Точні константи у нерівностях типу Джексона для апроксимації лінійними методами

А.О. ЛИГУН* **, В.Г. ДОРОНІН***

* Дніпродзержинський державний технічний університет
** Інститут прикладної математики і механіки НАН України
*** Дніпропетровський національний університет

Проведено дослідження поведінки точних констант у нерівностях типу Джексона у просторі L_p для апроксимації лінійними методами.

Проведено исследование точных констант в неравенствах типа Джексона в пространстве L_p для аппроксимации линейными методами.

Exact constants in Jackson's type inequalities in the space L_p for approximation of functions by linear methods are investigated in this paper.

Нехай $L_p(1 \le p \le \infty)$ – простір 2π-періодичних вимірних функцій f з скінченною нормою:

$$\|f\|_p = \left\{\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \sup \mathrm{vrai}\,|f(t)|.$$

Позначимо:

$$E(f;\Im)_p := \inf\left\{\|f-\varphi\|_p \mid \varphi \in \Im\right\}$$

– найкраще наближення функції $f \in L_p$ множиною $\Im \subset L_p$ в просторі L_p, а також

$$E(f)_p := E\left(f;\mathbf{R}^1\right)_p;$$

$$\omega_m(f;t)_p := \sup\left\{ \left\|\Delta_\eta^m f(\cdot)\right\|_p \;\middle|\; |\eta| \le t \right\}$$

– інтегральний модуль гладкості функції f порядку m, а $\Delta_\eta^m f(x)$ – різниця порядку m функції f у точці x з кроком η;

f_{δ^m} – функція В.Стєклова порядку m з кроком δ від функції f:

$$f_{\delta^0}(\mathrm{t}) := f(t), \quad f_{\delta^m}(t) := \frac{1}{\delta}\int_{t-\delta/2}^{t+\delta/2} f_{\delta^{(m-1)}}(u)\,du;$$

$f^{(-r)}$ – r-й 2π-періодичний інтеграл, який має нульове середнє значення на періоді, від функції $f \in L_1$, яка має нульове середнє значення на періоді $(f \perp 1)$;

$L_p^r\,(r = 1, 2, ...)$ – множина всіх r-х 2π-періодичних інтегралів, від функцій $f \in L_p$, таких що $f \perp 1$;

$$W_p^r := \left\{\varphi \mid \varphi \in L_p^r,\ \left\|\varphi^{(r)}\right\|_p \le 1\right\};$$

$$W_p^{r,*} := \left\{\varphi \mid \varphi \in L_p^r,\ E\left(\varphi^{(r)}\right)_p \le 1\right\}$$

(зрозуміло, що $W_p^r \subset W_p^{r,*}$);

$\mathbf{L}_n : L_q^r \to \Im_n$ – довільний лінійний оператор, який відображає L_q^r у n-вимірний підпростір $\Im_n$;

$$\varepsilon(\Re;\mathbf{L}_n)_p := \sup\left\{\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p \;\middle|\; f \in \Re\right\}$$

– похибка наближення класу $\Re$ методом $\mathbf{L}_n$ у метриці простору L_p.

Нехай $\aleph_{r,m}(\Im;\delta)_{p,q}$ – найменша константа $\aleph$ у нерівності типу Джексона

$$E\ (f;\Im)_p \le \aleph\,\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q \quad \left(f \in L_q^r\right); \quad (1)$$

$\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}$ – найменша константа $\aleph$ у нерівності типу Джексона для лінійного методу $\mathbf{L}_n$

$$\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p \le \aleph\,\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q \quad \left(f \in L_q^r\right):$$

$$\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im;\delta)_{p,q} = \sup\left\{ \frac{\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p}{\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q} \;\middle|\; f \in L_q^r, f \ne \mathrm{const}\right\} \quad (2)$$

Величина $\aleph(\delta) := \aleph_{r,m}(\Im;\delta)_{p,q}$ при зростанні δ спадає до деякої точки (оптимальної точки мінімальної константи) $\delta_0 = \delta_0(\Im, r, m, p, q)$, а далі, потрапляючи на свій глобальний мінімум, стабілізується:

$$\aleph(\delta) = \aleph(\delta_0) \quad (\delta \ge \delta_0).$$

При вивченні точних констант, згідно класифікації, запропонованої С.Б.Стєчкіним, виділяють наступні три задачі:

I. Обчислити $\aleph(\delta)$ для $\delta > \delta_0$, ймовірно близького до δ_0.

II. Оцінити порядок зростання $\aleph(\delta)$ при $\delta \to 0$.

III. Знайти δ_0 – оптимальну точку Стєчкіна.

Фундатором успішного розвитку теорії точних констант є М.П.Корнєйчук, який в [1] розв'язав задачу I у просторі C неперервних 2π-періодичних функцій при наближенні множиною $\mathbf{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку $\le n-1$, довівши, що для будь-якої $f \in C(f \ne \mathrm{const})$ виконується нерівність

$$E(f;\mathbf{T}_{2n-1})_\infty \le 1\cdot\omega_1(f;\delta)_\infty$$
$$\left(n=1,2,...;\ \delta\ge\frac{\pi}{n}\right), \tag{3}$$

у котрій константу 1 зменшити неможливо.

Встановлена точна нерівність М.П.Корнєйчука (3) дозволяє локалізувати оптимальну точку мінімальної константи:

$$\frac{\pi}{2n}\le\delta_0\le\frac{\pi}{n}$$

і при цьому

$$\aleph_{0,1}(\mathbf{T}_{2n-1};\delta)_{\infty,\infty}=1\ \ (\delta\ge\delta_0).$$

На даний час задачу I вдалося розв'язати у небагатьох випадках (див., наприклад, [1], [4], [5], [6] та бібл. до них) авторам, які, головним чином, є представниками двох академічних шкіл: М.П. Корнєйчука та С.Б. Стєчкіна.

Визначити точну константу Джексона при кожному $\delta<\delta_0$, видається навряд чи можливим. Деякі результати цього напрямку здобули М.П.Корнєйчук та А.Г.Бабенко (для відповідних послідовностей $\delta_n\to 0$). У роботі авторів [7] надаються достатньо близькі оцінки зверху і знизу для точних констант у нерівностях типу Джексона для довільних δ, із яких, зокрема, виявляється порядок зростання точних констант при $\delta\to 0$. У даній роботі розглядається аналогічна задача для випадку апроксимації функцій лінійними методами.

Лінійний метод $\mathbf{L}_n$ будемо називати точним на константах, якщо $\mathbf{L}_n(f,t)=1$, $f(t)\equiv 1$. Зрозуміло, якщо лінійний метод $\mathbf{L}_n$ не є точним на константах, тоді при будь-якому $\delta>0$ $\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}=\infty$. Тому задача відшукання найменшої константи у нерівності типу Джексона для лінійного методу $\mathbf{L}_n$ має сенс лише за умови, що він є точним на константах.

Доволі загальний результат становить

Теорема 1. *Нехай* $r=1,2,...$, $1\le p,q\le\infty$ *і* $\Im_n$ – n*-вимірний підпростір простору* L_p*, який містить константи. Тоді для будь-якого лінійного оператора* $\mathbf{L}_n:L_q^r\to\Im_n$*, точного на константах, для довільної функції* $f\in L_q^r$ *при кожному* $\delta>0$ *справджуються наступні співвідношення:*

$$\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p\le\omega_1\left(f^{(r)};\delta/2\right)_q B_{r,*}(\Im_n)+$$
$$+\left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(f^{(r)};\delta\right)_q B_{r+1}(\Im_n), \tag{4}$$

де

$$B_{r,*}(\Im_n):=\varepsilon\ \left(W_q^{r,*};\mathbf{L}_n\right)_p,$$
$$B_{r+1}(\Im_n):=\varepsilon\ \left(W_q^{r+1};\mathbf{L}_n\right)_p. \tag{5}$$

Крім того,

$$\max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)B_{r,*}(\Im_n),\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n)\right\}\le$$
$$\aleph_{r,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}\le \tag{6}$$
$$B_{r,*}(\Im_n)+\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n),$$

За умов $q=\infty$ цей результат, майже у такому ж вигляді, був отриманий одним із авторів [5]. Якщо наш результат довести для довільних $1\le p,q<\infty$, тоді для $p=\infty$ або $q=\infty$ його можливо здобути граничним переходом. Зважаючи на це, при доведенні теореми 1 будемо вважати, що $1\le p,q<\infty$.

Доведення. Будь-яку функцію $f\in L_1^r(r=1,2,...)$ можливо подати у вигляді

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)B_r(t-u)\,du=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\left(f^{(r)}*B_r\right)(t), \tag{7}$$

де

$$B_r(t):=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\nu t-r\pi/2)}{\nu^r}$$ – функція Бернуллі.

Довільний лінійний функціонал $F_\nu(f)$, означений на просторі L_q^r, має вигляд

$$F_\nu(f)=\frac{a_0}{2}d_\nu+\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)\varphi_\nu(u)\,du\quad\left(d_\nu\in\mathbf{R}^1,\varphi_\nu\in L_{q'}^r\right). \tag{8}$$

На підставі того, що для будь-якого $\lambda\in\mathbf{R}^1$

$$F_\nu(f)=\frac{a_0}{2}d_\nu+\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)(\varphi_\nu(u)-\lambda)\,du,$$

у формулі (8), не зменшуючи загальності, можливо вважати, що $\varphi_\nu\in L_{q'}^r$, $\varphi_\nu\perp 1$.

Оскільки будь-який лінійний оператор $\mathbf{L}_n:L_q^r\to\Im_n$ можливо подати у вигляді

$$\mathbf{L}_n(f;t)=\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu(f)\ell_\nu(t), \tag{9}$$

де $\{\ell_\nu(t)\}_{\nu=1}^n$ – базис $\Im_n$, а $F_\nu(f)\left(\nu=\overline{1,n}\right)$ – лінійні функціонали на L_q^r, то із (7), (8), (9) отримуємо, що

$$f(t)-\mathbf{L}_n(f;t)=\frac{a_0}{2}\left(1-\sum_{\nu=1}^{n}d_\nu\ \ell_\nu(t)\right)+$$
$$+\int_0^{2\pi}\left(\frac{B_r(t-u)}{\pi}-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(u)\ell_\nu(t)\right)f^{(r)}(u)\,du= \tag{10}$$
$$=\frac{a_0}{2}\left(1-\sum_{\nu=1}^{n}d_\nu\ \ell_\nu(t)\right)+\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)k_r(t,u)\,du,$$

де

$$k_r(t,u)=\frac{1}{\pi}B_r(t-u)-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(u)\ell_\nu(t). \tag{11}$$

Вимога точності лінійного методу $\mathbf{L}_n$ на константах, зрозуміло, еквівалентна тотожності

$$\sum_{\nu=1}^{n}d_\nu\ \ell_\nu(t)=1.$$

Таким чином, для лінійних методів $\mathbf{L}_n$, точних на константах, для будь-якої функції $f\in L_q^r$ має місце рівність

$$[f-\mathbf{L}_n(f)](t)=\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)k_r(t,u)\,du\quad(r=1,2,...). \tag{12}$$

Легко безпосередньо переконатися, що

$$k_r(t,u)=\frac{\partial^s}{\partial u^s}K_{r,s}(t,u), \tag{13}$$

де

$$K_{r,s}(t,u):=\frac{1}{\pi}B_{r+s}(t-u)-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu^{(-s)}(u)\ell_\nu(t)$$

$$(s=1,2,...) \tag{14}$$

Отже, внаслідок (12) і (13), отримаємо, що для будь-якої функції $f\in L_q^r$

$$[f-\mathbf{L}_n(f)](t)=\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)\frac{\partial^s}{\partial u^s}K_{r,s}(t,u)\,du \quad (r,s=1,2,...). \tag{15}$$

Завдяки екстремальному наслідку нерівності Гельдера [2, с. 392]:

$$\|f\|_p=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}f\,g\,dt \tag{16}$$

та рівності (15) для $s=2$, встановимо, що для будь-якої функції $f\in L_q^r$

$$\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p=\sup_{\{\|g\|_{p';\alpha^{-1},\beta^{-1}}\le 1\}}\int_0^{2\pi}[f-\mathbf{L}_n(f)]g\,dt=$$

$$=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_{r,2}(t,u)\,du\right)g(t)\,dt=$$

$$=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)\left(\int_0^{2\pi}g(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_{r,2}(t,u)\,dt\right)du=$$

$$=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}\varphi(u)\psi''(u)\,du, \tag{17}$$

де позначено

$$\varphi(u):=f^{(r)}(u), \tag{18}$$

$$\psi(u):=\int_0^{2\pi}g(t)K_{r,2}(t,u)\,dt \tag{19}$$

а, отже,

$$\psi'(u)=\int_0^{2\pi}g(t)\frac{\partial}{\partial u}K_{r,2}(t,u)\,dt, \tag{20}$$

$$\psi''(u)=\int_0^{2\pi}g(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_{r,2}(t,u)\,dt. \tag{21}$$

Далі нам знадобляться наступні оцінки:

$$\int_0^{2\pi}\varphi\cdot\psi''\,dt=\int_0^{2\pi}(\varphi-\varphi_\delta)\cdot\psi''\,dt+\int_0^{2\pi}\varphi_\delta\cdot\psi''\,dt\le$$

$$\le\|\varphi-\varphi_\delta\|_q\|\psi''\|_{q'}+\int_0^{2\pi}\varphi'_\delta\cdot\psi'\,dt, \tag{22}$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi\cdot\psi''\,dt\le\|\varphi-\varphi_{\delta^2}\|_q\|\psi''\|_{q'}+\int_0^{2\pi}\varphi''_{\delta^2}\cdot\psi\,dt. \tag{23}$$

Внаслідок того, що при будь-якому $\lambda\in\mathbf{R}^1$

$$\int_0^{2\pi}\varphi'_\delta\cdot\psi'\,dt=\int_0^{2\pi}\varphi'_\delta(\psi'-\lambda)\,dt\le\|\varphi'_\delta\|_q\|\psi'-\lambda\|_{q'},$$

отримаємо, що

$$\int_0^{2\pi}\varphi'_\delta\cdot\psi'\,dt\le\|\varphi'_\delta\|_q\,E(\psi')_{q'}. \tag{24}$$

Так само доводимо, що

$$\int_0^{2\pi}\varphi''_{\delta^2}\cdot\psi\,dt\le\|\varphi''_{\delta^2}\|_q\,E(\psi)_{q'}. \tag{25}$$

Наведемо відомі [3, с. 178] оцінки для норм, які містять функції Стєклова:

$$\|\varphi-\varphi_\delta\|_q\le\omega_1(\varphi;\delta/2)_q, \tag{26}$$

$$\|\varphi'_\delta\|_q\le\left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1(\varphi;\delta)_q. \tag{27}$$

Тепер із співвідношення (17), застосувавши до нього спочатку оцінки (22), (24), а потім (26),(27), виводимо, що справджується нерівність

$$\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p\le\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\left\{\omega_1\left(f^{(r)};\delta/2\right)_q\|\psi''\|_{q'}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(f^{(r)};\delta\right)_q E(\psi')_{q'}\right\}. \tag{28}$$

Користуючись (16), отримаємо, що

$$\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\|\psi''\|_{q'}=$$

$$=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\sup_{\{\|\theta\|_q\le 1\}}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}g(t)\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_{r,2}(t,u)\,du\right)\theta(u)\,du=$$

$$=\sup_{\{\|\theta\|_q\le 1\}}\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}g(t)\left(\int_0^{2\pi}\theta(u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_{r,2}(t,u)\,du\right)dt=$$

$$=\sup_{f\in W_q^r}\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}(f-\mathbf{L}_n(f))(t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\sup_{f\in W_q^r}\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p=\varepsilon\left(W_q^r;\mathbf{L}_n\right)_p\le$$

$$\le\varepsilon\left(W_q^{r,*};\mathbf{L}_n\right)_p=B_{r,*}(\Im_n). \tag{29}$$

Аналогічно попередньому, але користуючись тепер класичною теоремою двоїстості [2, с. 25], а потім екстремальним співвідношенням (16), здобудемо, що для $m=1,2$ справджується наступний ланцюжок рівностей

$$\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}E\left(\psi^{(2-m)}\right)_{q'}=$$

$$=\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\sup_{\{\|y\|_q\le 1,\,y\perp\mathrm{const}\}}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}g(t)\frac{\partial^{2-m}}{\partial u^{2-m}}K_{r,2}(t,u)\,dt\right)y(u)\,du=$$

$$=\sup_{\{\|y\|_q\le 1,\,y\perp\mathrm{const}\}}\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}g(t)\left(\int_0^{2\pi}y(u)\frac{\partial^{2-m}}{\partial u^{2-m}}K_{r,2}(t,u)\,du\right)dt=$$

$$=\sup_{f\in W_q^{r+m}}\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}g(t)\left(\int_0^{2\pi}f^{(r)}(u)\frac{\partial^{2-m}}{\partial u^{2-m}}K_{r,2}(t,u)\,du\right)dt=$$

$$=\sup_{f\in W_q^{r+m}}\sup_{\{\|g\|_{p'}\le 1\}}\int_0^{2\pi}(f-\mathbf{L}_n(f))(t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\sup_{f\in W_q^{r+m}}\|f-\mathbf{L}_n(f)\|_p=\varepsilon\left(W_q^{r+m};\mathbf{L}_n\right)_p=$$

$$=B_{r+m}(\Im_n)_p. \tag{30}$$

Із оцінки (28), врахувавши в ній нерівність (29) та рівність (30) для $m=1$, встановимо, що справджується нерівність (4) теореми 1. Отже, виконується наступна нерівність

$$\left\|f-\mathbf{L}_n(f)\right\|_p \le \omega_1\left(f^{(r)};\delta\right)_q\left(B_{r,*}(\Im_n)+\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n)\right). \qquad (31)$$

Внаслідок означення (2) точної константи у нерівності типу Джексона із (31) випливає, що

$$\aleph_{r,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q} \le B_{r,*}(\Im_n)+\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n), \qquad (32)$$

тобто у твердженні (6) теореми 1 доведена відповідна оцінка зверху точної константи.

Залишається перевірити, що справедлива також і оцінка знизу для точної константи, яка запропонована в співвідношенні (6) теореми 1.

Зрозуміло, що для будь-яких $r,m=1,2,...$

$$B_{r+m}(\Im_n)=\sup_{\left\{f\in L_q^{r+m},\, f\ne\mathrm{const}\right\}}\frac{\left\|f-\mathbf{L}_n(f)\right\|_p}{\left\|f^{(r+m)}\right\|_q}. \qquad (33)$$

Крім того, із відомої у теорії скінченних різниць нерівності

$$\left\|\Delta_\delta^m f\right\|_q \le \delta^m\left\|f^{(m)}\right\|_q \quad \left(f\in L_q^m\right)$$

випливає, що

$$\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q \le \delta^m\left\|f^{(r+m)}\right\|_q \quad \left(f\in L_q^{r+m}\right). \qquad (34)$$

Внаслідок (33), (34), спираючись на включення $L_q^{r+m}\subset L_q^r$, отримаємо наступне співвідношення

$$B_{r+m}(\Im_n)\le\delta^m\sup_{\left\{f\in L_q^{r+m},\, f\ne\mathrm{const}\right\}}\frac{\left\|f-\mathbf{L}_n(f)\right\|_p}{\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q}\le$$

$$\le\delta^m\,\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}.$$

Таким чином, для будь-яких $r,m=1,2,...$ має місце нерівність

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^m B_{r+m}(\Im_n)\le\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}. \qquad (35)$$

Аналогічно попередньому, користуючись тим, що

$$B_{r,*}(\Im_n)=\sup_{\left\{f\in L_q^r,\, f\ne\mathrm{const}\right\}}\frac{\left\|f-\mathbf{L}_n(f)\right\|_p}{E\left(f^{(r)}\right)_q},$$

а також тим фактом, що для будь-яких $\delta>0$, $r,m=1,2,...$, $f\in L_q^r$

$$\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q\le 2^m E\left(f^{(r)}\right)_q,$$

встановимо нерівність:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m B_{r,*}(\Im_n)\le\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q} \quad (r,m=1,2,...). \qquad (36)$$

Отже, із нерівностей (35) і (36) при $m=1$ випливає, що

$$\max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)B_{r,*}(\Im_n),\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n)\right\}\le\aleph_{r,m}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}.$$

Таким чином, оцінка знизу для точних констант, регламентована співвідношенням (6) в теоремі 1, справджується. Теорема 1 повністю доведена.

Висновки

(I) В умовах теореми 1 фіксованих $\mathbf{L}_n$ та $\Im_n$,при $\delta\to 0$ маємо

$$\aleph_{r,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{p,q}\sim\left(\frac{1}{\delta}\right)B_{r+1}(\Im_n).$$

(II) Для багатьох лінійних додатних методів $\mathbf{L}_n$ виконується наступна умова:

$$\left\|f-\mathbf{L}_n(f)\right\|_p=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad\left(f\in L_\infty^2,\, n\to\infty\right). \qquad (37)$$

Такими методами, як відомо [8] є, наприклад, оператори Джексона, Коровкіна та інші. Нескладно показати, що для таких операторів

$$\varepsilon\left(W_\infty^k;\mathbf{L}_n\right)_\infty=O\left(\frac{1}{n^k}\right)\quad(k=0,1,2).$$

У цьому випадку (37) за умов $n\to 0$, $\delta\to 0$ теорема 1 надає наступні співвідношення

$$\aleph_{0,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{\infty,\infty}=O\left(1+\frac{1}{n\delta}\right).$$

$$\aleph_{1,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{\infty,\infty}=O\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2\delta}\right)$$

і при $r\ge 2$

$$\aleph_{r,1}(\mathbf{L}_n,\Im_n;\delta)_{\infty,\infty}=O\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2\delta}\right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 3. – С. 514–515.
2. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
3. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 71–74.
5. Лигун А.А. Специальные вопросы теории приближений. – К.: Выща школа. – 1990. – 74 с.
6. Бабенко А.Г. Прямые теоремы теории приближения в L_2 и родственные экстремальные задачи для положительно определенных функций // УрО РАН ИММ. Екатеринбург, 2004: Диссерт. доктор. физ.-мат. наук. – 268 с.
7. Доронин В.Г., Лигун А.О. Поведінка точних констант у нерівностях типу Джексона // Вісник Дніпропет. ун-ту. Математика. – 2008, № – С. 15–21.
8. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.

пост. 03.04.08