

$$\left[U(x, y) + \lambda \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (14)$$

$$U(x, y)|_{y=b} = U(x, y)|_{x=0} = U(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (15)$$

де Δ - оператор Лапласа, $U(x, y) \in L_2([0, a] \times [0, b])$.

З теорема 2 випливає, що ця задача має дійсні власні значення, але не може мати дискретного спектру. Задача має злічену кількість дійсних власних значень $\lambda_{kn} = k^2 \pi^2 - \mu_{kn}^2$, де μ_{kn} - розв'язки рівняння $\operatorname{tg} \mu = k^2 \pi^2 \mu - \mu^3$, яке при кожному фіксованому k має злічену кількість коренів. Власні функції цієї задачі мають вигляд:

$$Y_{kn}(y) = -\operatorname{tg} \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} \cos \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} y + \sin \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} y$$

Неважко перекопатись, послідовність власних значень λ_{kn} є зростаючою необмеженою, отже спектр оператора не є обмеженою множиною дійсних чисел, тому обернений оператор, що дає розв'язок задачі не є обмеженим, а, отже, не може бути компактним.

Висновок

Отримані результати, підтвержені модельними прикладами, показують, що для нестандартних граничних задач, до яких відносяться задачі зі спектральними параметром як в рівнянні так і в граничних умовах, спектр не може бути дискретним, якщо спектральний параметр в граничних умовах входить до доданку з частинною похідною (14).

ЛІТЕРАТУРА

1. Олійник Л. О. Узагальнені розширення симетричного оператора та граничні задачі з спектральним параметром для диференціально-операторних рівнянь. Київ : Препр.Київ НМКВО. 1991.
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев : Наук. думка. 1984. — 284 с.

пост.04.11.2014

Аналитический расчет температур и термических напряжений при граничных условиях I рода

А. Д. ГОРБУНОВ, С. В. УКЛЕИНА

Днепропетровский государственный технический университет

Разработана инженерная методика аналитического расчета времени инерционного периода в линейных задачах нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при граничных условиях I рода. Получены достаточно простые, точные и приближенные формулы для расчетов полей температур и термических напряжений на начальной и квазистационарной стадиях.

Розроблена інженерна методика аналітичного розрахунку інерційного періоду в лінійних задачах нагріву (охолодження) тіл правильної геометричної форми при граничних умовах I рода. Отримані прості, точні і набліжені формули для розрахунку полів температур і термічних напруг на початковій і квазістаціонарній стадіях.

The engineering technique of the inertial period analytic calculation in linear problems of regular geometric shape solids heating (cooling) under the boundary conditions of I type was developed. The simplest precise and approximate expressions for temperature fields and thermal tensions calculations at initial and quasistationary stages were obtained.

Анализ публикаций. К настоящему времени существует достаточно много точных [1] и приближенных методик [2—4] расчета процессов нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии, однако, например, в [1, 2] нет формул по определению времени инерционного периода, а в [3, 4] — по расчету среднemasсовых температур, без знания которых невозможно определить термические напряжения.

Получим решения, свободные от указанных недостатков.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до T_c имеет вид (см. рис. 1).

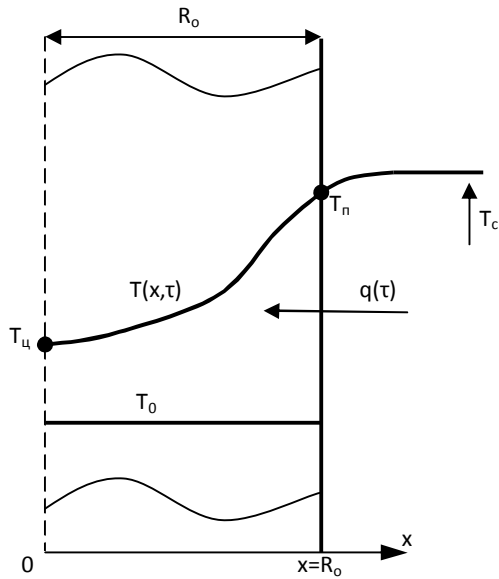


Рис.1. К постановке задачи теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \vartheta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\vartheta(X, 0) = \vartheta_0 = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\vartheta(1, Fo) = \vartheta_n(Fo) = 0, \quad (4)$$

где $\vartheta = (T(x, \tau) - T_c) / \Delta T_0$; $\Delta T_0 = (T_0 - T_c)$ — максимально возможный перепад температур, °C; $\vartheta_n(Fo) = \vartheta(1, Fo)$ — относительная температура на поверхности; $X = x/R_0$; R_0 — характерный размер тела, м; $Fo = a\tau/R_0^2$ — число Фурье; k — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара.

При рассмотрении инерционной (начальной) стадии, когда процессу нагрева (охлаждения) подвержены только тонкие поверхностные слои массивного тела, последнее можно считать полубесконечным плоским телом, перенеся начало координат на поверхность (см. рис.2) и ввести известное [3] понятие о толщине термического (прогретого) слоя переменной толщины $\delta(\tau)$. Считается, что при $x \geq \delta(\tau)$ температура в этих точках отличается не более, чем на $\varepsilon_n = 5\%$ от первоначальной T_0 , где ε_n можно трактовать как степень прогрева центра тела.

Чаще всего, для большинства задач реализуется так называемый «корневой» закон изменения термического слоя во времени $\delta(\tau) = 2u_0\sqrt{a\tau}$ или в безразмерном виде:

$$S(Fo) = \frac{\delta(\tau)}{R_0} = 2u_0\sqrt{Fo}, \quad (5)$$

где a — коэффициент температуропроводности, m^2/c , u_0 — постоянная величина, существенно зависящая от геометрии тел и вида граничного условия (4).

Решение задачи. Получим решение несколькими способами.

1) Приближенный метод Ю.С. Постольника.

Следуя [3], задаемся параболическим распределением температуры в пределах термического слоя

$$\theta(X, Fo) = \theta_n(Fo) \cdot (1 - U)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta(\tau), \quad (6)$$

где $U(X, Fo) = \frac{X}{S(Fo)} = \frac{x}{\delta(\tau)}$; $0 \leq U \leq 1$; $\theta = T(x, \tau) / T_M$;

T_M — масштабная (характерная) температура.

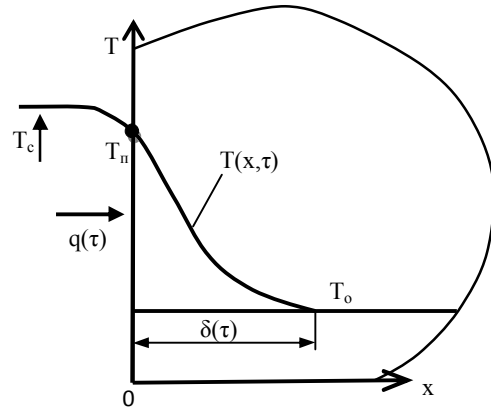


Рис.2. Схема начальной стадии нагрева

Введем согласно интегральному методу Гудмена [5] интеграл теплового баланса:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \cdot dx = \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \cdot dx. \quad (7)$$

Взяв производные $\partial \theta / \partial Fo$ и $\partial^2 \theta / \partial X^2$ из соотношения (6), подставив их в уравнение (7) и произведя операцию интегрирования, получим

$$S(Fo) = \sqrt{12k\tilde{Fo}}, \quad (8)$$

где $\tilde{Fo} = \frac{1}{\theta_n^2(Fo)} \int_0^{Fo} \theta_n^2(\eta) d\eta$ — модифицированное число Фурье, при постоянной температуре поверхности оно превращается (переходит) в обычное число Fo .

Время инерционного периода Fo_1 находится из условия достижения теплового возмущения центральных точек тела, т.е. из условия $\delta(\tau_1) = R_0$ или $S(Fo_1) = 1$. Тогда из (8) будем иметь

$$\tilde{Fo}_1 = \frac{1}{\theta_n^2(Fo_1)} \int_0^{Fo_1} \theta_n^2(\eta) d\eta = \frac{1}{12k}. \quad (9)$$

В случае неизменной во времени температуре поверхности:

$$Fo_1 = 1/(12k). \quad (10)$$

При известном времени инерционного периода из уравнения (5) можно найти постоянную

$$u_0 = 1/\sqrt{2\sqrt{Fo_1}}. \quad (11)$$

2) Методика А.Д. Горбунова.

Решая систему уравнений (1)...(4) методом разделения переменных, в [1] было получено: Температура в любой точке тела

$$\vartheta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot U_n(X) \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (12)$$

среднемассовая температура

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (13)$$

температура в центре тела из (12) при $X=0$

$$\vartheta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (14)$$

и поверхностная из (12) при $X=1$: $\vartheta_n(Fo) = 0$ (смотри рис. 3).

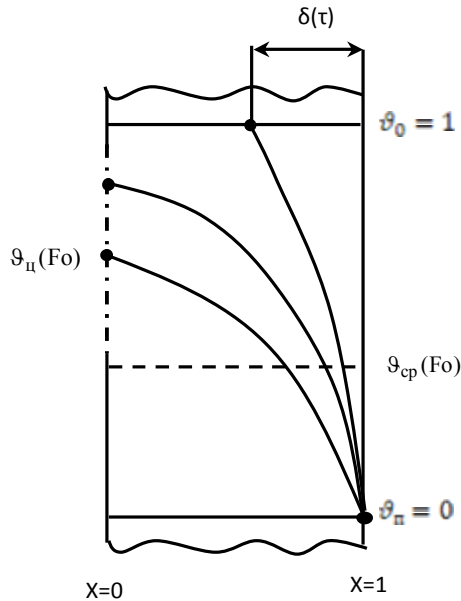


Рис.3. Кривые распределения относительных температур в теле

Здесь a_n — корни характеристического уравнения; $U_n(X)$ — координатная функция; A_n и B_n — центральная и средняя амплитуды, зависящие от формы тела, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения a_n , $U_n(X)$, A_n и B_n в зависимости от формы тела

Форма тел	Уравнение корней	a_n	$U_n(X)$	A_n	B_n
$k=1$	$\cos(a_n) = 0$	$(2n-1) \cdot \pi/2$	$\cos(a_n X)$	$\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{a_n}$	$\frac{2}{a_n^2}$
$k=2$	$J_0(a_n) = 0$	2,4048 и т.д.	$J_0(a_n X)$	$\frac{2}{a_n J_1(a_n)}$	$\frac{4}{a_n^2}$
$k=3$	$\sin(a_n) = 0$	$n\pi, n=1,2,\dots$	$\frac{\sin(a_n X)}{(a_n X)}$	$(-1)^{n+1} \cdot 2$	$\frac{6}{a_n^2}$

J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода.

Условно можно считать, что инерционный период нагрева закончится в момент времени Fo_1 , когда заданная температура в центре станет равной $\vartheta_{ц,з} = (1 - \varepsilon_n) = 0,95$ и свидетельствующей о том, что уже все тело начинает прогреваться.

Используя два члена ряда (14), после логарифмирования, получим:

$$Fo_1 = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1 \cdot (1 - \varepsilon_1)}{\vartheta_{ц,з}}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_1(Fo_1) = (A_2/A_1) \cdot \exp(-a \cdot Fo_1)$; $a = a_2^2 - a_1^2$.

Ввиду зависимости $\varepsilon_1(Fo_1)$, уравнение (15) должно решаться методом последовательных приближений. Использование метода последовательных приближений для пластины на шестой итерации привело к точному значению $Fo_1 = 0,099$, однако для шара этот метод оказался расходящимся. В этом случае следует применить другой, более мощный метод решения трансцендентного уравнения, например метод касательных Ньютона.

Используя инженерную методику [6] расчета корней, время инерционного периода можно записать в виде:

$$Fo_1 = \frac{\gamma_{\infty}}{D_{\infty}} \cdot \ln \frac{A_1}{0,95}, \quad (16)$$

где $A_1 \cong 0,4(k+2)$; $D_{\infty} = k(k+2)$; $\gamma_{\infty} = (1 + \sqrt{1+4\rho_{\infty}})/2$; $\rho_{\infty} = k/(k+4)$.

Из анализа решений (15) и (16) следует, что зависимость Fo_1 от формы тела имеет гораздо более сложный характер, чем в простом уравнении (10).

Третий способ определения Fo_1 . Для полубесконечного плоского тела (см. рис. 2) при постоянной температуре поверхности $T_n = T_c = \text{const}$ в [1] было получено:

$$\vartheta(X, Fo) = \frac{T(x, \tau) - T_c}{\Delta T_0} = \text{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{Fo}}\right), \quad (17)$$

где $\text{erf}(z) = p \int_0^z e^{-z^2} dz$ — функция ошибок Гаусса (специальная функция); $p = 2/\sqrt{\pi} = 1,128379$.

Если в уравнении (17) положить $\vartheta = \vartheta_{ц,з} = 1 - \varepsilon_n$, а $X = S(Fo) = 2u_0 \sqrt{Fo}$, то можно получить формулу для расчета постоянной u_0 :

$$\varepsilon_n = 1 - \text{erf } u_0 \equiv \text{erfc } u_0. \quad (18)$$

В табл. 2 приведены результаты численного расчета на ПЭВМ уравнения (18) при различных степенях прогрева. Там же представлены данные о величине времени прогрева, которое получим из (11), разрешенного относительно

$$Fo_1 = 1/(4u_0^2). \quad (19)$$

Таблица 2. Зависимость постоянной u_0 и времени инерционного периода Fo_1 от степени прогрева ε_n центральных точек тела при $T_n = \text{const}$

$\varepsilon_n, \%$	0,5	1,0	5,0	10	15	20
u_0	1,99	1,82	1,39	1,16	1,02	0,91
Fo_1	0,063	0,075	0,129	0,186	0,240	0,302

Следует отметить, что приближенно графически решать трансцендентное уравнение (18) можно с помо-

щью рисунка 4.4 [1] из которого при заданной температуре $\vartheta_{ц,3}$, сразу получаем время Fo_1 .

Дифференцируя уравнение (17) по координате x и используя закон Фурье, можно получить выражение для теплового потока (число Кирпичева), обеспечивающего постоянство температуры на поверхности полубесконечного тела:

$$Ki(Fo) = \frac{q(\tau) \cdot R_0}{\lambda \Delta T_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \quad (20)$$

3) точные решения А.В. Лыкова.

Точные значения времени Fo_1 были определены по таблицам 4.2 (с. 95), 4.5 и 4.6 [1] из условия наступления температуры $\vartheta_{ц,3} = 0,95$ в центре пластины, цилиндра и шара соответственно.

Для сравнения и анализа в табл.3 приведено время инерционного периода Fo_1 , рассчитанное по разным формулам.

Таблица 3. Время инерционного периода при граничных условиях I рода

Форма тела	Точное из [1]	По уравнению (10)	По (15)	По (16)	Точное u_0 по (11)
Пластина	0,099	0,0833	0,1187	0,0912	1,589
Цилиндр	0,068	0,0417	0,0904	0,0823	1,917
Шар	0,055	0,0278	0,0754	0,0657	2,132

На рис.4 представлена графическая зависимость времени инерционного периода от фактора геометрической формы k , рассчитанная по разным методикам. Кривые на рис. 4 аппроксимировали с помощью программы Origin Pro 8.5.1.

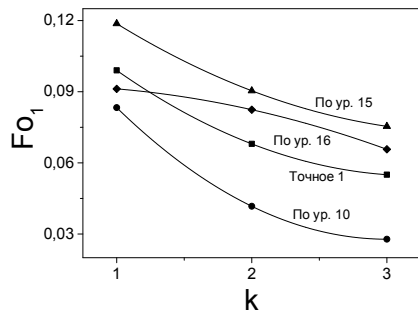


Рис.4. Зависимость времени инерционного периода от формы тела

Из анализа рис.4 вытекает, что наиболее близко к точному решению подходит расчет по простой приближенной формуле (16).

В решениях (12)...(14) при больших числах Фурье (обычно $Fo \geq 0,3$), когда наступает так называемый квазистационарный или регулярный режим нагрева (РРН), достаточно ограничиться всего одним членом ряда, однако при малых временах ($Fo \leq 0,1$) ряды очень плохо сходятся. В этом случае на помощь приходит метод операционного исчисления, позволяющий получить асимптотические решения, хорошо работающие на начальной стадии, т. е. при малых временах процесса

нагрева (охлаждения). Решения, полученные в монографии [1] методом Лапласа, имеют вид.

Для неограниченной пластины.

Температура в любой точке:

$$\vartheta(X, Fo) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1)-X}{2\sqrt{Fo}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1)+X}{2\sqrt{Fo}}\right) \right] \quad (21)$$

в центре пластины (при $X=0$)

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{2n-1}{2\sqrt{Fo}}\right) \approx 1 - 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo}}\right) \quad (22)$$

Если в последнем выражении положить $\vartheta_{ц}(Fo) = \vartheta_{ц,3} = 1 - \varepsilon_n$ и согласно (11) $1/(2\sqrt{Fo_1}) = u_0$, то получим уравнение (18) с заменой ε_n на $\varepsilon_n/2$. Отличие можно объяснить, тем что (18) получено для полубесконечного тела, а (22) — для неограниченной пластины и расчет по этому уравнению даст несколько меньшее значение времени инерционного периода.

Средняя температура пластины

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \vartheta_1(Fo) + 4\sqrt{Fo} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \operatorname{ierfc} \frac{n}{\sqrt{Fo}} \quad (23)$$

или с учетом одного члена ряда и разложения специальной функции в ряд при больших аргументах $\operatorname{ierfc} x \approx e^{-x^2} / (2x^2 \sqrt{\pi})$:

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \theta_1(Fo) + \varepsilon_2(Fo) \approx \theta_1(Fo) \quad (24)$$

где $\varepsilon_2(Fo) = pFo\sqrt{Fo} \exp(-1/Fo)$ — малое число; $\vartheta_1(Fo) = (1 - p\sqrt{Fo})$ — решение для средней температуры полубесконечного плоского тела.

Чтобы не допускать появления отрицательных температур, из уравнения (24) вытекает, что им можно пользоваться до чисел $Fo_2 \leq 1/p^2 = \pi/4 = 0,785$. Под числом Фурье Fo_2 понимается время, до которого еще можно пользоваться формулами начальной стадии (НС), хотя обычно считается, что время НС находится в пределах $0 \leq Fo \leq Fo_1$.

В [1] показано, что расчет средней температуры пластины при времени $Fo = 1/\pi^2 \approx 0,101$ по уравнению (24) и с учетом трех членов ряда (14) дает один и тот же результат $\vartheta_{cp}(0,101) = 0,6408$.

Для шара средняя температура по [1] имеет вид

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 3 \cdot Fo - 6\sqrt{Fo} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ierfc} \frac{n}{\sqrt{Fo}} \right) \quad (25)$$

или с учетом разложения

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 3(Fo - p\sqrt{Fo} - \varepsilon_2(Fo)) \approx 1 + 3(Fo - p\sqrt{Fo}) \quad (26)$$

Расчет ϑ_{cp} по уравнению (26) при $Fo = 1/\pi^2$ дает $\vartheta_{cp}(0,101) = 0,2264$, что полностью совпадает с данными табл. 4.5 [1].

Температура в центре шара

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - \frac{p}{\sqrt{Fo}} \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right) \quad (27)$$

Расчет $\vartheta_{ц}$ по уравнению (27) при $Fo_1 = 0,54/\pi^2 = 0,0547$ дает $\vartheta_{ц}(Fo_1) = 0,950046$, что полностью совпадает с данными табл. 4.5 [1].

Формула для расчета средней температуры цилиндра на НС в [1] отсутствует, но анализ уравнения (26) и его связь с фактором геометрической формы позволяет предположить, что для цилиндра оно будет иметь следующий вид:

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 2(Fo - p\sqrt{Fo}). \quad (28)$$

Расчет по (28) при $Fo = 0,05$ дает $\vartheta_{cp}(0,05) = 0,595$ вместо 0,545 по рис. 4.22 [1].

Температура в центре цилиндра при малых числах Фурье согласно [1]:

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \cdot K_{1/4}\left(\frac{1}{8Fo}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{8Fo}\right) \quad (29)$$

или с учетом разложения спецфункции К при больших аргументах:

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{3Fo}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right) \approx 1 - 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right). \quad (30)$$

Если в уравнении (30) положить $\vartheta_{ц}(Fo_1) = 1 - \varepsilon_n$ и решить относительно времени, получим

$$Fo_1 = \frac{1}{4 \ln(2/\varepsilon_n)}, \quad (31)$$

которое при $\varepsilon_n = 0,05$ приводит к $Fo_1 = 0,0678$, что практически совпадает с данными табл. 4.6 [1].

В работе [4] приведено несколько решений при переменной во времени температуре поверхности. Найдем время инерционного периода для двух характерных случаев.

1) Пусть температура поверхности изменяется по степенному закону

$$\theta_n(Fo) = \theta_n \cdot Fo^n. \quad (32)$$

Тогда модифицированное время $\tilde{Fo} = \frac{1}{\theta_n^2(Fo)} \int_0^{Fo} \theta_n^2(\eta) d\eta = \frac{Fo}{2n+1}$ и окончательно согласно уравнению (9) время

$$Fo_1 = \frac{2n+1}{12k}. \quad (33)$$

Интересно отметить, что при $n = -0,5$ отсутствует инерционный период нагрева.

Согласно [4] тепловой поток, обеспечивающий изменение температуры поверхности полуограниченного плоского тела по степенному закону (32), имеет вид $q(\tau) = A/\sqrt{\tau}$ или в безразмерном виде

$$Ki(Fo) = \frac{B_\tau}{\sqrt{\pi Fo}}, \quad (34)$$

где $A = b \cdot V_T / \sqrt{\pi}$; где $b = \sqrt{\lambda_{cp}}$ — коэффициент аккумуляции тепла; $V_T = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+1) / \Gamma(n+1/2)$; $\Gamma(z)$ — Гамма-функция.

Заметим, что данный критерий Кирпичева отличается от полученного ранее (20) на постоянную величину V_T .

2) Пусть температура поверхности изменяется по экспоненциальному закону

$$\theta_n(Fo) = \theta_n e^{aFo}. \quad (35)$$

Модифицированное число Фурье

$$\tilde{Fo}_1 = \frac{1 - \exp(-2aFo_1)}{2a} = \frac{1}{12k}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно Fo_1 , получим время инерционного периода

$$Fo_1 = -\frac{1}{2a} \ln\left(1 - \frac{a}{6k}\right). \quad (36)$$

При малых величинах $a \ll 6k$, используя разложение $\ln(1+x) \approx x$, найдем время $Fo_1 = 1/12k$, совпадающее с полученным ранее уравнением (10) в случае постоянной температуры поверхности.

Расчет температур на начальной стадии требует использования специальных функций. С целью упрощения расчетов была сделана аппроксимация температур в центральных точках тела кубической параболой:

$$\vartheta_{ц}(Fo) \cong 1 - K_{ц} \cdot Fo^3, \quad (37)$$

где $K_{ц} = \varepsilon_n / Fo_1^3$; расчет Fo_1 — см. формулы (9), (15), (16) или рис.4.

Для расчета среднemasовой температуры воспользуемся известным, [2] и др., уравнением теплового баланса $Q = m \cdot c \cdot (t_{cp}(\tau) - t_0) = \int_0^\tau q(\tau) F d\tau$ или в безразмерном виде с учетом коэффициента формы тела:

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \vartheta_0 - k \int_0^{Fo} Ki(Fo) dFo. \quad (38)$$

Согласно начальному условию (2) температура $\vartheta_0 = 1$, а тепловой поток для полубесконечного тела изменяется по уравнению (20). После интегрирования (38) с учетом (2) и (20), получим

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 - kp\sqrt{Fo}. \quad (39)$$

Объединенное уравнение (39) очень хорошо согласуется с полученными ранее формулами (24), (28) и (26) при $k=1, 2$ и 3 соответственно.

Технологов часто интересует вопрос о времени Fo_k конца процесса нагрева. Фактически нагрев завершится при достижении нулевых значений температур в центре тела и согласно решению (14) это наступит за время $Fo = \infty$. Однако, условно можно считать временем конца нагрева достижение температурой центра конечных значений $\vartheta_{ц..к} = \varepsilon_n = 5\%$, где ε_n можно трактовать как степень недогрева центра тела. Полагая в (14) $\vartheta(Fo_k) = \varepsilon_n$ и логарифмируя, получим

$$Fo_k = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1}{\varepsilon_n}. \quad (40)$$

Средняя температура в конце нагрева согласно (13) составит величину $\vartheta_{cp}(Fo_k) = B_1 \cdot \exp(-a_1^2 \cdot Fo_k)$ или

с учетом (40): $\vartheta_{cp}(Fo_k) = B_1 \cdot \frac{\varepsilon_n}{A_1}$. (41)

Теперь данных достаточно для определения термических напряжений. Согласно [6], относительные осевые термонапряжения в любой точке

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta(X, Fo), \quad (42)$$

на поверхности (при $X=1$)

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{п} = \vartheta_{cp}(Fo), \quad (43)$$

т.к. согласно граничному условию (4) температура поверхности $\vartheta_{п} = 0$ (см. рис.3).

Термические напряжения в центральных точках тела (при $X=0$):

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{ц}(Fo) \cong \vartheta_{cp}(Fo) - 1, \quad (44)$$

так как по определению на начальной стадии при времени $Fo < Fo_1$ температура в центре ввиду тепловой инерции остается равной первоначальной, т.е. $\vartheta_{ц} \approx 1$ или можно для расчета $\vartheta_{ц}(Fo)$ использовать формулы (22), (27), (30), а в квазистационарной стадии нагрева – уравнение (14).

Окончательно размерные термические напряжения

$$\sigma(Fo) = \tilde{\sigma}(Fo) \cdot \sigma_0, \quad (45)$$

где $\sigma_0 = \beta E \Delta T_0 / (1 - \nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па; β — линейный коэффициент термического расширения, $1/K$; E — модуль упругости, Па; ν — коэффициент Пуассона.

Численный пример.

Прямая задача. Найти $\vartheta_{п}$, ϑ_{cp} , $\tilde{\sigma}_{п}$ и $\tilde{\sigma}_{ц}$ в нагреваемой сферической заготовке для двух моментов времени $Fo_{н.1} = 0,1$ и $Fo_{н.2} = 0,4$.

Рассчитаем время инерционного периода по (16) при $k=3$. $A_1 \cong 0,4(3+2) = 2$; $D_{\infty} = 3(3+2) = 15$; $\gamma_{\infty} = (1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,429})/2 = 1,324$; $\rho_{\infty} = 3/(3+4) = 0,429$
 $Fo_1 = \frac{1,324}{15} \ln \frac{2}{0,95} = 0,0657$.

Так как время $Fo_{н.1}$ близко к Fo_1 , расчеты ведем по формулам НС. Температура в центре по уравнению (27)

$$\vartheta_{ц}(Fo_{н.1}) = 1 - (1,128/\sqrt{0,1}) \exp(-1/(4 \cdot 0,1)) = 0,7072$$

или с учетом двух членов ряда (14)

$$\vartheta_{ц}(Fo_{н.1}) = A_1 e^{-a_1^2 Fo} + A_2 e^{-a_2^2 Fo} = 2(e^{-\pi^2 \cdot 0,1} - e^{-4\pi^2 \cdot 0,1}) = 0,7068$$

или по приближенной формуле (37)

$$\vartheta_{ц}(Fo_1) = 1 - K_{ц} \cdot Fo^3 = 1 - 0,05(0,1/0,0657)^3 = 0,8237.$$

Средняя температура по (26)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) = 1 + 3(Fo - p\sqrt{Fo}) = 1 + 3(0,1 - 1,128\sqrt{0,1}) = 0,2299.$$

Осевые термические напряжения на поверхности по (43)

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{н.1}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) = 0,2299$$

и в центре по (44)

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{н.1}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) - \vartheta_{ц}(Fo_{н.1}) = 0,2299 - 0,7068 = -0,4769.$$

Для второго времени.

Так как $Fo_{н.2} > 0,3$, то используем формулы в стадии РРН:
 По уравнению (14):

$$\vartheta_{п}(Fo) = A_1 \cdot e^{-a_1^2 Fo_{н.2}} = 2 \cdot e^{-\pi^2 \cdot 0,4} = 0,01428.$$

Средняя температура по (13)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) = B_1 \cdot e^{-a_1^2 Fo_{н.2}} = (6/\pi^2) \cdot e^{-\pi^2 \cdot 0,4} = 0,01173,$$

где a_1 , A_1 и B_1 взяты из табл.1.

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{н.2}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) = 0,01173.$$

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{н.2}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) - \vartheta_{п}(Fo_{н.2}) = 0,01173 - 0,01428 = -0,00255.$$

Обратная задача. Найти время, конца нагрева, когда температура центра шара достигнет значения $\vartheta_{ц,к} = 0,05$. Определить также ϑ_{cp} , $\tilde{\sigma}_{п}$, $\tilde{\sigma}_{ц}$ в найденный момент времени.

Согласно (40) время конца нагрева

$$Fo_{к} = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1}{\varepsilon_{н}} = \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{2}{0,05} = 0,3738.$$

Средняя температура по (41)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{к}) = (6/\pi^2) \cdot 0,05/2 = 0,0152.$$

Термические напряжения

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{к}) = \vartheta_{cp}(Fo_{к}) = 0,0152,$$

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{к}) = \vartheta_{cp}(Fo_{к}) - \vartheta_{п}(Fo_{к}) = 0,0152 - 0,05 = -0,0348.$$

Выводы

1. Разработана инженерная методика аналитического расчета времени инерционного периода в линейных задачах нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при граничных условиях I рода.

2. Получены достаточно простые, точные и приближенные формулы для нахождения полей температур и термических напряжений на начальной и квазистационарной стадиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа. 1967. — 600 с.
2. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. — М.: Металлургия. 1967. — 439 с.
3. Постольник Ю. С. Приближенные методы исследования в термомеханике. — К. — Донецк.: Высшая школа. 1984. — 158 с.
4. Горбунов А. Д., Уклеина С. В. Аналитический расчет процессов нагрева тел на начальной стадии // Математическое моделирование. — Днепродзержинск: ДГТУ. 2008. — № 1(18). — С.29—33.
5. Гудмэн Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. — В кн.: проблемы теплообмена. — М.: Атомиздат. — 1967. — С.41—96.
6. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математическое моделирование. — Днепродзержинск: ДГТУ. 2012. № 1(26). — С.39—45.

