$$\delta_{ac}^{\mu\nu} := h_a^\mu h_c^\nu - h_c^\mu h_a^\nu$$

- альтернатор,

$$\tau_a^\mu := \kappa t_a^\mu = \beta_r^{c\mu} F_{ca}^r - h_a^\mu l_h \tag{5}$$

- нормований тензор енергії-імпульсу t_a^μ гравітаційного поля в реперній теорії гравітації, який співпадає з тензором енергії-імпульсу Мьоллера [4], де

$$F_{ac}^\nu := h_a^\sigma \partial_\sigma h_c^\nu - h_c^\sigma \partial_\sigma h_a^\nu$$

- коефіцієнти неголономності реперного поля і

$$l_h = \kappa L_h = \tfrac{1}{4} \beta_c^{\nu\sigma} F_{\nu\sigma}^c = -(\tfrac{1}{2} R + \nabla_\nu R^\nu) \tag{6}$$

- нормований лагранжіан L_h реперної теорії гравітації, який відрізняється від лагранжіану Гілберта-Ейнштейна на дивергенцію [6]. В наведених виразах заміна грецьких індексів на латинські і навпаки (що відповідає переходам між координатним і ортонормованим реперами) відбувається за допомогою матриць h_a^μ і обернених до них.

Переходячи в (3) до реперних індексів, з врахуванням (5) і (6) одержуємо:

$$-G_a^b = \nabla_\nu \beta_a^{b\nu} - \tfrac{1}{2} \beta_a^{cr} F_{cr}^b + {}$$
$$+ \beta_r^{cb} F_{ca}^r + \nabla_\nu (\delta_a^b R^\nu) + \tfrac{1}{2} \delta_a^b R . \tag{7}$$

Отже

$$R_a^b = -\nabla_\nu (\beta_a^{b\nu} + \delta_a^b R^\nu) + \tfrac{1}{2} \beta_a^{cr} F_{cr}^b - \beta_r^{cb} F_{ca}^r . \tag{8}$$

Цікаво відзначити, що (див. (4))

$$\beta_a^{b\nu} + \delta_a^b R^\nu = \gamma_a^{b\nu} + h_a^\nu R^b . \tag{9}$$

2. Оцінка ньютонівської границі умови Родічева

З рівняння Ейнштейна

$$G_a^b = \kappa \theta_a^b \tag{10}$$

та співвідношення (3) слідує, що у ньютонівській границі (для слабих і незалежних від часу полів)

$$G_{(0)}^{(0)} \approx -\nabla_\nu \beta_{(0)}^{(0)\nu} \approx \kappa \varepsilon , \tag{11}$$

де θ_a^b - тензор енергії-імпульсу матерії, а ε - густина її енергії. Крім того, в 4-вимірному просторі

$$R_{(0)}^{(0)} \approx \frac{\kappa \varepsilon}{2} , \tag{12}$$

що слідує з перезапису рівняння Ейнштейна (10) у вигляді:

$$R_a^b := \kappa(\theta_a^b - \tfrac{1}{2} \delta_a^b \theta)).$$

З іншого боку, тотожність (8) у ньютонівській границі дає:

$$R_{(0)}^{(0)} \approx -\nabla_\nu \beta_{(0)}^{(0)\nu} - \nabla_\nu R^\nu . \tag{13}$$

Підставляючи сюди оцінки (11) і (12), одержуємо:

$$\nabla_\nu R^\nu \approx \frac{\kappa \varepsilon}{2} . \tag{14}$$

Таким чином умова (2) $\nabla_\nu R^\nu = 0$, яка слідує з умови Родічева (1) і є її послабленим варіантом, з'їдає половину повної енергії! Звідси можна зробити висновок, що умова Родічева відповідає вибору таких неінерційних систем відліку, які не заспокоюються на нескінченності і частина енергії при виконанні умови Родічева відбирається силами інерції.

3. Умова Родічева в полі Шварцшильда

Базовий розв'язок рівнянь реперного варіанту теорії гравітації у центрально-симетричному випадку має вигляд [7]:

$$h_0^{(0)} = \tau , \quad h_t^{(s)} = \Delta_t^s + \rho n^s n_t , \quad h_s^{(0)} = 0 , \quad h_0^{(s)} = 0 , \tag{15}$$

$$h_{(0)}^0 = \rho , \quad h_{(s)}^t = \Delta_s^t + \tau n^t n_s , \quad h_{(s)}^0 = 0 , \quad h_{(0)}^s = 0 , \tag{16}$$

$$\tau = \frac{1}{\rho} = \left(1 - \frac{2r_0}{r}\right)^{1/2} , \quad r_0 = \frac{Gm}{c^2} , \quad h = \tau\rho = 1 , \tag{17}$$

де

$$n_t = \partial_t r , \quad r^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 , \quad \Delta_t^s = \delta_t^s - n^s n_t . \tag{18}$$

Тут x^i - квазідекартові координати. Просторові компоненти позначаються латинськими індексами середини алфавіту. Реперні індекси відрізняються від координатних тим, що беруться в дужки. Далі нам знадобляться властивості:

$$\Delta_t^s n^t = 0 , \quad \partial_s n_t = \tfrac{1}{r} \Delta_{st} ,$$
$$\partial_p \Delta_{st} = -\tfrac{1}{r} (n_s \Delta_{tp} + n_t \Delta_{sp}) . \tag{19}$$

Сигнатура метрики прийнята (+ – – –), отже

$$g_{00} = \tau^2 , \quad g_{0p} = 0 , \quad g_{tp} = -\Delta_{tp} - \rho^2 n_t n_p . \tag{20}$$

Для розв'язку, що розглядається, не виконується умова Родічева (1), оскільки

$$R_{(s)} = F_{c(s)}^c = \partial_t h_{(s)}^t = \left(\tau' - 2\frac{1-\tau}{r}\right) n_s =$$
$$= \frac{2}{\tau r}\left(1 - \tau - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r}\right) n_s \neq 0 . \tag{21}$$

Тут, очевидно,

$$p_{(s)} := F_{(0)(s)}^{(0)} = \tau' n_s = \frac{r_0}{\tau r^2} n_s ,$$
$$r_{(s)} := F_{(t)(s)}^{(t)} = -2\frac{1-\tau}{r} n_s . \tag{22}$$

Існує інший розв'язок, який призводить до поля Шварцшильда з метрикою (20), але задовольняє умову Родічева. Він одержується з розв'язку (15) калібрувальними обертаннями виключно просторової частини реперних полів без використання бустів [7]:

$$\tilde{h}_0^{(0)} = h_0^{(0)} = \tau , \quad \tilde{h}_s^{(0)} = 0 , \quad \tilde{h}_0^{(s)} = 0 ,$$
$$\tilde{h}_t^{(s)} = \omega_{.(r)}^{(s)} h_t^{(r)} , \tag{23}$$

$$\omega_{(s)(r)} = A\delta_{sr} + B n_s n_r + C E_{sr} , \tag{24}$$

де $E_{sr} = \varepsilon_{srt} n_t$, а A, B і C - функції від r, знайдені з вимоги забезпечення умови Родічева (1) (конкретний їх вид наведено в [7]). Оператори E_{sr} і Δ_{sr} проектують вектори на площину, перпендикулярну вектору $\vec{n}$ (який направлений вздовж радіус-вектора), оскільки

$$\Delta \circ \vec{n} = 0 , \qquad E \circ \vec{n} = 0 , \tag{25}$$

хоча оператор Δ зберігає вектор $\vec{\xi}$, перпендикулярний $\vec{n}$:

$$\Delta \circ \vec{\xi} = \vec{\xi} , \tag{26}$$

а E повертає його за годинниковою стрілкою на $\frac{\pi}{2}$ відносно вектора $\vec{n}$:

$$E\circ\vec{\xi}=[\vec{\xi},\vec{n}]\ . \qquad (27)$$

Отже визначальним для виконання умови Родічева в виразі (24) є, безумовно, останній доданок, який порушує дзеркальну (через це і сферичну для $h_t^{(s)}$) симетрію розв'язку. Думаю, це відповідає спостереженню зірки, яка не обертається, з системи відліку, яка стаціонарно обертається в площині, перпендикулярній $\vec{n}$. Це обертання забезпечує неінерційність такої системи відліку і сили інерції в ній мають певну енергію, яка і додається до повної енергії гравітаційного поля.

При великому r маємо оцінки доданків формули (21):

$$\tau'\approx\frac{r_0}{r^2}, \qquad \frac{1-\tau}{r}\approx\frac{r_0}{r^2}, \qquad (28)$$

отже

$$R^t\approx\frac{r_0}{r^2}n^t \quad\Rightarrow\quad \oint R^t ds_t\approx 4\pi r_0=\frac{4\pi G}{c^4}mc^2=\frac{\kappa}{2}mc^2,$$

що узгоджується з оцінкою (14).

4. Повна енергія поля Шварцшильда

Рівняння Ейнштейна (10) в реперній теорії гравітації, з врахуванням співвідношення (3), можна записати у потенціальній формі [4]:

$$\nabla_\nu\beta_a^{\mu\nu}=-\kappa T_a^\mu\ , \qquad (29)$$

де $T_a^\mu=t_a^\mu+\theta_a^\mu$ - повний тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля і гравітуючої матерії, звідки слідує, що тензор індукції гравітаційного поля виступає в ролі суперпотенціалу для повного тензора енергії-імпульсу, отже повну енергію гравітаційного поля і матерії можна виразити через суперпотенціал:

$$E=\int hT_{(0)}^\mu dV_\mu=-\frac{1}{\kappa}\oint_{r\to\infty} h\,\beta_{(0)}^{0l}dS_l\ . \qquad (30)$$

Тут dV_μ - 4-вектор елементу 3-вимірного просторового об'єму і dS_l - 3-вектор елементу 2-вимірної поверхні γ (в центрально-симетричному випадку - сфери), яка охоплює виділений 3-вимірний об'єм (в центрально-симетричному випадку - кулю). Знайдемо цю енергію в двох випадках – за умови Родичева, і без вимоги її виконання. В обох випадках, через структуру реперного поля, коли $h_{(s)}^0=0$,

$$\beta_{(0)}^{0l}=\gamma_{(0)}^{0\ l}-h_{(0)}^0R^l\ . \qquad (31)$$

Тут

$$\gamma_{(0)}^{0\ l}=-p_{(s)}h_{(0)}^0h_{(s)}^l\ , \qquad (32)$$

причому по s , що повторюється – звичайне підсумування (знак вже враховано). З іншого боку,

$$R^l=-(p_{(s)}+r_{(s)})h_{(s)}^l\ . \qquad (33)$$

Розглянемо перший, базовий випадок, коли умова Родічева не вимагається і має місце дзеркальна (і сферична) симетрія. Підставляючи (32) і (33) в (31) бачимо, що доданки з $p_{(s)}$, у які, згідно з (22), входять похідні від τ , скорочуються, в результаті чого:

$$\beta_{(0)}^{0l}=r_{(s)}h_{(s)}^lh_{(0)}^0=-2\frac{1-\tau}{r}n^l \qquad (34)$$

(див. (22)). Отже підстановка цього виразу в означення (30) дає:

$$E(r)=\frac{2}{\kappa}\frac{1-\tau}{r}\oint_r n^l dS_l=\frac{2}{\kappa}\frac{1-\tau}{r}4\pi r^2=\frac{8\pi}{\kappa}(1-\tau)r\ . \qquad (35)$$

або в границі $r\to\infty$, з використанням оцінки (28),

$$E(\infty)=\frac{8\pi r_0}{\kappa}=mc^2\ . \qquad (36)$$

В другому, неінерційному і сферично несиметричному випадку, а саме за умови Родічева $R^l=0$, з (31) маємо:

$$\tilde{\beta}_{(0)}^{0l}=\tilde{\gamma}_{(0)}^{0\ l}=-\tilde{p}_{(s)}\tilde{h}_{(0)}^0\tilde{h}_{(s)}^l=-\tau' n^l\ . \qquad (37)$$

Тут тильда означає підрахунок величин в реперному полі $\tilde{h}_a{}^\mu$, яке визначається формулами (23), а при записі останньої рівності враховано (22) і той факт, що внаслідок обертового характерна величин $\omega_{.(r)}^{(s)}$

$$-g^{kl}=\tilde{h}_{(s)}^k\tilde{h}_{(s)}^l=h_{(s)}^kh_{(s)}^l\ . \qquad (38)$$

Підставляючи (37) в означення (30) в даному випадку одержуємо:

$$\tilde{E}(r)=\frac{\tau'}{\kappa}\oint_r n^l dS_l=\frac{4\pi r_0}{\kappa\tau}\ , \qquad (39)$$

що в границі $r\to\infty$ дає:

$$\tilde{E}(\infty)=\frac{4\pi r_0}{\kappa}=\tfrac{1}{2}mc^2\ . \qquad (40)$$

Саме даний результат, скоріше за все, і змусив Родічева вдвічі зменшити κ в польовому рівнянні для забезпечення правильної ньютонівської границі.

Обидва вирази для повної енергії, як (35), так і (39), мають смисл лише для радіусів, не менших за гравітаційний радіус $r_g=2r_0$, але при $r\to r_g$ у першому випадку енергія скінченна $E\to 2mc^2$, а у другому $\tilde{E}\to\infty$. Отже повна енергія чисто гравітаційного поля від'ємна і у першому випадку дорівнює точно $E_g=-mc^2$, а у другому $\tilde{E}_g=-\infty$!

5. Густина енергії гравітаційного поля

Знайдемо густину енергії гравітаційного поля в центрально-симетричному випадку і покажемо, зокрема, що вона від'ємна. Другий, неінерційний і центрально-несиметричний випадок (який, все-ж, відповідає розв'язку Шварцшильда) розглядати не будемо через наявність в ньому сингулярності енергії при $r=r_g$, який через це і є нереалістичним.

Густина енергії гравітаційного поля визначається виразом:

$$t_{(0)}^0=\frac{1}{\kappa}\tau_{(0)}^0\ , \qquad (41)$$

де, згідно з (5),

$$\tau_{(0)}^0=\beta_r^{p0}F_{p(0)}^r-h_{(0)}^0l_h\ . \qquad (42)$$

Підрахуємо спочатку

$$l_h=\tfrac{1}{4}\beta_c^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}^c=\tfrac{1}{2}\beta_{(0)}^{0k}F_{0k}^{(0)}+\tfrac{1}{4}\beta_{(k)}^{st}F_{st}^{(k)}\ . \qquad (43)$$

Перший доданок правої частини (43) знаходиться просто на підставі (34) і (23):

$$\tfrac{1}{2}\beta_{(0)}^{0k}F_{0k}^{(0)}=-\tau'\frac{1-\tau}{r}\ .$$

Підрахунок другого доданку

$$\tfrac{1}{4}\beta_{(k)}^{st}F_{st}^{(k)}=\tfrac{1}{4}\gamma_{(k)}^{st}F_{st}^{(k)}-\tfrac{1}{2}R^t r_t$$

вимагає більших зусиль. Тут

$$\tfrac{1}{4}\gamma^{st}_{(k)}F^{(k)}_{st} = -\tfrac{1}{4}\left(F^{(p)}_{(k)(r)}F^{(k)}_{(p)(r)} + \tfrac{1}{2}F^{(k)}_{(p)(r)}F^{(k)}_{(p)(r)}\right)$$

(нагадаємо, що по просторовим індексам, які повторюються, навіть на однаковому рівні, звичайне підсумування, знак явно враховано). Досить рутинний розрахунок дає:

$$F^{(p)}_{(k)(r)}F^{(k)}_{(p)(r)} = 2\left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2,$$

$$\tfrac{1}{2}F^{(k)}_{(p)(r)}F^{(k)}_{(p)(r)} = 2\left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2,$$

отже

$$\tfrac{1}{4}\gamma^{st}_{(k)}F^{(k)}_{st} = -\left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2.$$

Крім того,

$$-\tfrac{1}{2}R^{t}\,r_{t} = 2\left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2 - \tau'\frac{1-\tau}{r}.$$

Підставляючи одержані результати в (43) знаходимо:

$$l_h = \left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2 - 2\tau'\frac{1-\tau}{r}.$$

Враховуючи, крім того, що

$$\beta^{p0}_{r}F^{r}_{p(0)} = -h^{0}_{(0)}(\tau')^2,$$

в решті решт одержуємо:

$$\tau^{0}_{(0)} = -\frac{1}{\tau}\left[(\tau')^2 - 2\tau'\frac{1-\tau}{r} + \left(\frac{1-\tau}{r}\right)^2\right] = -\frac{1}{\tau}\left(\tau' - \frac{1-\tau}{r}\right)^2, \qquad (44)$$

звідки явно видно, що енергія гравітаційного поля – від'ємна.

Оскільки при $r < r_g$ τ не визначено, про гравітаційне поле за цих умов говорити немає сенсу. Можливо тут повинні проявлятися додаткові просторові виміри, відповідальні за утворення маси, яка народжує гравітаційне поле. В усякому разі біля гравітаційного радіусу не можна не враховувати квантовомеханічні ефекти.

Висновки

1. Вибір локально-лоренцевої калібровки реперів впливає на повну енергію гравітаційного поля в реперній теорії гравітації.
2. Реперне гравітаційне поле, яке задовольняє умову Родічева, для точеної маси є центрально-несиметричним і відповідає спостереженню зірки з системи відліку, що стаціонарно обертається, тому спроба одержання в цьому випадку ньютонівської границі є некоректною і приводить до помилкового зменшення (удвічі) константи гравітаційної взаємодії [7].
3. Енергія гравітаційного поля під гравітаційним радіусом не має смислу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. - Издат. МГУ,1960. – 302 с.
2. *Самохвалов С.Е.* Теоретико-групповое описание калибровочных полей. // ТМФ. – 1988. – **76**, №1. – С. 66-77.
3. *Самохвалов С.Є.* Наслідки симетрії калібровочної теорії гравітації // ММ . – 2001. - №1(6). – С. 23-27.
4. *Møller C.* Conservation lows and absolute parallelism in general relativity // Mat. – Fys. Skr. K. Danske Vid Selsk. – 1961. – **1**(10). – P. 1 – 50.
5. *Родичев В.И.* Нерешенные проблемы общей теории относительности // Эйнштейновский сборник.1968. – М.: Наука, 1968. – С. 115 – 186.
6. *Cho Y.M.* Einstein lagrangian as the translational Yang-Mills lagrangian // Phys. Rev. – 1976. – **14D.** – P. 2521 – 2525.
7. *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974. – 184 с.

пост. 25.06.2009