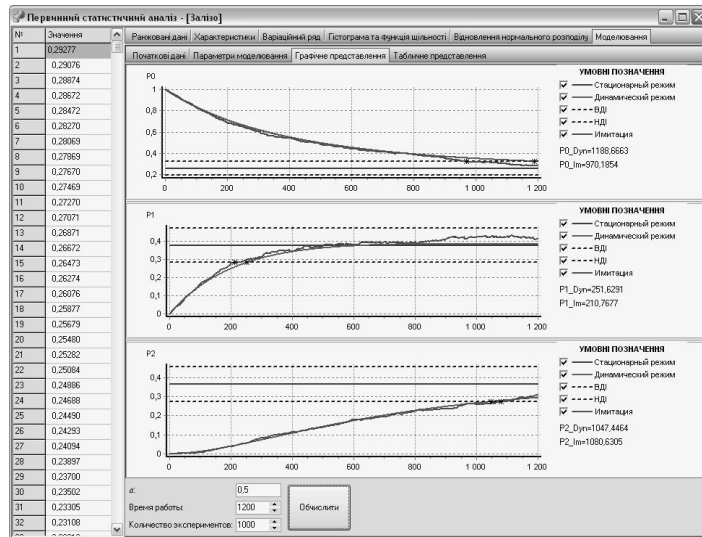
Враховуючи наведені обчислення та задавшись похибкою було отримано час переходу системи у стаціонарний режим при аналітичному розв'язку та при імітаційному моделюванні у табличному (табл. 3) і графічному вигляді (рис. 3 а).

Таблиця 2. Стаціонарний режим системи середнє значення ймовірностей за гідрохімічними показниками

Ймовірності станів	<i>Fe</i>	Сухий залишок	<i>Cu</i>	NH_4^+	<i>Cl</i>	SO_4^{2-}	NO_3	Загальна жорсткість
P_0	0,2813	0,3438	0,3950	0,2084	0,3301	0,3158	0,2788	0,2658
P_1	0,4970	0,3590	0,4334	0,3273	0,3640	0,3456	0,3014	0,3179
P_2	0,2217	0,2972	0,1716	0,4643	0,3059	0,3386	0,4198	0,4163



а)



б)

№	Значення	Статистичні дані	Параметри моделювання	Графічне представлення	Таблице представлення
1	0.29277				
2	0.29076				
3	0.28974				
4	0.28872				
5	0.28472				
6	0.28270				
7	0.28069				
8	0.27868				
9	0.27670				
10	0.27469				
11	0.27270				
12	0.27071				
13	0.26871				
14	0.26672				
15	0.26473				
16	0.26274				
17	0.26076				
18	0.25877				
19	0.25679				
20	0.25480				
21	0.25282				
22	0.25084				
23	0.24886				
24	0.24688				
25	0.24490				
26	0.24293				
27	0.24094				
28	0.23897				
29	0.23700				
30	0.23502				
31	0.23305				
32	0.23108				
33	0.22910				

в)

Рис. 2. Представлення даних для аналізу. а) Дані для аналізу Fe водозабор №1 с. Чумакі; Представлення моделювання на прикладі гідрохімічного показника Fe б) Графічне; в) Таблице

Таблиця 3. Стационарний режим системи. Середній час переходу (часткове представлення $\alpha=0.5$)

Точка водозабору питної води	Гідрохімічний показник							Загальна жорсткість
	Fe	Сухий залишок	Cu	NH ₄ ⁺	Cl	SO ₄ ²⁻	NO ₃	
№ 1 с. Чумаки	1188	1142	-	-	1557	2148	-	2799
с.м.т. Ювілейне	-	2176	2044	2369	2377	2511	675	3497
с. Партизанське	231	1274	1096	3139	2156	2267	3145	2906
с. В.Маївка	2774	2170	-	2469	2862	2533	2469	2170
с. Степне	307	1036	498	3203	2742	2752	2766	2910
с. Заря	262	835	786	971	1850	1873	1800	1711

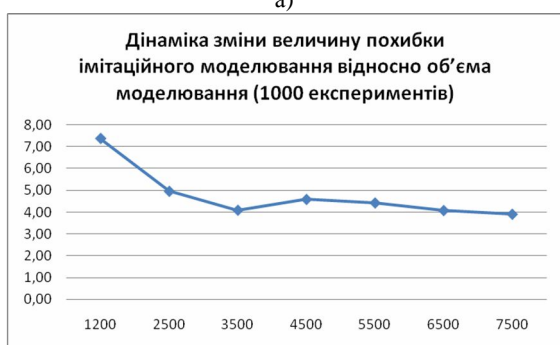


Рис. 3. Дані аналізу. а) середній час переходу системи у стаціонарний режим. Динаміка зміни величини похибки імітаційного моделювання відносно: б) об'єма моделювання ; в) кількості експериментів.

Було проаналізовано вплив об'єму моделювання та кількості експериментів на величину похибки імітаційного моделювання (рис. 3 б, в) та отримано, що похибка імітаційного моделювання зменшується при збільшенні як кількості експериментів так і об'єму моделювання (часу моделювання).

Таким чином, апробована концепція апроксимації неперервних гаусовських випадкових процесів марковськими. На основі наведеної концепції зроблена оцінка гідрохімічних показників: Fe, Cl, Cu, SO₄²⁻, NH₄⁺, NO₃, сухий залишок, загальна жорсткість, питної води та проведено порівняльний аналіз з нормами ГПК.

Результати аналізу свідчать про те, що система в залежності від похибки переходить у стаціонарний режим і в цьому режимі в середньому система перебуває у стані P₀ в середньому 0,3024 (≈30%), у P₁ – 0,3682(≈37%) та у P₂ – 0,3294 (≈33%) часу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг Г.Г. Математическая модель водной экосистемы // Фотосинтезирующие системы высокой продуктивности. / Винберг Г.Г., Анисимов С.И. – М.: Наука, 1966. С. 213-223.
2. Абросов Н.С. Экологические и генетические закономерности сосуществования и коэволюции видов. / Абросов Н.С., Боголюбов А.Г. – Новосибирск: Наука, 1988. – 333 с.
3. Байбуз О.Г. Оперативный анализ в системах мониторинга. / Байбуз О.Г., Приставка О.П., Земляна С.В. – Навч. посіб.– Д.:РВВ ДНУ, 2005. – 92 с.
4. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 180 с.
5. Крестин С.В. Об одном механизме "цветения воды" в водохранилище равнинного типа // Крестин С.В., Розенберг Г.С. – Биофизика. 1996. Т. 41. Вып. 3. С. 650-654.
6. Крестин С.В. Двухмерная модель "цветения воды" в водохранилище равнинного типа / Крестин С.В., Розенберг Г.С. – Изв. СамНЦ РАН. 2002. Т. 4. № 2. С. 276-279.
7. Розенберг Г.С. Модели в фитоценологии. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
8. Федоров В.Д. Экология. / Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. – М.: МГУ, 1980. – 464 с.
9. Флейшман Б.С. Системные методы в экологии // Статистические методы анализа почв, растительности и их связи. – Уфа: БФАН СССР, 1978. С. 7-10.
10. Горстко А.Б. Имитационная система "Азовское море" – инструмент анализа и прогнозирования // Математическое моделирование водных экологических систем. / Горстко А.Б., Эпштейн Л.В. – Иркутск, ИГУ, 1978. С. 47-58.
11. Сурков Ф.А. Моделирование абиотических факторов экосистемы Азовского моря // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. наук. 1977. № 2. С. 21-49.

