Выполнение позиционных операций в непозиционной системе остаточных классов

Ю.Д. ПОЛИССКИЙ

НИИ автоматизации черной металлургии

Розглянуто метод розв'язання задачі визначення виходу числа за діапазон у системі залишкових класів. Метод алгоритмічно простий та нескладний для схемної реалізації при створенні ефективних обчислювальних структур високої продуктивності та надійності для перспективних інформаційних технологій.

Рассмотрен метод решения задачи определения выхода числа за диапазон в системе остаточных классов. Метод алгоритмически прост и несложен для схемной реализации при создании эффективных вычислительных структур высокой производительности и надежности для перспективных информационных технологий.

The method of solving problem of definition range exceeding for numbers representative in residue class system are observed. The method is algorithmically simple and not complicated to scheme realization for making of effective computing structures for perspective information technologies

Введение. Исследование различных подходов к построению вычислительных структур для разработки перспективных информационных технологий показало, что среди множества числовых систем наиболее высокой степенью параллелизма обладает система остаточных классов (СОК) [1].

В СОК арифметические операции сложения, вычитания и умножения выполняются с остатками независимо друг от друга по простым правилам. Сложными операциями являются так называемые позиционные операции, для выполнения которых необходимо знание цифр операндов по всем разрядам. В частности, определение выхода за диапазон системы в результате сложения, вычитания или умножения двух чисел.

Постановка задачи. Системой остаточных классов называется система счисления, в которой произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$, т.е.

$$N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \tag{1}$$

Здесь $\alpha_i = N\left(\operatorname{mod} m_i\right)$. При этом, если все целые числа N принадлежат диапазону $\left[0, M_p\right)$, объем которого равен

$$M_ð = m_1 m_2 \ldots m_n, \tag{2}$$

а модули m_i взаимно простые, то каждому набору $\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ соответствует только одно число N из этого диапазона.

Задача заключается в том, чтобы установить факт переполнения числового диапазона и определить, во сколько раз был превзойден числовой диапазон.

Основная часть. Будем диапазон $\left[0, M_p\right)$ называть рабочим диапазоном чисел (1). Введем дополнительные модули $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_k$, определяющие контрольный диапазон $\left[M+1, M_k\right)$, объем которого равен

$$M_k = m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_k.$$

Будем рассматривать числа (1) рабочего диапазона на всем диапазоне $M = M_p * M_к$,

$$M = m_1 m_2 \ldots m_n m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_k.$$

В этом случае

$$N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_k\right). \tag{3}$$

Пусть π_i – позиционная характеристика $0 \le \pi_i < m_i$ числа N (3), представленного в полиадическом коде [2]

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \pi_3 m_1 m_2 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \ldots +$$
$$+ \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1} + \pi_{n+1} m_1 m_2 \ldots m_n +$$
$$+ \pi_{n+2} m_1 m_2 \ldots m_{n+1} + \ldots + \pi_k m_1 m_2 \ldots m_{k-1}$$

с такой же системой модулей $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

При выполнении операции умножения двух операндов максимальное произведение равно $\left(M_p - 1\right)^2$. Поэтому для однозначного суждения о переполнении диапазона $\left[0, M_p\right)$ на основании значений $\pi_i, i = n+1, n+2, \ldots, k$ необходимо, чтобы $M_p * M_к \ge \left(M_p - 1\right)^2$. Отсюда, требование к M_k представляется в виде $M_к \ge M_p - 1$.

Справедливо следующее утверждение: существуют $m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_k$ чисел с совокупностью остатков

$\alpha^0{}_1, \alpha^0{}_2, \ldots, \alpha^0{}_n$, каждая из которых принадлежит своему числовому интервалу. Доказательство: с каждой совокупностью остатков $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_k$ связана совокупность $\alpha^0{}_1, \alpha^0{}_2, \ldots, \alpha^0{}_n$. Совокупность остатков $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_k$ принимает $m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_k$ значений $0, 1, 2, \ldots, (m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_k - 1)$, что доказывает первую часть утверждения. Принадлежность каждой совокупности $\alpha^0{}_1, \alpha^0{}_2, \ldots, \alpha^0{}_n$ своему числовому интервалу доказывается тем, что модуль разности каждой пары совокупностей $\alpha^0{}_1, \alpha^0{}_2, \ldots, \alpha^0{}_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_k$ делится на $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Следствием данного утверждения является возможность судить об отсутствии переполнения при $\pi_i = 0,\ i = n+1,\ n+2, \ldots, k$.

Определение позиционных характеристик на основе простой однотактной выборки из таблиц рассмотрим на следующем примере.

Пусть в системе модулей $m_1 = 7$, $m_2 = 3$, $m_3 = 13$, $m_4 = 2$, $m_5 = 11$, $m_6 = 17$, $m_7 = 5$, где модули m_1, m_2, m_3, m_4 – рабочие, а модули m_5, m_6, m_7 – контрольные, $M_p = 7*3*13*2 = 546$, $M_к = 11*17*5 = 935$, $M_к > M_p$ вычисляется произведение N^0 пары чисел $N_1 = 471 = (2, 0, 3, 1, 9, 12, 1)$ и $N_2 = 23 = (2, 2, 10, 1, 1, 6, 3)$. $N^0 = 10833 = (4, 0, 4, 1, 9, 4, 3)$.

В соответствии с алгоритмом [3] выбираем из табл.1 для $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = 4$ значение позиционной характеристики $\pi_1 = 4$ и значения констант

$$\Delta_7^1 = 4,\ \Delta_3^1 = 1,\ \Delta_{13}^1 = 4,\ \Delta_2^1 = 0,\ \Delta_{11}^1 = 4,\ \Delta_{17}^1 = 4,\ \Delta_5^1 = 4$$

Таблица 1

Рабочие модули						Контрольные модули		
7			3	13	2	11	17	5
π_1	$\tilde{\alpha}_1$	Δ^1	Δ_3^1	Δ_{13}^1	Δ_2^1	Δ_{11}^1	Δ_{17}^1	Δ_5^1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	0	2	2	2
3	3	3	0	3	1	3	3	3
4	4	4	1	4	0	4	4	4
5	5	5	2	5	1	5	5	0
6	6	6	0	6	0	6	6	1

Модуль $m_1 = 7$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^1 = (2, 0, 1, 5, 0, 4)$.

Затем из табл. 2 выбираем для $\tilde{\alpha}_2 = 2$ значение позиционной характеристики $\pi_2 = 2$ и значения констант

$$\Delta_3^2 = 2,\ \Delta_{13}^2 = 1,\ \Delta_2^2 = 0,\ \Delta_{11}^2 = 3,\ \Delta_{17}^2 = 14,\ \Delta_5^2 = 4$$

Модуль $m_2 = 3$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^2 = (12, 1, 2, 3, 0)$.

Таблица 2

Рабочие модули						Контрольные модули		
3				13	2	11	17	5
π_2	$\tilde{\alpha}_2$	$\Delta^2 = = \pi_2 m_1$	Δ_3^2	Δ_{13}^2	Δ_2^2	Δ_{11}^2	Δ_{17}^2	Δ_5^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	7	1	7	1	7	7	2
2	2	14	2	1	0	3	14	4

Далее из табл. 3 выбираем для $\tilde{\alpha}_3 = 12$ значение позиционной характеристики $\pi_3 = 8$ и значения констант

Таблица 3

Рабочие модули					Контрольные модули		
13				2	11	17	5
π_3	$\tilde{\alpha}_3$	$\Delta^3 = = \pi_3 m_1 m_2$	Δ_{13}^3	Δ_2^3	Δ_{11}^3	Δ_{17}^3	Δ_5^3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	21	8	1	10	4	1
2	3	42	3	0	9	8	2
3	11	63	11	1	8	12	3
4	6	84	6	0	7	16	4
5	1	105	1	1	6	3	0
6	9	126	9	0	5	7	1
7	4	147	4	1	4	11	2
8	12	168	12	0	3	15	3
9	7	189	7	1	2	2	4
10	2	210	2	0	1	6	0
11	10	231	10	1	0	10	1
12	5	252	5	0	10	14	2

$$\Delta_{13}^3 = 12,\ \Delta_2^3 = 0,\ \Delta_{11}^3 = 3,\ \Delta_{17}^3 = 15,\ \Delta_5^3 = 3$$

Модуль $m_3 = 13$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^3 = (1, 10, 5, 2)$.

Из табл. 4 выбираем для $\widetilde{\alpha}_4 = 1$ значение позиционной характеристики $\pi_4 = 1$ и значения констант $\Delta_2^4 = 1, \Delta_{11}^4 = 1, \Delta_{17}^4 = 1, \Delta_5^4 = 3$.

Таблица 4

Рабочие модули				Контрольные модули		
2				11	17	5
π_4	$\widetilde{\alpha}_4$	$\Delta^4 = \pi_4 m_1 m_2 m_3$	Δ_2^4	Δ_{11}^4	Δ_{17}^4	Δ_5^4
0	0	0	0	0	0	0
1	1	273	1	9	1	3

Модуль $m_4 = 2$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^4 = (1, 4, 4)$.

Далее из табл. 5 выбираем для $\widetilde{\alpha}_5 = 1$ значение позиционной характеристики $\pi_5 = 8$ и значения констант $\Delta_{11}^5 = 1, \Delta_{17}^5 = 16, \Delta_5^5 = 3$.

Модуль $m_5 = 11$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^5 = (5, 1)$.

Таблица 5

Контрольные модули					
11				17	5
π_5	$\widetilde{\alpha}_5$	$\Delta^5 = \pi_5 m_1 m_2 m_3 m_4$	Δ_{11}^5	Δ_{17}^5	Δ_5^5
0	0	0	0	0	0
1	7	546	7	2	1
2	3	1092	3	4	2
3	10	1638	10	6	3
4	6	2184	6	8	4
5	2	2730	2	10	0
6	9	3276	9	12	1
7	5	3822	5	14	2
8	1	4368	1	16	3
9	8	4914	8	1	4
10	4	5460	4	3	0

Из табл. 6 выбираем для $\widetilde{\alpha}_6 = 5$ значение позиционной характеристики $\pi_6 = 1$ и значения констант $\Delta_{17}^6 = 5, \Delta_5^6 = 1$. Модуль $m_6 = 17$ исключается из рассмотрения, а для остальных модулей получаем значения $N^6 = (0)$.

Таблица 6

Контрольные модули				
17				5
π_6	$\widetilde{\alpha}_6$	$\Delta^6 = \pi_6 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$	Δ_{17}^6	Δ_5^6
0	0	0	0	0
1	5	6006	5	1
2	10	12012	10	2
3	15	18018	15	3
4	3	24024	3	4
5	8	30030	8	0
6	13	36036	13	1
7	1	42042	1	2
8	6	48048	6	3
9	11	54054	11	4
10	16	60060	16	0
11	4	66066	4	1
12	9	72072	9	2
13	14	78078	14	3
14	2	84084	2	4
15	7	90090	7	0
16	12	96096	12	1

Наконец, из табл. 7 выбираем для $\widetilde{\alpha}_7 = 0$ значение позиционной характеристики $\pi_7 = 0$.

Таблица 7

Контрольный модуль			
5			
π_7	$\widetilde{\alpha}_7$	$\Delta^7 = \pi_7 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6$	Δ_5^7
0	0	0	0
1	2	102102	2
2	4	204204	4
3	1	306306	1
4	3	408408	3

Таким образом, получены значения всех позиционных характеристик числа

$$N^0 = (\pi_1 = 4, \pi_2 = 2, \pi_3 = 8, \pi_4 = 1, \pi_5 = 8, \pi_6 = 1, \pi_7 = 0)$$

Поскольку $\pi_i \neq 0$ для $i = 5$ и $i = 6$, то на основании приведенного выше следствия произведение $N^0 = (4, 0, 4, 1, 9, 4, 3)$ выходит за рабочий диапазон M_p.

Однако для получения верных результатов при решении ряда задач недостаточно установить только факт выхода результата за рабочий диапазон. Зачастую необходимо знать во сколько раз был превзойден диапазон $\left[0, M_p\right)$. Целое положительное число, показывающее, во сколько раз превзойден диапазон $\left[0, M_p\right)$, называется [1] рангом R_N числа N.

$$\Theta = \frac{N}{M_p} =$$

$$= \frac{\pi_1 + \ldots + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1} + \pi_{n+1} m_1 m_2 \ldots m_n + \ldots + \pi_k m_1 m_2 \ldots m_{k-1}}{m_1 m_2 \ldots m_n}$$

Перепишем предыдущее выражение в виде

$$\Theta = \left(\frac{\pi_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \ldots + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1}}{m_1 m_2 \ldots m_n} \right) + \left(\pi_{n+1} + \ldots + \pi_k m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_{k-1} \right) \quad (4)$$

Вторая скобка (4) – целое число, которое и есть ранг R_N числа N,

$$R_N = \pi_{n+1} + \pi_{n+2} m_{n+1} + \ldots + \pi_k m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_{k-1}, \quad (5)$$

представленный в полиадическом коде с системой модулей $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_{k-1}, m_k$. В частности, ранг R_{N^0} числа $N^0 = (4, 0, 4, 1, 9, 4, 3)$ равен

$$R_{N^0} = \frac{10833}{546} = 8 + 1*11 + 0*11*17 = 19.$$

Так как расчеты выполняются в рабочем диапазоне, необходимо, чтобы ранг числа был представлен в остатках по рабочим модулям. Поскольку $\Theta_{\max} = \frac{\left(M_p - 1\right)^2}{M_p} < M_p - 1$, ранг R_N числа N однозначно отобразится на рабочий диапазон.

Процедура отображения ранга числа на рабочий диапазон выполняется также путем однотактной выборки определенных констант из таблиц 8, 9 и 10, построенных на основании (5).

Перед первым шагом на отдельном регистре для рабочих модулей записано $\hat{N}_0 = (0, 0, 0, 0)$. По $\pi_5 = 8$ выбираем из табл. 8 константы $\Delta_7^5 = 1, \Delta_3^5 = 2, \Delta_{13}^5 = 8, \Delta_2^5 = 0$, которые прибавляем к остаткам числа $\hat{N}_0$. Получаем $\hat{N}_1 = (1, 2, 8, 0)$. Затем по $\pi_6 = 1$ выбираем из табл. 9 константы $\Delta_7^6 = 4, \Delta_3^6 = 2, \Delta_{13}^6 = 11, \Delta_2^6 = 1$, которые прибавляем к остаткам числа $\hat{N}_1$. Получаем $\hat{N}_2 = (5, 1, 6, 1)$. Так как $\pi_7 = 0$, значение ранга R_{N^0} числа N^0 в системе рабочих модулей $R_{N^0} = \hat{N}_3 = (5, 1, 6, 1)$.

Таблица 8

Контрольный модуль		Рабочие модули			
11		7	3	13	2
π_5	$\Delta^5 = \pi_5$	Δ_7^5	Δ_3^5	Δ_{13}^5	Δ_2^5
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	0
3	3	3	0	3	1
4	4	4	1	4	0
5	5	5	2	5	1
6	6	6	0	6	0
7	7	0	1	7	1
8	8	1	2	8	0
9	9	2	0	9	1
10	10	3	1	10	0

Таблица 9

Контрольный модуль		Рабочие модули			
17		7	3	13	2
π_6	$\Delta^6 = \pi_6 * m_5$	Δ_7^6	Δ_3^6	Δ_{13}^6	Δ_2^6
0	0	0	0	0	0
1	11	4	2	11	1
2	22	1	1	9	0
3	33	5	0	7	1
4	44	2	2	5	0
5	55	6	1	3	1
6	66	3	0	1	0
7	77	0	2	12	1
8	88	4	1	10	0
9	99	1	0	8	1
10	110	5	2	6	0
11	121	2	1	4	1
12	132	6	0	2	0
13	143	3	2	0	1
14	154	0	11	0	0
15	165	4	9	1	1
16	176	1	7	0	0

Для выполнения такой процедуры представления ранга числа в системе рабочих модулей потребуется всего один дополнительный такт. Это достигается совмещением определения значений остатков с операцией нахождения позиционной характеристики π_i. по модулям m_i, $i = n+2, \dots, k$.

Таким образом, рассмотрено решение задачи определения выхода числа за диапазон при сложении, вычитании или умножении двух чисел в системе остаточных классов. Высокое быстродействие и относительная несложность схемной реализации предложенного метода позволяет создавать на его основе эффективные вычислительные структуры для перспективных информационных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Советское радио, 1968. – 440 с.
2. Червяков Н.И., Мезенцева О.С., Лавриненко И.Н. и др. Связность обобщенной позиционной системы счисления и системы остаточных классов и ее применение в модулярных нейрокомпьютерных технологиях. Сайт http://www.ncstu.ru/, 2005.
3. Полисский Ю.Д. О выполнении сложных операций в системе остаточных классов//Электронное моделирование. – 2006.– Т. 28. – № 3. – С. 117–123.

пост. 08.04.08

