

Метод точной квадратичной регуляризации для оптимального проектирования конструкций

А. И. КОСОЛАП

Украинский государственный химико-технологический университет

Рассматриваются задачи оптимального проектирования сложных механических систем. Такие задачи являются многоэкстремальными. Для нахождения глобального экстремума предлагается метод точной квадратичной регуляризации. Многочисленные эксперименты показали его преимущество над существующими методами при решении данного класса задач.

Розглядаються задачі оптимального проектування складних механічних систем. Такі задачі є багатоекстремальними. Для знаходження глобального екстремуму пропонується метод точної квадратичної регуляризації. Численні експерименти показали його перевагу над існуючими методами при розв'язку даного класу задач.

We consider the problem of optimal design of complex mechanical systems. Such problems are multiextremal. We propose a method of the exact quadratic regularization for a solution of the problems global optimization. Numerous experiments have shown its advantages over existing methods for solving this class of problems.

Введение. Математические модели проектирования механических систем и конструкций являются оптимизационными, содержат сложную структуру ограничений и большое число локальных экстремумов. Это затрудняет нахождение наилучших проектных решений, так как до настоящего времени не разработаны эффективные методы решения многоэкстремальных задач. Для их решения чаще используют методы случайного поиска, которые позволяют найти оптимальные решения только с некоторой вероятностью. Детерминированные методы поиска глобального экстремума требуют экспоненциального времени и сложные, для программной реализации. В работе будет показано, что значительный прогресс в решении проблемы поиска глобального экстремума достигнут при помощи метода точной квадратичной регуляризации.

Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим примеры оптимизационных задач в области механики.

Задача 1. Необходимо минимизировать вес пружины с параметрами, представленными на рис. 1 [1].

Оптимизационная модель этой задачи имеет вид. Найти

$$\min \{x_1^2 x_2 (x_3 + 2)\}$$

при ограничениях

$$1 - \frac{x_2^3 x_3}{71.785 x_1^4} \leq 0,$$

$$\frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12.556 x_1^3 (x_2 - x_1)} + \frac{1}{5.108 x_1^2} - 1 \leq 0,$$

$$1 - \frac{140.45 x_1}{x_3 x_2^2} \leq 0, \frac{x_1 + x_2}{1.5} - 1 \leq 0.$$

Задача 2. Минимизация веса преобразователя скорости [2]. Найти

$$\min \{0.7854 x_1 x_2^2 (3.3333 x_3^2 + 14.9334 x_3 - 43.0934) - 1.508 x_1 (x_6^2 + x_7^2) + 7.4777 (x_6^3 + x_7^3)\}$$

при ограничениях

$$\frac{27}{x_1 x_2^2 x_3} \leq 1, \frac{397.5}{x_1 x_2^2 x_3^2} \leq 1, \frac{1.93 x_4^3}{x_2 x_3 x_6^4} \leq 1, \frac{1.93 x_5^3}{x_2 x_3 x_7^4} \leq 1,$$

$$\frac{x_2 x_3}{40} \leq 1, \frac{5x_2}{x_1} \leq 1, \frac{x_1}{12x_2} \leq 1,$$

$$\frac{1.5x_6 + 1.9}{x_4} \leq 1, \frac{1.1x_7 + 1.9}{x_5} \leq 1,$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{745x_4}{x_2 x_3}\right)^2 + 16900000}}{110x_6^3} \leq 1,$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{745x_5}{x_2 x_3}\right)^2 + 157500000}}{85x_7^3} \leq 1,$$

$$2.6 \leq x_1 \leq 3.6, 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, 17 \leq x_3 \leq 28, 7.3 \leq x_4 \leq 8.3,$$

$$7.8 \leq x_5 \leq 8.3, 2.9 \leq x_6 \leq 3.9, 5.0 \leq x_7 \leq 5.5.$$

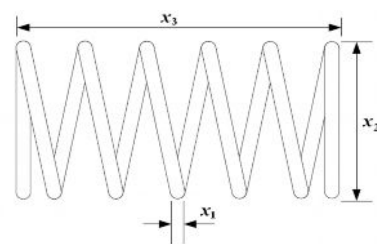


Рис. 1. Параметры пружины

Задача 3. Оптимальный проект рефрижераторной системы [2].

Найти

$$\begin{aligned} \min \{ & 63098.88x_2x_4x_{12} + 5441.5x_2^2x_{12} + \\ & + 115055.5x_2^{1.664}x_6 + 6172.27x_2^2x_6 + \\ & + 63098.88x_1x_3x_{11} + 5441.5x_1^2x_{11} + \\ & + 11055.5x_1^{1.664}x_5 + 6172.27x_1^2x_5 + \\ & + 140.53x_1x_{11} + 281.29x_3x_{11} + 70.26x_1^2 + \\ & + 281.29x_1x_3 + 281.29x_3^2 + \\ & + 14437x_8^{1.8812}x_{12}^{0.3424}x_{10}x_1^2x_7x_9^{-1}x_{14}^{-1} + \\ & + 20470.2x_7^{2.893}x_{11}^{0.316}x_1^2 \} \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} -x_7 + 1.524 &\leq 0, \\ -x_8 + 1.524 &\leq 0, \\ 0.07789x_1x_7 - 2x_9 - x_7 &\leq 0, \\ 7.05305x_1^2x_{10} - x_2x_8x_9x_{14} &\leq 0, \\ 0.08333x_{14} - x_{13} &\leq 0, \\ 47.136x_2^{0.333}x_{12}^2 - 1.333x_8x_{10}x_{12}x_{13}^{2.1195} + \\ + 62.08x_{13}^{2.1195}x_8^{0.2} - x_{10}x_{12} &\leq 0, \\ 0.04771x_{10}x_8^{1.88812}x_{12}^{0.3424} - 1 &\leq 0, \\ 0.0488x_9x_7^{1.893}x_{11}^{0.316} - 1 &\leq 0, \\ 0.0099x_1 - x_3 &\leq 0, \\ 0.0193x_2 - x_4 &\leq 0, \\ 0.0298x_1 - x_5 &\leq 0, \\ 0.056x_2 - x_6 &\leq 0, \\ -x_9 + 2 &\leq 0, \\ -x_{10} + 2 &\leq 0, \\ x_{12} - x_{11} &\leq 0, \\ 0.001 \leq x &\leq 5. \end{aligned}$$

Задача 4. Минимизация стоимости проекта трансформатора [3]. Найти

$$\begin{aligned} \min \{ & 0.0204x_1x_4(x_1 + x_2 + x_3) + 0.0187x_2x_3(x_1 + \\ & + 1.57x_2 + x_4) + 0.0607x_1x_4x_5^2(x_1 + x_2 + x_3) + \\ & + 0.0437x_2x_3x_6^2(x_1 + 1.57x_2 + x_4) \} \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1 - 0.00062x_1x_4x_5^2(x_1 + x_2 + x_3) - 0.00058x_2x_3x_6^2(x_1 + \\ + 1.57x_2 + x_4) &\geq 0, \\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6 &\geq 2.07 \times 10^3, x \geq 0. \end{aligned}$$

Приведенные примеры показывают сложную структуру задач оптимизации механических систем. Большое число задач оптимального проектирования в механике приведено в работе [3].

Таким образом, задачи оптимального проектирования механических систем могут быть представлены в виде

$$\min \{ f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n \}, \quad (1)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцированные функции, E^n – евклидово пространство. Необходимо найти точку глобального минимума в задаче (1). Допустим,

что решение задачи (1) существует в точке x^* . Для этого достаточно, чтобы функция $f_0(x)$ была непрерывна, а допустимая множество задачи (1) было компактно.

Суть метода точной квадратичной регуляризации заключается в преобразовании многоэкстремальной задачи (1) к минимизации или максимизации евклидовой нормы вектора на выпуклом множестве. Введем новую переменную x_{n+1} и сведем задачу (1) к виду

$$\min \{ x_{n+1} \mid f_0(x) + s \leq x_{n+1}, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n \}, \quad (2)$$

где значение параметра s выбираем таким, чтобы

$$f_0(x^*) + s \geq \|x^*\|^2. \quad (3)$$

Далее, используем преобразование пространства $x = Az$, где матрица A порядка $(n+1) \times (n+1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

что сводит задачу (2) к следующей

$$\min \{ \|z\|^2 \mid f_0(\bar{z}) + s \leq \|z\|^2, f_i(\bar{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m, z \in E^{n+1} \}, \quad (4)$$

где $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $z = (\bar{z}, z_{n+1})$.

Существует такое значение $r > 0$ при котором все функции

$$\begin{aligned} g_0(z) &= f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\|z\|^2, \\ g_i(z) &= f_i(\bar{z}) + r\|z\|^2, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

будут выпуклыми для допустимых значений z . Действительно, при соответствующем выборе параметра $r > 0$, гессианы функций $g_0(z)$ и $g_i(z), i = 1, \dots, m$ будут положительно определенными матрицами (матрицы с преобладающей главной диагональю). Если среди $f_i(\bar{z}), i = 1, \dots, m$ есть выпуклые функции, то эти ограничения остаются неизменными.

Таким образом, задача (4) сведена к следующей

$$\min \{ \|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i = 0, 1, \dots, m, r\|z\|^2 = d \}, \quad (5)$$

где все $g_i(z)$ – выпуклые функции.

Следовательно, задача (1) преобразована к минимизации квадрата нормы вектора z , где переменными задачи (5) есть (z, d) – $(n+2)$ -мерный вектор. Для решения задачи (5) необходимо определить значение параметра s . Если параметр s не удовлетворяет условию (3), то из решения задачи (5) можно гарантировать получение только допустимой точки задачи (1). При увеличении параметра s значение целевой функции $f_0(x)$ убывает и не меняется, если параметр s удовлетворяет условию (3). Таким образом, если при увеличении параметра s значение целевой функции $f_0(x)$ не изменилось, то найдено решение задачи (1).

Например, задача $\min \{-x_1 \mid 2 \leq x_1 \leq 4\}$ имеет решение $x_1^* = 4$ и преобразуется к виду

$$\min \{x_1^2 + x_2^2 \mid -x_1 + s + (r-1) \|x\|^2 \leq d, \\ 2 \leq x_1 \leq 4, r \|x\|^2 = d\},$$

где из условия (3) получим $s \geq 20$. Если взять $r = 2, s = 10$, то при $d^* = 14.5969$ будет найдена точка $x_1 = 2.701568$ задачи (5), которая не является решением исходной задачи (1). При $s = 20$ и $d^* = 16$ получаем решение $x_1^* = 4$ задачи (5), а если $s = 30$, то при $d^* = 72$ снова получаем решение задачи $x_1^* = 4$.

Введем обозначения

$$S_1(d) = \{z \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m\}$$

и

$$S_2(d) = \{z \mid r \|z\|^2 \leq d\}.$$

Множества $S_1(d)$ и $S_2(d)$ будут выпуклыми и определяют допустимое множество задачи (5). Справедливо следующее включение $S_1(d) \subset S_1(d + \Delta)$,

$S_2(d) \subset S_2(d + \Delta)$ для любого $\Delta > 0$. Анализ расположения этих множеств в пространстве E^n позволяет разбить исходную задачу (1) на два класса сложности. Задачи первого класса преобразуются к минимизации, в второго – к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве.

Пусть d_0 – минимальное значение d , для которого множество $S_1(d_0) \neq \emptyset$. Нахождение d_0 равнозначно решению выпуклой задачи

$$\min \{d \mid g_i(x) \leq d, i = 0, \dots, m\}.$$

Найдем $d_m = \max \{0, d_0\}$.

Покажем, что сложность решения задачи (5) зависит от взаимного расположения множеств $S_1(d_m)$ и $S_2(d_m)$ в пространстве E^n . Это расположение позволяет разбить многоэкстремальные задачи на два класса сложности.

1. Если $S_1(d_m) \cap \text{int } S_2(d_m) = \emptyset$ или $S_1(0) \neq \emptyset$, то задача (5) эквивалентна выпуклой задаче

$$\min \{d \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m, r \|z\|^2 \leq d\}, \quad (6)$$

которая эффективно решается методом локальной оптимизации, например, прямо-двойственным методом внутренней точки [5]. Если (z^*, d^*) – решение задачи (6), то $x^* = \bar{z}^*$ – точка глобального минимума задачи (1) (при выполнении условия $S_1(0) \neq \emptyset$ решение задачи (1) – тривиально $x^* = 0$). Решение задачи (6) эквивалентно нахождению точки соприкосновения двух выпуклых множеств при минимальном значении d . Очевидно, что точка соприкосновения будет допустимой для задачи (5) и в этой точке достигается минимальное значение $\|z\|^2$.

2. Если $S_1(d_m) \cap \text{int } S_2(d_m) \neq \emptyset$, то задача (5) эквивалентна задаче максимизации квадрата нормы вектора

$$\max \{\|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i = 0, \dots, m, r \|z\|^2 = d\}. \quad (7)$$

В этой задаче необходимо найти минимальное значение d , при котором множество $S_1(d)$ касается границы множества $S_2(d)$ изнутри. При меньших значениях d допустимое множество задачи (5) будет пустым.

Таким образом, если в точке локального минимума (z^*, d^*) задачи (6) $r \|z^*\|^2 = d^*$, то соответствующая задача (1) относится к первому классу сложности, иначе – ко второму. Например, многоэкстремальная задача

$$\min \{-\|x - 0.25\|^2 \mid x \in [-0.5, 0.5]^n\}$$

(содержит 2^n локальных минимумов) преобразуется к виду

$$\max \{\|x\|^2 \mid \|x + 0.25\|^2 + 2x_{n+1}^2 + s - 0.125n \leq d, x \in [-0.5, 0.5]^n\},$$

которая становится одноэкстремальной и может быть решена любым локальным методом.

Преобразуем задачу глобальной оптимизации (1) так, чтобы ее переменные $x \geq 0$. Если для переменных задачи (1) заданы двухсторонними ограничения $a_i \leq x_i \leq b_i$, то замена $x_i = x_i - a_i$ переводит поиск глобального минимума в положительный ортант. Можно представить переменные в виде разности двух положительных переменных $x_i = x_i^+ - x_i^-$, где $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$. После выполнения вышеуказанных преобразований, задача (7) имеет вид

$$\max \{\|x\|^2 \mid g_i(x) \leq d, i = 0, \dots, m, x \geq 0, r \|x\|^2 = d\}. \quad (8)$$

Задачу (8) будем решать следующим образом. Фиксируем значение переменной d и находим решение x^* задачи

$$\max \{\|x\|^2 \mid g_i(x) \leq d, i = 0, \dots, m, x \geq 0\}. \quad (9)$$

Если $r \|x^*\|^2 = d^*$, то задача (8) решена и x^* – ее решение, иначе, найдем отрезок $[d_{\min}, d_{\max}]$ для переменной d . Достаточно взять $d_{\min} = d_m$, а d_{\max} определить, решая последовательность задач (9) методом локальной максимизации для $d = d_m + kh$, где h – величина шага, $k = 1, \dots$. Пусть k_0 – минимальное значение, при котором

$r \|x\|^2 > d_m + k_0 h$. Тогда d_{\max} находим на интервале $[d_m + (k_0 - 1)h, d_m + k_0 h]$ методом дихотомии, решая

задачу (9) до достижения равенства $r \|x\|^2 = d_{\max}$. В общем случае, найденное решение может быть точкой локального минимума, тогда увеличение параметра r позволяет уменьшить значение целевой функции $f_0(x)$. Действительно, первое ограничение задачи (9) является активным в точке максимума

$$f_0(x) + s + (r-1) \|x\|^2 = d$$

и при увеличении параметра r будет нарушено. Тогда локальный поиск восстановит это ограничение посредством уменьшения $f_0(x)$, учитывая, что слагаемое $\|x\|^2$ максимизируется.

Заметим, что при увеличении параметра r допустимая область задачи (9) стремится к пересечению шаров. Тогда задача (9) эффективно решается двойственным методом [6].

Численные эксперименты. С помощью метода точной квадратичной регуляризации было решено много известных тестовых задач, в которых найдены точки глобальных минимумов [7]. Приведем решения рассмотренных выше задач. В задаче 1 найдено $f(x^*) = 0.012665$ в точке $x^* = (0.051688332, 0.35670021, 11.28999353)$, что совпало с лучшим значением глобального минимума, найденного другими методами $f(x^*) = 0.012665$. В задаче 2 найдено $f(x^*) = 2996.347$ в точке $x^* = (3.5, 0.7, 17, 7.3, 7.8, 3.3502147, 5.28668164)$, что также совпало с глобальным минимумом, найденным другими методами. В задаче 3 найдено $f(x^*) = 0.0311596$ в точке $x^* = (0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 1.524, 1.524, 5, 2, 0.001, 0.001, 0.007294, 0.087531)$, что лучше значения, найденного другими методами $f(x^*) = 0.057406$. Наконец, в задаче 4 - $f(x^*) = 135.075963$ в точке $x^* = (5.332809, 4.656604, 10.43367, 12.08154, 0.752611, 0.878648)$, что практически совпадает со значением глобального минимума, найденного другими методами $f(x^*) = 135.075961$.

Выводы

Разработан новый метод точной квадратичной регуляризации, позволяющий находить глобальные экстремумы в многоэкстремальных задачах механики. Численные эксперименты подтвердили его эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Coello C. A. Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems / C. A. Coello // *Computers in Industry*. — 2000. — № 41(2). — P. 113—127.
2. Pant M. Optimization of Mechanical Design Problems Using Improved Differential Evolution Algorithm / M. Pant, R. Thangaraj, V. P. Singh // *Int. journal of recent trends in Engineering*. — 2009. vol. 1, № 5. — P. 21—25.
3. B-Biggs M. C. A Numerical Comparison between Two Approaches to the Nonlinear Programming Problem / In : L. C. W. Dixon and G. P. Szego, eds., *Towards Global Optimization 2*. — Amsterdam, Holland : North Holland Publishing Company, 1978. — P. 293 — 312.
4. Arora J. S. Introduction to Optimum Design / J. S. Arora. — New York : Elsevier Academic Press. — 2004. — 751 p.
5. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. — Springer, 2006. — 685 p.
6. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А.И. Косолап. — Дн-ск : Наука и образование, 2013. — 316 с.
7. Floudas C. A. A collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms / C. A. Floudas, P. M. Pardalos. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1990. — 193 p.