Задачі відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І. Шоенберга, К.Де Бора, М.П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О. Лигуном [1] та у ряді авторських робіт, зокрема [2]. Що до методів, побудованих на бінарному поповненні послідовностей, то звертають увагу роботи [3-7], в тому числі і за усередненими на інтервалах розбиття значеннями гладких функцій як однієї, так і двох змінних [2; 8-10]. Стосовно відтворення функцій за усередненими значеннями, визначеними на рівномірних розбиттях можна зазначити наступне: вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань [1; 2], в першу чергу це стосується даних з вадою.

Поставимо за мету у подальшому викладенні подати процедури чотирикратного поповнення зі згладжуванням двовимірних послідовностей відліків гладких функцій (двократного масштабування) на підставі алгоритмізації обчислювальних схем двовимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів. Слід зазначити, що в роботах [2; 10] задача масштабування на площині вирішується за рахунок ітераційних процедур бінарного поповнення двовимірних послідовностей. Проте, нескладно показати, що обчислювальна складність такого підходу не може в повній мірі задовольняти розробників програмного забезпечення з вимогою функціонування в режимі реального часу (за рахунок додаткових ітераційних циклів зростає кількість простіших арифметичних операцій).

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо розбиття площини на прямокутники з кроками h_t, h_q вздовж відповідних осей, отже, задано масив точок

$$\left\{\left(t_{i,0};q_{j,0}\right)\right\}=\left\{\left(ih_t;jh_q\right)\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

кожному елементу якого поставлено у відповідність усереднене на прямокутній області

$$\left\{\left(t_{i,0}-0{,}5h_t;q_{j,0}-0{,}5h_q\right);\left(t_{i,0}+0{,}5h_t;q_{j,0}+0{,}5h_q\right)\right\}$$

значення деякої

$$p(t,q)\in C^{k_1,k_2},\ k_1,k_2=2,3,\ldots$$

функції у вигляді масиву $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

Для чотирикратного рекурентного поповнення кількості членів послідовності $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ достатньо на кожному κ-му ($\kappa=1,2,\ldots$) кроці рекурсії мати нову, згущену сітку вузлів

$$\left\{(t_{2i,\kappa},q_{2j,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j,\kappa}),\right.$$
$$\left.(t_{2i,\kappa},q_{2j+1,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j+1,\kappa})\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}},$$

які визначаються за формулами:

$$t_{2i,\kappa}=t_{i,\kappa-1},$$
$$q_{2j,\kappa}=q_{j,\kappa-1}$$
$$t_{2i+1,\kappa}=\frac{t_{i,\kappa-1}+t_{i+1,\kappa-1}}{2}=t_{i,\kappa-1}+\frac{h_t}{2^{\kappa+1}};$$

$$q_{2j+1,\kappa}=\frac{q_{j,\kappa-1}+q_{j+1,\kappa-1}}{2}=q_{j,\kappa-1}+\frac{h_q}{2^{\kappa+1}},$$

причому

$$\begin{aligned}
&p_{2i,2j,\kappa}=A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),\\
&p_{2i+1,2j,\kappa}=B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),\\
&p_{2i,2j+1,\kappa}=C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),\\
&p_{2i+1,2j+1,\kappa}=D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),\ i,j\in\mathbb{Z},
\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\ D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$$

- лінійні функціонали, що побудовано на даних попереднього кроку рекурсії.

Наприклад, функціонали (1) неважко отримати за використанням сплайну $S_{4,0}(p,t,q)$ [2] та його явного вигляду, якщо покласти, відповідно:

($x=0$, $y=0$), ($x=1$, $y=0$),
($x=0$, $y=1$), ($x=1$, $y=1$),

де

$$x=\frac{2}{h_t}\left(t-(i+0{,}5)h_t\right),\qquad y=\frac{2}{h_q}\left(q-(j+0{,}5)h_q\right).$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}
A^{\left(S_{4,0}\right)}(\cdot)=p_{2i,2j,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{147456}\Big(&p_{i-2,j-2,\kappa-1}+76p_{i-1,j-2,\kappa-1}+\\
+230&p_{i,j-2,\kappa-1}+76p_{i+1,j-2,\kappa-1}+p_{i+2,j-2,\kappa-1}+76p_{i-2,j-1,\kappa-1}+\\
+5776&p_{i-1,j-1,\kappa-1}+17480p_{i,j-1,\kappa-1}+5776p_{i+1,j-1,\kappa-1}+\\
+76&p_{i+2,j-1,\kappa-1}+230p_{i-2,j,\kappa-1}+17480p_{i-1,j,\kappa-1}+\\
+52900&p_{i,j,\kappa-1}+17480p_{i+1,j,\kappa-1}+230p_{i+2,j,\kappa-1}+\\
+76&p_{i-2,j+1,\kappa-1}+5776p_{i-1,j+1,\kappa-1}+17480p_{i,j+1,\kappa-1}+\\
+5776&p_{i+1,j+1,\kappa-1}+76p_{i+2,j+1,\kappa-1}+p_{i-2,j+2,\kappa-1}+76p_{i-1,j+2,\kappa-1}+\\
+230&p_{i,j+2,\kappa-1}+76p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big),
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
B^{\left(S_{4,0}\right)}(\cdot)=p_{2i+1,2j,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{9216}\Big(&p_{i-1,j-2,\kappa-1}+11p_{i,j-2,\kappa-1}+\\
+11&p_{i+1,j-2,\kappa-1}+p_{i+2,j-2,\kappa-1}+76p_{i-1,j-1,\kappa-1}+836p_{i,j-1,\kappa-1}+\\
+836&p_{i+1,j-1,\kappa-1}+76p_{i+2,j-1,\kappa-1}+230p_{i-1,j,\kappa-1}+2530p_{i,j,\kappa-1}+\\
+2530&p_{i+1,j,\kappa-1}+230p_{i+2,j,\kappa-1}+76p_{i-1,j+1,\kappa-1}+836p_{i,j+1,\kappa-1}+\\
+836&p_{i+1,j+1,\kappa-1}+76p_{i+2,j+1,\kappa-1}+p_{i-1,j+2,\kappa-1}+11p_{i,j+2,\kappa-1}+\\
+11&p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big),
\end{aligned}\tag{3}$$

$$C^{\left(S_{4,0}\right)}(\cdot)=p_{2i,2j+1,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{9216}\Big(p_{i-2,j-1,\kappa-1}+76p_{i-1,j-1,\kappa-1}+$$

$$+230 p_{i,j-1,\kappa-1}+76 p_{i+1,j-1,\kappa-1}+p_{i+2,j-1,\kappa-1}+11 p_{i-2,j,\kappa-1}+$$

$$+836 p_{i-1,j,\kappa-1}+2530 p_{i,j,\kappa-1}+836 p_{i+1,j,\kappa-1}+11 p_{i+2,j,\kappa-1}+$$

$$+11 p_{i-2,j+1,\kappa-1}+836 p_{i-1,j+1,\kappa-1}+2530 p_{i,j+1,\kappa-1}+$$

$$+836 p_{i+1,j+1,\kappa-1}+11 p_{i+2,j+1,\kappa-1}+p_{i-2,j+2,\kappa-1}+76 p_{i-1,j+2,\kappa-1}+$$

$$\left.+230 p_{i,j+2,\kappa-1}+76 p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\right), \qquad (4)$$

$$D^{\left(S_{4,0}\right)}(\cdot)=p_{2i+1,2j+1,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{576}\left(p_{i-1,j-1,\kappa-1}+11 p_{i,j-1,\kappa-1}+\right.$$

$$+11 p_{i+1,j-1,\kappa-1}+p_{i+2,j-1,\kappa-1}+11 p_{i-1,j,\kappa-1}+121 p_{i,j,\kappa-1}+$$

$$+121 p_{i+1,j,\kappa-1}+11 p_{i+2,j,\kappa-1}+11 p_{i-1,j+1,\kappa-1}+121 p_{i,j+1,\kappa-1}+$$

$$+121 p_{i+1,j+1,\kappa-1}+11 p_{i+2,j+1,\kappa-1}+p_{i-1,j+2,\kappa-1}+11 p_{i,j+2,\kappa-1}+$$

$$\left.+11 p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\right). \qquad (5)$$

В стислому вигляді функціонали (2)-(5) можна подати так:

$$\begin{aligned}
&p_{2i,2j,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma_{A,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\
&p_{2i+1,2j,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma_{B,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\
&p_{2i,2j+1,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma_{C,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \\
&p_{2i+1,2j+1,\kappa}^{\left(S_{4,0}\right)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma_{D,i_t,j_q}^{\left(S_{4,0}\right)} p_{i_t,j_q,\kappa-1},
\end{aligned} \qquad (6)$$

де

$$\gamma_A^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{147456}\begin{pmatrix}1 & 76 & 230 & 76 & 1\\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76\\ 230 & 17480 & 52900 & 17480 & 230\\ 76 & 5776 & 17480 & 5776 & 76\\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{9216}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1\\ 11 & 836 & 2530 & 836 & 11\\ 11 & 836 & 2530 & 836 & 11\\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{9216}\begin{pmatrix}0 & 1 & 11 & 11 & 1\\ 0 & 76 & 836 & 836 & 76\\ 0 & 230 & 2530 & 2530 & 230\\ 0 & 76 & 836 & 836 & 76\\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{\left(S_{4,0}\right)}=\frac{1}{576}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1\\ 0 & 11 & 121 & 121 & 11\\ 0 & 11 & 121 & 121 & 11\\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1\end{pmatrix}.$$

Вирази на зразок (2-5) та (6) дозволяють навести подання функціоналів (1), які отримані за використанням сплайнів [2]

$$S_{2,0}(p,t,q),\ S_{3,0}(p,t,q),\ S_{5,0}(p,t,q),$$

що мають згладжувальні властивості:

$$p_{a,b,\kappa}^{(2,0)}=\sum_{i_t=i-1}^{i+1}\sum_{j_q=j-1}^{j+1}\gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(2,0)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (7)$$

де

$$\Lambda=\begin{bmatrix}A: a=2i, b=2j,\\ B: a=2i+1, b=2j,\\ C: a=2i, b=2j+1,\\ D: a=2i+1, b=2j+1;\end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\gamma_A^{\left(S_{2,0}\right)}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1 & 6 & 1\\ 6 & 36 & 6\\ 1 & 6 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{\left(S_{2,0}\right)}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 1\\ 1 & 6 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{\left(S_{2,0}\right)}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{\left(S_{2,0}\right)}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$p_{a,b,\kappa}^{(3,0)}=\sum_{i_t=i-1}^{i+2}\sum_{j_q=j-1}^{j+2}\gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(3,0)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (9)$$

де

Λ - визначається з (8);

$$\gamma_A^{\left(S_{3,0}\right)}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 4 & 16 & 4 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{\left(S_{3,0}\right)}=\frac{1}{288}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 23 & 92 & 23 & 0\\ 23 & 92 & 23 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{\left(S_{3,0}\right)}=\frac{1}{288}\begin{pmatrix}1 & 23 & 23 & 1\\ 4 & 92 & 92 & 4\\ 1 & 23 & 23 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{\left(S_{3,0}\right)}=\frac{1}{2304}\begin{pmatrix}1 & 23 & 23 & 1\\ 23 & 529 & 529 & 23\\ 23 & 529 & 529 & 23\\ 1 & 23 & 23 & 1\end{pmatrix};$$

$$p_{a,b,\kappa}^{(5,0)}=\sum_{i_t=i-2}^{i+3}\sum_{j_q=j-2}^{j+3}\gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(5,0)} p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (10)$$

де

Λ - визначається з (8);

$$\gamma_A^{(S_{5,0})} = \frac{1}{14400}\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 & 0 \\ 66 & 1716 & 4356 & 1716 & 66 & 0 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{(S_{5,0})} = \frac{1}{460800}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 237 & 6162 & 15642 & 6162 & 237 & 0 \\ 1682 & 43732 & 111012 & 43732 & 1682 & 0 \\ 1682 & 43732 & 111012 & 43732 & 1682 & 0 \\ 237 & 6162 & 15642 & 6162 & 237 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{(S_{5,0})} = \frac{1}{460800}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 26 & 6162 & 43732 & 43732 & 6162 & 26 \\ 66 & 15642 & 111012 & 111012 & 15642 & 66 \\ 26 & 6162 & 43732 & 43732 & 6162 & 26 \\ 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{(S_{5,0})} = \frac{1}{14745600}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 237 & 56169 & 398634 & 398634 & 56169 & 237 \\ 1682 & 398634 & 2829124 & 2829124 & 398634 & 1682 \\ 1682 & 398634 & 2829124 & 2829124 & 398634 & 1682 \\ 237 & 56169 & 398634 & 398634 & 56169 & 237 \\ 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \end{pmatrix}$$

Висновки

Відзначимо, що для сплайнів $S_{r,0}(p,t,q)$, $r = 2,3,4,5$ ступінь згладжування зростає з ростом r [2], тому цей факт слід враховувати при реалізації відповідних обчислювальних схем, залежно від конкретних потреб. Стосовно обробки цифрованих зображень, з урахуванням вимоги швидкодії обчислювальних схем, цілком достатньо у відповідних автоматизованих системах реалізовувати функціонали (7), (9) при суттєвій деталізації об'єктів, привівши подібні для зменшення кількості простіших арифметичних операцій, функціонал (10) – наприклад, при обробці портретних знімків. Загалом, реалізація в програмному забезпеченні отриманих функціоналів показала, що при двократному збільшенні розміру растрового зображення формату А3, відповідна дія відбувається у режимі реального часу.

Подальші дослідження мають враховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів на основі сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому трьох змінних при опрацюванні послідовностей відліків функцій відповідної розмірності, а також взаємодію методів стиснення та відтворення інформації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
2. *Приставка П.О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
3. *Dubuk S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, p.185-204.
4. *De Marchi S.* The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions. TR nr. 10/94, University of Padua, 1994.
5. *Holschneider M.* Wavelets. An analysis Tool. Oxford. Oxford University Press, 1995.
6. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (5), 2000, с.11-19.
7. *Иванин Д.А., Лигун А.А.* Линейный метод восстановления поверхностей по её значениям в узлах квадратной решетки // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.8-12.
8. *Лигун А.А., Шумейко А.А., Голобородько П.Л.* О гарантированных оценках для линейных методов восстановления, основанных на бинарном расслоении // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (7), 2001, с.30-39.
9. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Об одном способе восстановления функций по средним значениям на равномерной сетке // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.16-17.
10. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2003.-Т.7. –С.39-53.

пост. 11.03.08