

Об упорядочивании коэффициентов Фурье в задачах сжатия данных

А.А. ЛИГУН, А.А. ШУМЕЙКО, К.А. ШУМЕЙКО

Днепродзержинский государственный технический университет

Предложен метод упорядочивания отквантованных коэффициентов Фурье, основанный на использовании прогнозов частотных доменов.

Запропоновано метод упорядкування відквантованих частотних коефіцієнтів Фур'є, який засновано на використанні прогнозів частотних доменів.

The method of arrangement of the quantum DCT-coefficients, based on the prediction of the frequency domains is offered.

Введение. Частотный анализ данных является важной частью в задачах анализа и сжатия дискретной информации. В задачах сжатия графически данных, стандартом которых является технология JPEG, используются следующие этапы:

1. перевод из пространства равноправных данных в пространство неравноправных, в случае обработки изображений это перевод цветовой палитры из RGB в YUV [1],
2. применение к полученным данным преобразования Фурье (то есть получение частотных коэффициентов исходных данных),
3. квантование частотных коэффициентов (то есть сокращение количества значений, которые могут принять частотные коэффициенты) [2],
4. упорядочивание и кодирование данных счетчиками повторяющихся значений (RLE - Run Length Encoding) [3],
5. и, наконец, применение к полученному множеству методов сжатия без потерь (Haffman, LZW, арифметическое кодирование и пр.) [4].

Каждый из этих разделов является предметом многочисленных исследований. В данной работе будет рассмотрен вопрос о том, как упорядочить отквантованные коэффициенты, чтобы добиться более эффективного использования метода кодирования счетчиками. Другими словами, чтобы увеличить последовательности повторяющихся коэффициентов и тем самым сократить избыточность данных, то есть уменьшить объем сохраняемой информации.

Постановка задачи. Пусть исходные данные представляют собой двумерный массив

$$F = \{f_{i,j}\}_{i=0, j=0}^{2^n W, 2^n H}.$$

Разобьем исходную информацию на квадраты со стороной 2^n и применим к каждой из этих пачек данных преобразование Фурье. Результатом этого преобразования будет 2^{2n} частотных доменов Y_k $k=0, \dots, H \times W$ (упорядоченных по убыванию их ℓ_2 -норм $\|Y_k\|_2$). В силу ортогональности преобразования Фурье, полученные частотные домены являются некоррелируемыми, но если взять значения коэффициентов по модулю, то выясняется, что между этими частотными доменами существует корреляционная зависимость. Целью работы является использование этой зависимости для решения задачи упорядочивания данных. Низкочастотный домен Y_0 ,

является наиболее информативным и его применение в задаче корреляционного анализа приводит к снижению роли всех остальных доменов, поэтому, в дальнейшем, домен Y_0 нами рассматриваться не будет. Иллюстрации, приведенные в статье основаны на применении соответствующих алгоритмов к тестовому изображению Lena.

Основной результат. Рассмотрим предлагаемый алгоритм по шагам. Прежде всего заметим, что в дальнейшем коэффициенты всех частотных доменов отквантованы и взяты по модулю.

Шаг первый. Выясним зависимость домена Y_2 от домена Y_1 . Ясно, что величина коэффициента домена Y_2 , стоящего на месте с индексами (i, j) связана не только с величиной соответствующего коэффициента домена Y_1 , но и с другими коэффициентами, лежащими в некоторой окрестности (i, j) . Для этой цели найдем сдвиги домена

$$Y_1 = Y_1^{0,0} = \{y_{i,j}^{1,0,0}\}_{i=0, j=0}^{W, H}, \text{ то есть домены } Y_1^{v,\mu} \text{ с коэффициентами } y_{i,j}^{1,v,\mu} = y_{i+v, j+\mu}^{1,0,0}, \text{ где } |v| + |\mu| = 1.$$

Недостающие коэффициенты $y_{i,j}^{1,v,\mu}$ заменим нулями. В дальнейшем мы будем находить корреляционную зависимость между Y_2 и множеством $\{Y_1^{v,\mu}\}_{|v|+|\mu|\leq 1}$, поэтому те коэффициенты $y_{i,j}^{1,v,\mu}$, которые равны нулю принимать участия в корреляции не будут.

Для выяснения корреляционной зависимости рассмотрим задачу

$$\left\| Y_2 - \sum_{|v|+|\mu|\leq 1} \frac{\alpha_{1,*}^{v,\mu}}{\|Y_1^{v,\mu}\|_2} Y_1^{v,\mu} \right\|_2 \rightarrow \min_{\alpha_{1,*}^{v,\mu}}.$$

В силу выпуклости функции цели, нахождение экстремальных значений $\alpha_{k,*}^{v,\mu}$ сводится к решению системы линейных уравнений, результатом будет «прогноз» второго домена

$$\tilde{Y}_2 = \sum_{|v|+|\mu|\leq 1} \frac{\alpha_{1,*}^{v,\mu}}{\|Y_1^{v,\mu}\|_2} Y_1^{v,\mu}.$$

На следующем шаге находим корреляцию между Y_3 и $\{Y_1, Y_2\}$. Для этого находим решение задачи

$$\left\| Y_2 - \sum_{k=1}^2 \sum_{|v|+|\mu|\leq 1} \frac{\alpha_k^{v,\mu}}{\|Y_k^{v,\mu}\|_2} Y_k^{v,\mu} \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\alpha_k^{v,\mu}},$$

находя экстремальные значения $\alpha_{k,*}^{v,\mu}$, получаем «прогноз» третьего домена

$$\tilde{Y}_3 = \sum_{k=1}^2 \sum_{|v|+|\mu|\leq 1} \frac{\alpha_{k,*}^{v,\mu}}{\|Y_k^{v,\mu}\|_2} Y_k^{v,\mu}.$$

Далее аналогичным образом находим

$$\tilde{Y}_m = \sum_{k=1}^3 \sum_{|v|+|\mu|\leq 1} \frac{\alpha_{m-k,*}^{v,\mu}}{\|Y_{m-k}^{v,\mu}\|_2} Y_{m-k}^{v,\mu}.$$

Таким образом, платой за выяснение корреляции между частотными доменами является сохранение $5 \times H \times W - 15$ чисел $\alpha_{n,*}^{v,\mu}$.

Через $P(Y)$ обозначим убывающую перестановку Харди домена Y . Так как размерности всех доменов Y_k (а, следовательно, и \tilde{Y}_k) одинаковы, то перестановка $P(\tilde{Y}_k)$ однозначно определяет множество \hat{Y}_k , полученное перестановкой коэффициентов домена Y_k в соответствии с последовательностью элементов \tilde{Y}_k в перестановке $P(\tilde{Y}_k)$. Заметим, что если $P(\tilde{Y}_k)$ убывающая функция, то \hat{Y}_k является функцией с тенденцией к убыванию, причем, чем выше степень корреляции между \tilde{Y}_k и Y_k , тем больше эта тенденция.

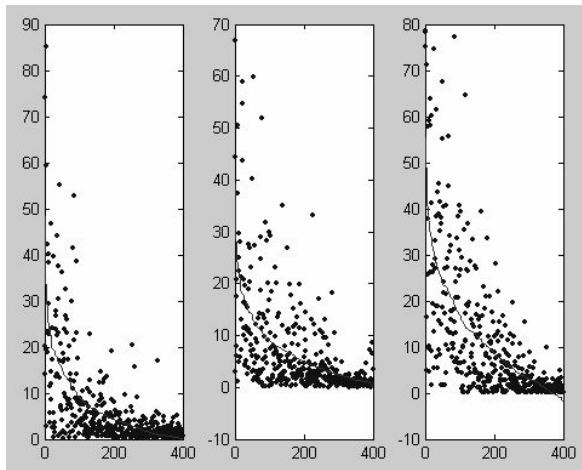


Рис. 1. Значения 4, 8 и 12-го доменов, упорядоченные по соответствующим «прогнозам».

Пусть $D(x,y)$ поверхность такая, что на дискретной решетке с единичным шагом, ее сечение плоскостью $y=k$ дает кривую $P(\tilde{Y}_k)$. Заметим, что в отличие от аналогичной поверхности, полученной в результате алгоритма используемого в технологии JPEG, поверхность $D(x,y)$ имеет более выраженную тенденцию к монотонности.

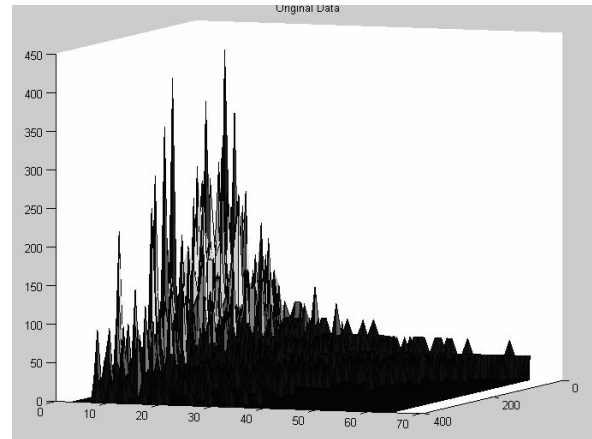


Рис. 2. Значения по единичной решетке поверхности $D(x,y)$.

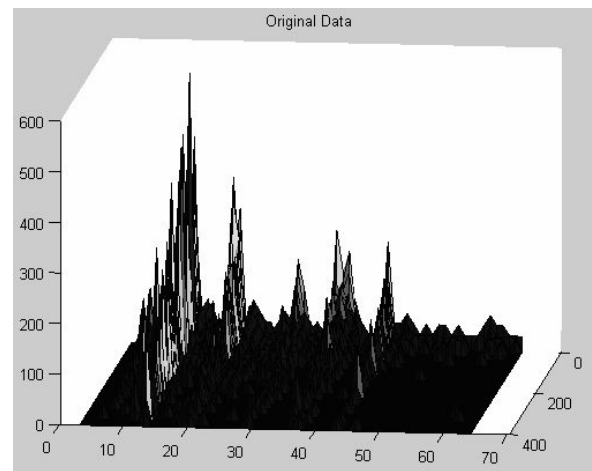


Рис. 3. Значения, полученные с использованием технологии упорядочивания коэффициентов, используемой в JPEG.

Следующим шагом является использование этой тенденции. Для этого построим аппроксимацию, с одной стороны, отражающую поведение $D(x,y)$, а с другой стороны, которая будет монотонной. Для этой цели используем поверхность вида

$$\tilde{D}(x,y) = (2^n W - x)^2 (2^n H - y)^2 (a + bx + cy)$$

с использованием условия

$$\left\| \left\{ P(\tilde{Y}_k) \right\}_{k=1}^{H \times W} - \tilde{D} \right\|_2 \rightarrow \min_{a_{i,j}}$$

Полученная поверхность является непрерывной и гладкой. Каждой точке \tilde{D} на множестве $[0, 2^n] \times [1, 2^n H \times 2^n W]$ по дискретной решетке с шагом равным единице соответствует точка на $\{\hat{Y}_k\}_{k=1}^{H \times W}$ и наоборот.

Расставляя точки поверхности \tilde{D} в порядке убывания, соответствующим образом расставляются точки $\{\hat{Y}_k\}_{k=1}^{H \times W}$. При этом, если $P(\tilde{D})$ образует убывающую последовательность, то соответствующая перестановка

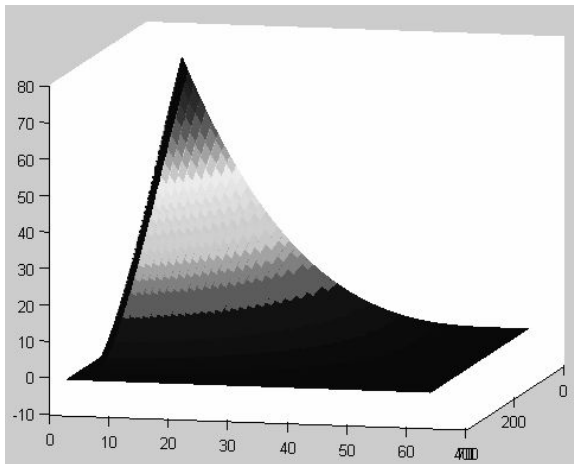
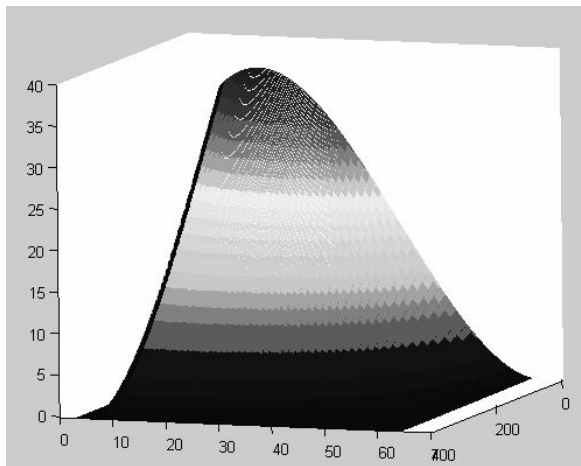
Рис. 4. Поверхность $\tilde{D}(x, y)$ 

Рис. 5. Поверхность, построенная по значениям, упорядоченным по технологии JPEG.

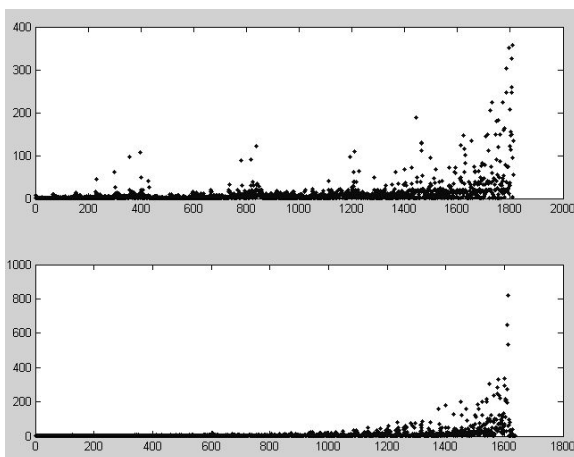


Рис. 6. На верхнем графике представлена последовательность счетчиков нулей, упорядоченных по технологии JPEG, на нижнем – по предложенному методу.

точек множества $\{\hat{Y}_k\}_{k=1}^{H \times W}$ дает последовательность с

тенденцией к убыванию. Если прогнозы \hat{Y}_k давали возможность упорядочить каждый домен в отдельности, то перестановка в соответствии с последовательностью $P(\tilde{D})$ дает возможность упорядочить коэффициенты всех частотных доменов в целом, что существенно повышает эффективность использования кодирования счетчиками. Заметим, что, кроме кодируемых коэффициентов нужно сохранить множество чисел $\alpha_{k,*}^{V,M}, a, b, c$, а также стартовый домен Y_1 .

Как видно из приведенных иллюстраций, использование предложенного метода упорядочивания отквантованных коэффициентов, позволило существенно сократить количество счетчиков, что позволяет увеличить эффективность использования алгоритма RLE - Run Length Encoding и уменьшить объем сохраняемой информации при одном и том же качестве.

Заметим, что вся эта процедура позволяет однозначно восстановить исходные данные. При реализации процедуры восстановления данных, вначале, по значениям a, b, c строим поверхность

$$\tilde{D}(x, y) = (2^n W - x)^2 (2^n H - y)^2 (a + bx + cy).$$

Замечая, что последовательность сохраненных частотных коэффициентов упорядочена в соответствии с точками $\tilde{D}(i, j)$, отсортированных по убыванию, полностью восстанавливаем \hat{Y}_k .

На следующем этапе, используя имеющийся домен Y_1 и числа $\alpha_{k,*}^{V,M}$, находим \tilde{Y}_2 , и строим перестановку $P(\tilde{Y}_2)$, которой ставим в соответствие \hat{Y}_2 . Расстановка значений $P(\tilde{Y}_2)$ на соответствующие места элементов множества \tilde{Y}_2 , приводит к тому, что соответствующие коэффициенты \hat{Y}_2 ставятся на свои места в домене Y_2 , что и позволяет получить расстановку коэффициентов домена Y_2 на свои места. Продолжая этот процесс, мы восстанавливаем месторасположение всех коэффициентов остальных частотных доменов, что позволяет корректно восстановить искомые данные.

Выводы

Предложенный метод упорядочивания отквантованных частотных коэффициентов позволяет существенно (на 10-15 %) повысить эффективность использования методов кодирования счетчиков нулей, что сокращает избыточность кодируемых данных и позволяет при одном и том же качестве увеличить степень компрессии по сравнению с использованием технологии JPEG.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. - М.: Техносфера, 2005. - 1070 с.
2. Gray R. and Neuhoff D. Quantization. IEE ransactions on Information Theory, 44(6), 1-63, 1998.
3. Golomb S. Run length encoding// IEE Transactions on Infirmation Theory, 12(7), 1966.- p. 399-401.
4. Ватолин Д.С. Алгоритмы сжатия изображений.- Изд. МГУ, 1999.- 76 с.

пост. 03.04.08.