10. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Пер. с англ. — М. : Наука, 1986. — 232 с.

пост.06.06.13

МЕТОД ТОЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ З ВАЖЕЛЕМ, ЩО КАЧАЄТЬСЯ

А. О. ЛИГУН, О. О. ШУМЕЙКО, С. В. ТИМЧЕНКО, Д. С. ДОСІЙ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Отримано точне рішення задач аналізу та синтезу для кулачкових механізмів з важелем, що качається. Рішення надано у вигляді явних формул, що дозволяє ефективно проводити дослідження багатьох характеристик кулачкових механізмів.

Получено точное решение задач анализа и синтеза для кулачковых механизмов с качающимся рычагом. Решение дано в виде явных формул, позволяющих эффективно исследовать многие характеристики кулачковых механизмов.

The exact solution of the problems of analysis and synthesis for cam mechanisms with oscillating arm. The solution is given in the form of explicit formulas that effectively explore the many features of the cam mechanisms.

Вступ. Кулачкові механізми відіграють важливу роль у сучасному машинобудуванні. Існують як геометричні, так і аналітичні методи проектування клачков, однак всі вони носять імперічний характер, і в найкращому випадку, дають лише наближений опис контуру кулачка. У зв'язку із становленням нанотехнологій актуальним стає питання точного аналітичного представлення форми кулачка. В даній роботі розглянуто задачу визначення аналітичного представлення контура кулачка з важелем, що качається.

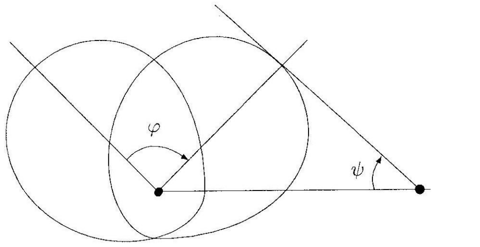

Рис. 1

Формулювання цілей статті. Кожен опуклий кулачок з профілем кулачкової шайби $\Gamma(t)$ породжує рух штовхача $\theta(\Gamma,\varphi)$ (рис. 1). В подальшому ми покажемо, що для будь-якого контура $\Gamma(t)$ виконується умова $\theta(\Gamma,\varphi)+\theta''(\Gamma,\varphi)>0$. І навпаки, кожна функція руху штовхача $\theta(\varphi)$, така що

$$\theta(\varphi)+\theta''(\varphi)>0 \tag{1}$$

породжує опуклу криву $\Gamma(\theta,t)$. Задачу побудови функції $\theta(\Gamma,\varphi)$ по заданому профілю $\Gamma(t)$ називають задачею аналіза [1].

Задача синтезу кулачкових механізмів полягає в тому, що для заданої функції $\theta(\varphi)$ необхідно побудувати опуклий контур $\Gamma(\theta,t)$ такий, що

$$\theta(\Gamma(\theta),\varphi)=\theta(\varphi)$$

та визначити нобхідні та достатні умови на функцію $\theta(\varphi)$, для того, щоб ця задача мала рішення.

Основна частина. Множину *G* будемо називати строго опуклою, якщо разом з двома будь-якими своїми точками вона містить і відрізок, який їх з'єднує. Контур (лінія) називається опуклою, якщо він замкнений, без само перетинів і фігура, яку він обмежує, є опуклою [2]. Зрозуміло, що якщо контур $\Gamma(t)$ довільний, а $\Gamma^*(t)$ його опукла одолонка, то $\theta(\Gamma,\varphi)=\theta(\Gamma^*,\varphi)$, тому для кулачків з плоским штовхачем достатньо розглянути кулачки тільки з опуклим профілем, в іншому випадку роль профіля буде виконувати опукла оболонка кулачка. Якщо крива гладка, то умова опуклості еквівалентна тому, що кривина на змінює знак.

Розглянемо спочатку задачу сінтеза.

Теорема 1. Нехай 2π - періодична функція $\theta(t)$ має неперервну другу похідну і для всіх $t\in[0;2\pi]$ виконується умова (1), тоді профіль $\Gamma(\theta,t)$ кулачка, який породжує функція $\theta(t)$, буде описуватися параметричними рівняннями:

$$\Gamma(\theta,t):\ \begin{cases} x(t)=\theta(t)\sin t+\theta'(t)\cos t, \\ y(t)=-\theta(t)\cos t+\theta'(t)\sin t. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Повернемо профіль $\Gamma(\theta,t)$ на кут φ навколо вісі обертання кулачка. Після цього перетворення рівняння профілю буде мати вигляд

$$\Gamma_\varphi(\theta,t)=\left(x_\varphi(t),\,y_\varphi(t)\right),$$

де

$$x_\varphi(t) = x(t)\cos\varphi + y(t)\sin\varphi =$$

$$= \left(\theta(t)\sin t + \theta'(t)\cos t\right)\cdot\cos\varphi +$$

$$+\left(-\theta(t)\cos t + \theta'(t)\sin t\right)\cdot\sin\varphi ,$$

$$y_\varphi(t) = x(t)\sin\varphi - y(t)\cos\varphi =$$

$$= \left(\theta(t)\sin t + \theta'(t)\cos t\right)\cdot\sin\varphi -$$

$$-\left(-\theta(t)\cos t + \theta'(t)\sin t\right)\cdot\cos\varphi ,$$

Зрозуміло [3], що

$$\theta(\Gamma(\theta),\varphi) = y_\varphi(t_0) = \max_{t\in[0;\,2\pi]} y_\varphi(t) .$$

В силу того, що крива $\Gamma(\theta,t)$ опукла, то відповідне значення параметру t_0 визначається з умови

$$\frac{dy_\varphi(t)}{dt} = 0 ,$$

тобто

$$x'(\varphi)\sin\varphi - y'(\varphi)\cos\varphi = \left(\theta(t) + \theta''(t)\right)\sin(\varphi - t) = 0 .$$

Звідси та з умови (1) одразу отримуємо, що найближче значення параметру $t_0 = \varphi$. Таким чином, отримуємо

$$\theta(\Gamma(\theta),\varphi) = y_\varphi(t_0) = x(\varphi)\sin\varphi - y(\varphi)\cos\varphi =$$

$$= \left(\theta(\varphi)\sin\varphi + \theta'(\varphi)\cos\varphi\right)\sin\varphi -$$

$$-\left(-\theta(\varphi)\cos\varphi + \theta'(\varphi)\sin\varphi\right)\cos\varphi = \theta(\varphi) .$$

Тим самим ми показали, що кулачок (2) породжує дану функцію $\theta(\varphi)$.

Далі покажемо, що крива (2) обмежує опуклу фігуру. Для доведення цього факту достатньо показати, що кривина кривої (2) не змінює знак на проміжку $[0; 2\pi]$.

Обчислимо значення похідних:

$$x'(t) = \left(\theta(t) + \theta''(t)\right)\cdot\cos t ,$$

$$x''(t) = \left(\theta'(t) + \theta'''(t)\right)\cos t - \left(\theta(t) + \theta''(t)\right)\sin t ,$$

$$y'(t) = \left(\theta(t) + \theta''(t)\right)\cdot\sin t ,$$

$$y''(t) = \left(\theta'(t) + \theta'''(t)\right)\sin t + \left(\theta(t) + \theta''(t)\right)\cos t .$$

Підставляємо отримані значення похідних у формули визначення кривини кривої. Виконуючи перетворення, отримуємо значення кривини

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\theta(t) + \theta''(t)} .$$

Таким чином, в силу неперервності $\theta''(t)$ і умови (1) отримуємо, що кривина не обертається в нуль при будь-яких значеннях *t*, отже контур (2) є опуклим, що і треба було довести.

Далі розглянемо задачу аналізу. Нехай рівняння профілю кулачка задано в параметричній формі

$$\Gamma(t) = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де $x(t)$ і $y(t)$ є 2π - періодичні двічі неперервно диференційовані функції. Після повороту кривої $\Gamma(t)$ на кут φ, рівняння контуру набуває вигляду

$$\Gamma_\varphi(t) = \begin{cases} x_\varphi(t) = x(t)\sin t + y(t)\cos t, \\ y_\varphi(t) = -y(t)\cos t + x(t)\sin t. \end{cases}$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $\Gamma_\varphi(t)$ в точці t_0 дорівнює

$$k(\Gamma_\varphi, t_0) = \frac{y'_\varphi(t_0)}{x'_\varphi(t_0)} ,$$

де похідна береться за змінною *t*. Оскільки профіль кулачка гладкий і опуклий, та на періоді існує лише дві точки τ_1 і τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) в яких кутовий коефіцієнт дорівнює нулю $k(\Gamma_\varphi, t_0) = 0$ і лише дві точки ξ_1 і ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) в яких це значення не існує. Перша пара точок відповідає прямим паралельним осі *OX*. В цих точках $y_\varphi(t)$ набуває екстремального значення. Друга пара відповідає вертикальним дотичним. Зауважимо, що ці значення параметру впорядковані

$$\xi_1 < \tau_1 < \xi_2 < \tau_2 < \xi_1 + 2\pi .$$

Зрозуміло, що $t = \tau_1$ є розв'язком рівняння

$$y'_\varphi(t) = x'(t)\sin\varphi - y'(t)\cos\varphi = 0 \qquad (3)$$

на проміжку $[\xi_1; \xi_2]$, а $t = \tau_2$ є розв'язком цього рівняння на проміжку $[\xi_2; \xi_1 + 2\pi]$.

Введемо у розгляд функцію

$$F(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

Дана функція є 2π - періодичною і на кожному з інтервалів $(\xi_1; \xi_2)$ і $(\xi_2; \xi_1 + 2\pi)$ строго монотонна. Таким чином, якщо F^{-1} є функцією, оберненою до заданої F , то на кожному з інтервалів $(\xi_1; \xi_2)$ і $(\xi_2; \xi_1 + 2\pi)$ вона існує і є єдиною. З умови (3) отримуємо

$$F(\tau_1) = tg\varphi .$$

Таким чином,

$$\tau_1 = F^{-1}(tg\varphi)$$

і, відповідно

$$\theta(\Gamma,\varphi) = y_\varphi(\tau_1) = x(\tau_1)\sin\varphi - y(\tau_1)\cos\varphi =$$

$$= x(F^{-1}(tg\varphi))\sin\varphi - y(F^{-1}(tg\varphi))\cos\varphi . \qquad (4)$$

Отже, ми отримали явну формулу, що описує рух штовхача для кулачка з профілем $\Gamma(t)$.

Зауваження 1. При виводі формули (4) ми ввели нову параметризацію. Можна показати, що якщо крива $\Gamma(t)$ має параметр, значення якого співпадає з кутом нахилу нормалі $\Gamma(t)$ до вісі *OX*, от рівняння $\theta(\Gamma,\varphi)$ буде мати більш простий вигляд

$$\theta(\Gamma,\varphi) = x(\varphi)\sin\varphi - y(\varphi)\cos\varphi .$$

Наслідок 2. Нехай Q множина усіх 2π - періодичних функцій $\theta(t)$, які мають неперервну другу похідну і для яких виконується умова (1) і таких, що $0 < a \le \theta(t) \le b$. Тоді серед усіх кулачков, які породжує функція $\theta \in Q$, найбільшу із найменших кривин має профіль, який описується параметричними рівняннями:

$$\Gamma^0(t) = \left(\frac{a+b}{2}\cos t, \frac{a+b}{2}\sin t + \frac{b-a}{2}\right), \quad t \in [0; 2\pi] .$$

Висновки

В даній роботі отримано точне рішення задач аналізу та синтезу для кулачкових механізмів з важелем, що качається. Визначено аналітичне представлення контуру кулачка з важелем, що качається.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин: [Учеб. для втузов. — 4-е изд., перераб. и доп.] — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 640 с.
2. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: Учеб. пособие. — М. : Наука, Физматлит., 1990. — 672 с.
3. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. К. : Издательство института матем. НАН Украины, 1997. — 358 с.

пост.10.06.13