подхода к выбору экономичных сушильных аппаратов и оптимальных параметров технологического процесса.

Принципиальная сложность точного математического описания кинетики термической сушки состоит в многообразии механизмов переноса внутренней влаги и многофакторная динамика их конкурентности, определяемая как природой самого материала, так и условиями сушки.

Количественными критериями, характеризующими задачу переноса влаги и тепла, являются числа Био (Bi), величина которых определяет доминирующий механизм переноса, а значит и математическую модель процесса сушки [3]. При Bi > (50 - 60) рассматривается внутренняя задача переноса, при Bi <(0,1-0,2) -внешняя задача и при 0,2 < Bi < 50 - смешанная.

Технологический режим сушки шламовой пульпы предполагает удаление значительного количества влаги (от 30–40 % начального до 5–10 % конечного влагосодержания), что соответствует условиям смешанной задачи.

Первоначально при высокой влажности материала сушка протекает в условиях, характерных внешней задаче. Затем, когда поверхностная влага удалена, и фронт испарения продвигается от геометрической поверхности вглубь материала, сушка соответствует условиям смешанной задачи. Далее устанавливаются типичные условия внутренней задачи.

Ввиду многофакторности внешней задачи, когда поверхность частицы полностью смочена влагой, целесообразно время сушки определять исходя из анализа уравнений теплового баланса. Когда же поверхность частицы обезвоживается, удобнее рассматривать кинетику массопереноса влаги, аппроксимируя многообразие видов влагопереноса эффективным уравнением диффузии с граничными условиями третьего рода [4].

**Цель работы** состоит в аналитической оценке длительности термического конвективного процесса удаления влаги из частиц шламовой пульпы с позиций теплового баланса и комплексной задачи массопереноса.

**Теоретический анализ, результаты исследований**. В рассматриваемом технологическом процессе высокодисперсные частицы шлама находятся в медленно обтекаемом теплоносителе, т.е. удаление влаги происходит в типичных условиях конвективного нагрева квазиизолированных частиц [1]. В этом случае более обоснованной моделью процесса сушки будет рассмотрение кинетики сушки отдельной частицы шлама сферической формы радиусом R с учетом функции распределения частиц по радиусам f(R).

По характеру доминирующего физического процесса выделяют три временных периода сушки: период разогрева, период постоянной скорости удаления влаги (период I), период внутреннего массопереноса (период II). Определим их длительность для отдельно взятой частицы шлама.

### Период разогрева

Этот период характерен тем, что весь поток тепловой энергии $j_Q$, подводимой к телу, расходуется на его прогрев и на некоторое испарение влаги:

$$j_Q = -r_n G_T \frac{d\overline{U}}{dt} + \left(c_м + c_ж \overline{U}\right) \cdot G_T \frac{d\overline{T}}{dt} , \qquad (1)$$

где $r_n$ – удельная теплота парообразования; $G_T$ – масса сухого тела; $\overline{U}, \overline{T}$ – влагосодержание и температура частицы, усредненные по объему, соответственно; $c_м, c_ж$ – удельные теплоемкости материала и жидкости, соответственно.

Усредненная температура тела при этом изменяется от его начальной температуры $\overline{T} = T_н$ до температуры мокрого термометра $T_{м.т}$. До установления теплового баланса между притоком и расходом энергии на испарение жидкости со скоростью $N$ (начало периода I), изменение влагосодержания на рассматриваемом участке времени выражается дифференциальным уравнением [5]:

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = \frac{\overline{T} - T_н}{T_{м.т.} - T_н} . \qquad (2)$$

Приток конвективного тепла к телу можно выразить через коэффициент теплоотдачи б:

$$j_Q = \alpha \cdot \left(T_c - \overline{T}\right) \cdot S , \qquad (3)$$

где $T_c$ – температура внешней среды (теплоносителя); $S$ – площадь поверхности тела.

Для тела, имеющего малые размеры и массу, как свидетельствуют экспериментальные данные [5], период прогрева и скорость испарения жидкости незначительны. Тогда, полагая $\frac{d\overline{U}}{dt} \approx 0$, можем упростить решение системы уравнений (1), (2), (3):

$$\overline{T}(t) = T_c - \left(T_c - T_н\right) \cdot e^{-\alpha \frac{S}{G_T\left(c_м + c_ж \cdot U_н\right)} \cdot t} , \qquad (4)$$

$$\overline{U}(t) = U_н - \frac{T_c - T_н}{T_{м.т} - T_н} \times$$
$$\times N \left\{ t - \left( \frac{c_м + c_ж \cdot U_н}{\alpha \cdot S} \right) \cdot G_T \cdot \left( 1 - e^{-\alpha \frac{S}{G_T\left(c_м + c_ж \cdot U_н\right)} \cdot t} \right) \right\} . \qquad (5)$$

Легко заметить, что характер зависимостей $\overline{T}(t)$ и $\overline{U}(t)$ противоположен, что соответствует физической картине периода прогрева влажного тела.

Длительность периода разогрева $\Delta t_p = t_{м.т} - t_н$ определим из выражения (4), которое в конечной временной точке этого периода имеет вид:

$$T_{м.т.} = T_c - \left(T_c - T_н\right) \cdot e^{-q \Delta t_p} , \qquad (6)$$

где $q = \alpha \frac{S}{G_T\left(c_м + c_ж \cdot U_н\right)}$; $t_{м.т}$ – время достижения температуры мокрого термометра; $t_н$ – начальное время периода разогрева.

Положим начало процесса $t_н = 0$, тогда из уравнения (6) получим:

$$\Delta t_p = \frac{1}{q} \ln\left( \frac{T_c - T_н}{T_c - T_{мт}} \right) . \qquad (7)$$

Для частицы сферической формы

$$q = \frac{3\alpha}{R\rho_T\left(c_c + c_ж \cdot U_н\right)} ,$$

где $\rho_T$ – плотность сухого вещества.

Таким образом:

$$\Delta t_p = \frac{R\rho_T\left(c_м + c_ж \cdot U_н\right)}{3\alpha} \ln\left( \frac{T_c - T_н}{T_c - T_{м.т.}} \right) = k_1 \cdot \frac{R\rho_T c_ш}{\alpha} , \qquad (8)$$

где $k_1 = \frac{1}{3} \ln\left( \frac{T_c - T_н}{T_c - T_{м.т}} \right)$, $c_ш$ – удельная теплоемкость высушиваемого шлама, $c_ш = c_м + c_ж \cdot U_н$.

**Первый период сушки**

Это период постоянной скорости интенсивного испарения влаги, т.е. весь поток подводимой тепловой энергии затрачивается на испарение:

$$\alpha\left(T_c - \overline{T}\right)\cdot S = -r_n G_T \frac{d\overline{U}}{dt}. \quad (9)$$

Отсюда находим:

$$N = -\frac{\alpha\left(T_c - \overline{T}_{м.т}\right)\cdot S}{r_n \cdot G_T} = const. \quad (10)$$

Кривую кинетики сушки в этом периоде находим интегрированием:

$$\int\limits_{\overline{U}(t_1)}^{\overline{U}(t)} d\overline{U}' = -\alpha\frac{\left(T_c - \overline{T}_{м.т}\right)\cdot S}{r_n \cdot G_T}\int\limits_{t_{м.т}}^{t} dt' \Rightarrow \overline{U}(t) = \\ = \overline{U}(t_{м.т}) - \alpha\frac{\left(T_c - \overline{T}_{м.т}\right)\cdot S}{r_n \cdot G_T}\cdot(t - t_{м.т}). \quad (11)$$

Временная зависимость влагосодержания представляет собою убывающую прямую линию.

Первый период длится до полного испарения свободной жидкости влажного тела и заканчивается при некотором ее содержании $\overline{U}(t_2)$. Поскольку вся подводимая тепловая энергия затрачивается только на испарение жидкости, температура тела остается неизменной $\overline{T}(t) \neq f(t) = const$ и равна температуре мокрого термометра $\overline{T}(t) = T_{м.т}$.

Кинетика первого периода сушки описывается выражением (11), из которого легко определяется длительность периода постоянной скорости сушки (период I):

$$\Delta t_1 = \frac{\overline{U}(t_{м.т}) - \overline{U}(t_2)}{\alpha \cdot S\left(T_c - \overline{T}_{м.т}\right)}\cdot r_n G_T. \quad (12)$$

Начало этого периода $t_{мт}$ соответствует влагосодержанию $\overline{U}(t_{м.т})$, установившемуся на конец периода разогрева и момента достижения телом температуры мокрого термометра. Длительность $Дt_1$ определяется количеством свободной жидкости и скоростью ее испарения. Конечный временной момент этого периода идентифицируется точкой начала возрастания температуры тела от $\overline{T}_{м.т}$ до $T_c$ или соответствует моменту полного испарения жидкости и переходу ко второму периоду - внутреннему массопереносу.

Для сферической частицы радиуса $R$ выражение (12) принимает вид:

$$\Delta t_1 = k_2 \frac{\rho_T \cdot R \cdot r_n}{\alpha}, \quad (13)$$

где $k_2 = \frac{1}{3}\frac{\overline{U}(t_{м.т}) - \overline{U}(t_2)}{T_c - \overline{T}_{м.т}}$.

**Второй период сушки (период II)**

Первый период сушки заканчивается при температуре $t = t_2$ и содержании влаги $\overline{U} = \overline{U}(t_2)$. Эти условия являются точкой начала второго периода, который определяется внутренним массопереносом. Конечная временная точка периода II соответствует величине остаточного влагосодержания $U_k$, устанавливаемой техническими требованиями к шламовому материалу.

Температурный режим второго периода сушки легко получить, рассматривая задачу теплопереноса при нагреве высушиваемого тела во внешней среде с температурой $T_c$. При этом характер зависимости $\overline{T}(t)$ одинаков для тел различной геометрической формы [6]. В рассматриваемом случае:

$$T(r,t) = T_c - (T_c - T_н)\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R \cdot \sin\frac{r}{R}}{r \cdot \mu_n}\cdot e^{-\mu_n^2 F_0} \quad (14)$$

где $F_0 = \frac{\alpha \cdot t}{R^2}$ – критерий Фурье; $б$ – коэффициент температуропроводности; $r$ - радиальная координата; $\mu_n$ - корни трансцендентного уравнения; $Bi$ - критерий Био; $A_n = \frac{\sin\mu_n - \mu_n \cdot \cos\mu_n}{\mu_n(\mu_n - \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n)}$, таблицы корней $м_n$ представлены в [6, 7].

Из выражения (14) видно, что с увеличением времени сушки температура высушиваемого тела возрастает и в пределе $t \to \infty$, $\overline{T}(r,t) \to T_c$, т.е. при переходе в равновесное состояние со средой.

В периоде II массоперенос влаги полностью интерпретируется комплексной задачей, где коэффициент диффузии $Д$ будет эффективным, учитывающим все механизмы переноса и определяемый экспериментально.

Для получения кинетических кривых $C(r,t)$ необходимо решить для сферической частицы радиуса $R$ следующую задачу:

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} = Д\left(\frac{\partial^2 C(t,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c(t,r)}{\partial r}\right). \quad (15)$$

Начальные условия:

$$C(t = 0; r) = C_{t_2}.$$

Граничные условия:

$$Д\frac{\partial C}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\beta\left[C(t,r) - C_c\right],$$

где в – коэффициент массоотдачи.

Используя метод разделения переменных Фурье, решение сводится к нахождению собственных значений задачи Штурма-Лиувилля. В результате получим:

$$C(t,r) = C_c + 2R\left(C_{t_2} - C_c\right)\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{r\mu_n}\cdot e^{-\mu_n^2 \frac{Д}{R^2}t}. \quad (16)$$

Усреднение (16) по объему сферической частицы приводит к зависимости:

$$\overline{C}(t,r) = C_c + \\ + 6\left(\overline{C}_{t_2} - C_c\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_n - \mu_n \cdot \cos\mu_n)}{\mu_n^3(\mu_n - \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n)}\cdot e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)\cdot Д \cdot t} \quad (17)$$

Начальную концентрацию этого периода $C_{t2}$ с учетом $C = p_т \cdot U$ получим из выражения (11):

$$\overline{C}_{(t_2)} = C_0 - \frac{T_c - T_н}{T_{м.т} - T_н}\cdot\rho_m \cdot N\left\{\Delta t_p - \left(\frac{c_м + c_ж \cdot U_н}{\alpha \cdot S}\right)\times \right. \\ \left. \times G_T \cdot \left(1 - e^{-\alpha\frac{S}{G_T(c_м + c_ж \cdot U_н)}\cdot\Delta t_p}\right)\right\} - N \cdot \Delta t_1. \quad (18)$$

Отсюда время сушки частиц шлама до остаточной концентрации влаги $\overline{C}_к$ будет равно:

$$\Delta\tau_{\text{к}} \approx \frac{R^2}{\mu_1 \text{Д}}\cdot\ln\frac{6\left(\overline{C}_{t_2} - C_c\right)\cdot\left(\sin\mu_1 - \mu_1\cdot\cos\mu_1\right)^2}{\left(\overline{C}_{\text{к}} - C_c\right)\cdot\mu_1^3\cdot\left(\mu_1 - \sin\mu_1\cdot\cos\mu_1\right)}, \quad (19)$$

где ограничились первым членом быстро сходящегося ряда.

**Выводы**

Таким образом, длительность всего процесса сушки частицы шлама с эквивалентным радиусом R составляет:

$$\Delta\tau_c = k_1\frac{R\cdot\rho_T\cdot C_{\text{ш}}}{\alpha} + k_2\frac{R\cdot\rho_T\cdot r_n}{\alpha} + k_3\frac{R^2}{\text{Д}}, \quad (20)$$

где $$k_3 = \frac{1}{\mu_1}\ln\frac{6\left(\overline{C}_{t_2} - C_c\right)\cdot\left(\sin\mu_1 - \mu_1\cdot\cos\mu_1\right)^2}{\left(\overline{C}_{\text{к}} - C_c\right)\cdot\mu_1^3\cdot\left(\mu_1 - \sin\mu_1\cdot\cos\mu_1\right)}.$$

Таким образом время разогрева и длительность первого периода сушки частиц шлама пропорциональны радиусу частицы, в то время, когда длительность второго периода сушки пропорциональна квадрату радиуса частицы. Определяющими физическими величинами на каждом временном участке являются, соответственно: $C_{\text{ш}}$ – удельная теплоемкость влажного шлама; $r_n$ – удельная теплота парообразования; *Д* – эффективный коэффициент диффузии влаги.

Среднее время сушки шлама, состоящего из частиц различных размеров, находим как математическое ожидание выражения (20):

$$\tau_c = \int_0^{\infty} f(R)\cdot\Delta\tau_c(R)\cdot dR, \quad (21)$$

где $f(R)$ – плотность вероятности распределения.

ЛИТЕРАТУРА


1. Пасенко А.В., Коробочка А.Н. Обезвреживание шламовых отходов систем водоподготовки электростанций // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки) / Дніпродзержинськ: ДДТУ. -2008. - Випуск 1(9). - С. 240-243.
2. Лыков А.В. Тепломассообмен /Справочник - М.: «Энергия», 1978. -479 с.
3. Лыков А.В. Теория сушки. -М.: «Энергия», 1968. - 470 с.
4. Сажин Б.С. Основы техники сушки. - М.: «Химия», 1984. - 320 с.
5. Шрайбер А.А., Глянченко В.Д. Термическая обработка полидисперсных материалов в двухфазном потоке. - К.: «Наукова думка», 1976. - 155 с.
6. Лыков А.В. Теория телопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.
7. Галицин А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. - К.: «Наукова думка», 1976. - 282 с.


пост. 13.03.2009

# Ймовірносно-статистичне моделювання якості питної води з підземних джерел

*АРХАНГЕЛЬСЬКА Ю.М., ПРИСТАВКА О.П., ШАБЕЛЬНА Н.О., БЄЛЬСЬКА Т.М.*

Дніпропетровський національний університет

На підставі математичного моделювання з використанням програмного забезпечення «AquaGIS» проведено аналіз стану питної води з підземних джерел.

На основании математического моделирования с использованием программного обеспечения «AquaGIS» проведен анализ состояния питьевой воды из подземных источников.

On the basis of mathematical design with the use of software «AquaGIS» the analysis of the state of drinking-water is conducted from underground sources.

**Постановка проблеми.** При вирішенні задачі оцінки якості питної води застосовувався моніторинг режиму підземних вод. При цьому спостерігаються зміни водного режиму як наслідок дії багаторічних циклічних природно-кліматичних чинників, так і в результаті впливу несприятливих техногенних умов. Перш за все, ці зміни торкнулися гідродинамічного, фізико-хімічного, біохімічного і теплового режимів підземних вод.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми та постановка задачі.

Однією з перших математичних моделей водних екосистем, в основі яких лежав енергетичний принцип, була модель, яка представлена у роботі [1]. Подальший розвиток знайшли стахостичні та імітаційні моделі екосистем у роботах [2-10]. Так була розроблена комп'ютерна модель на базі програмного комплексу МІКЕ 11 Донського гідравлічного інституту, яка була застосована для імітаційного моделювання моделі екосистеми Азовського моря [11,9]. Подальший розвиток стахостичних моделей пропонується з використанням кусково-марковських процесів. Основу таких процесів було подано у роботі [3].

В зв’язку з цим постає задача в необхідності розробки математичної моделі гідрохімічної системи та її аналіз.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Моделювання стану підземних вод було проведено за 9 точками водозабору питної води лівобережної частини Дніпропетровського району Дніпропетровської області: