

# МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ



## Моделювання слабо формалізованих динамічних систем в $n$ -вимірному фазовому просторі

О. М. НАЗАРЕНКО, Д. Л. КОСТЮКЕВИЧ

Сумський державний університет

Розглядаються лінійні стаціонарні моделі слабо формалізованих систем, для яких відома статистична інформація за фазовими координатами і керуваннями. Розроблена методика параметричної ідентифікації, яка базується на декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові. Апробація методів проведена на реальних макроекономічних системах.

Рассматриваются линейные стационарные модели слабо формализованных систем, для которых известна статистическая информация по фазовым координатам и управлениям. Разработана методика параметрической идентификации, которая базируется на декомпозиции траекторий движения фазовых координат на составляющие. Апробация методов проведена на реальных макроекономических системах.

The paper is devoted to linear stationary model of weakly formalized systems for which statistical information on the phase coordinates and control is known. The method of parametric identification based on decomposition of phase trajectories on coordinate components has been elaborated. Testing methods has been performed on real macroeconomic systems.

**Вступ.** Сучасний системний аналіз вивчає властивості реальних систем за допомогою їх математичних абстракцій – динамічних моделей у вигляді системи диференціальних рівнянь. Однак при практичних дослідженнях розв’язанню прямої задачі, як правило, передує розв’язання оберненої задачі, яка відновлює закон руху динамічної системи за даними спостережень [1].

Математична постановка оберненої задачі наступна. Нехай в  $N$  цілочисельних точках відрізка  $[1, M]$  із відрізка  $[1, M]$  є статистична інформація  $\{ \mathbf{x}_t \}$  про динаміку вектора  $\mathbf{x} \in E^n$  фазових координат і  $\{ \mathbf{u}_t \}$  про динаміку вектора  $\mathbf{u} \in E^m$  змінних керування. Необхідно побудувати закон руху у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) | \boldsymbol{\theta}), \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_* \quad (1)$$

де  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор невідомих коефіцієнтів, що підлягають оцінюванню. Граничне значення  $\mathbf{x}_*$  задається в деякій точці  $t_* \in [1, M]$  і часто вважається додатковим невідомим вектором [2]. Специфікація вектор-функції  $\mathbf{f}$  може бути як апостеріорною (якщо фізика процесу або попередній аналіз даних вказують на конкретний вигляд функціональної форми) [3], так і апіорною (для слабо формалізованих систем) [4].

Якщо метою нашого дослідження є прогнозування майбутніх станів системи, то в якості  $t_*$  зручно вибрати момент часу  $t_* = N + 1$ . Тоді ідентифікація моделі (1) проводиться на відрізку  $[1, M]$ , а прогнозування – на  $[N+1, M]$ . Виконання граничної

умови  $\mathbf{x}(N+1) = \mathbf{x}_*$  у випадку ідентифікованої задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості моделі на відрізку  $[1, N+1]$  і встановлювати прогнозні властивості на відрізку  $[N+1, M]$ .

Головною проблемою параметричної ідентифікації моделі (1) є чутливість розв’язків до малих змін вхідної інформації. По цій причині обернені задачі динаміки відносять до класу некоректно поставлених задач. Якщо невідомі параметри моделі (1) оцінюються методом найменших квадратів (МНК), то показником чутливості отриманих МНК-оцінок до незначних змін вхідної інформації  $\mathbf{q}_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)'$  прийнято вважати індекс обумовленості СІ інформаційних матриць відповідних рівнянь регресії [5].

У даній роботі розглядається лінійна стаціонарна модель, досліджена в [6] у випадку тривимірного простору ( $m=n=3$ ).

**Постановка задачі.** Нехай стан динамічної системи в будь-який момент неперервного часу  $t \in [1, M]$  характеризується фазовим вектором-стовпцем  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ , а вхід системи – вектором-стовпцем керувань  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))'$ . Рівняння руху динамічної системи будемо подавати системою лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = P\mathbf{x}(t) + Q\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_* \quad (2)$$

Тут  $P$  і  $Q$  – квадратні матриці зі сталими коефіцієнтами, причому  $Q$  – невироджена матриця;  $t_*$  – точка відрізка

[1,  $M$ ], у якій задається граничний стан. При перевірці імітаційних і прогнозних властивостей моделі (2) будемо покладати  $t_* = N + 1$ .

Метою нашого дослідження є знаходження такого неперервного керування  $\mathbf{u}(t)$  і параметрів моделі (2), щоб при переведенні системи із деякого початкового стану  $\mathbf{x}_0$  в момент часу  $t_0 = 1$  в кінцеву бажану точку  $\mathbf{x}_*$  в момент часу  $t_* = N + 1$  модельні траєкторії фазових координат  $\mathbf{x}$  і керувань  $\mathbf{u}$  мали наступні властивості:

а) співвідношення  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$  і  $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}_t$  виконуються з високою точністю в цілочисельних точках відрізка  $[1, N]$  в сенсі евклідової  $L^2$  – норми [5];

б) довірчі інтервали прогнозів фазового вектора  $\mathbf{x}$  і керування  $\mathbf{u}$  мають мінімальну довжину [7];

в) оцінки невідомих параметрів як можна менш чутливі до незначних змін вхідної інформації  $\mathbf{q}_t$  [8];

г) елементи матриць  $P$  і  $Q$  або деяких інших матриць, зв'язаних з ними, можуть задовольняти деяким обмеженням-нерівностям як, наприклад, в моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу [9].

**Метод розв'язання.** У багатьох випадках слабо формалізованим динамічним процесам властива циклічність. Тут фази підйому змінюються фазами спаду, після чого спостерігається зростання і т. д. Якщо виходити з довгострокової тенденції розвитку даної системи, то вона подається прямолінійним трендом з додатним або від'ємним нахилом. Тоді цикли можна розглядати як коливання динамічних систем та їх складових навколо відповідних трендів. Моделювання циклів потребує досить тривалого періоду функціонування досліджуваної системи, протягом якого повинні стабілізуватись взаємозв'язки між її окремими елементами. Циклічність розвитку такої системи обумовлена тим, що в ній розповсюджуються гармонічні хвилі. Основна задача, яка тут виникає, полягає у визначенні значущих гармонік, які суттєво впливають на траєкторії руху фазових координат. Між загальною кількістю значущих гармонік і числом фазових координат, за допомогою яких можна описувати дану динамічну систему, встановлюється взаємно-однозначний зв'язок. Тому розмірність  $n$  фазового простору заздалегідь невідома і повинна визначатись в процесі виявлення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної динамічної системи.

Логічно припустити, що прямолінійні тренди  $\mathbf{x}^*(t)$  фазових координат  $\mathbf{x}(t)$  проходять через відповідні центри розсіювання  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$  статистичної інформації  $\{\mathbf{x}_t\}$  на відрізку  $[1, N]$ . Тоді трендову складову фазового вектора будемо подавати у вигляді

$$\mathbf{x}^*(t) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(t - \bar{t}). \quad (3)$$

Тут вектор середніх значень  $\bar{\mathbf{e}}$  залишків  $\mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*(t)$  на відрізку  $[1, N]$  дорівнює нулю ( $\bar{\mathbf{e}} = 0$ ) і, отже, залишки можна інтерпретувати як коливання навколо відповідних прямолінійних трендів.

Розкладемо залишки в дискретний ряд Фур'є:

$$\mathbf{e}_t = \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

де частоти, на які можуть налаштуватися гармонічні коливання, належать спектру  $\{\omega_k = 2\pi k / N, k = 1, 2, \dots\}$ ;  $\mathbf{v}_t$  – випадкові збурення.

При встановленні оптимальної кількості фазових координат в моделі (2) була висунута наступна гіпотеза: тренд, що визначає тенденцію розвитку окремої фазової координати, і гармоніки, які відповідають цій координаті, корелюють між собою. Практичні дослідження [6] підтверджують адекватність сформульованої гіпотези. Це означає, що оцінювання невідомих параметрів моделей (3) і (4) необхідно проводити сумісно в рамках лінійної регресійної моделі

$$\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t) + \mathbf{v}_t. \quad (5)$$

МНК-оцінювання моделі (5) при заданих рівні значущості  $\alpha$  і числу ступенів вільності  $r$  дозволяє провести рафінування (відкидання незначущих МНК-оцінок) цієї моделі за критерієм Стюдента [7] і таким чином встановити значущі гармоніки для кожної фазової координати. Очевидно, якщо загальна кількість значущих гармонік в (5) дорівнює  $n-1$ , то розмірність фазового простору повинна дорівнювати  $n$ .

Обчислення МНК-оцінок моделі (5) дає:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \{(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(t + \sum_k (ctg \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t))\}}{\frac{N^2-1}{6} - \sum_k \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega_k}{2}}}, \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \cos \omega_k t - \hat{\mathbf{b}}, \quad \hat{\mathbf{b}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \sin \omega_k t + \hat{\mathbf{b}} ctg \frac{\omega_k}{2}.$$

Як бачимо, тренд кожної фазової координати залежить від частот, на які налаштовані гармонічні хвилі, що їй відповідають. І, навпаки, на гармоніки, що характеризують кожну фазову координату, впливає тренд навколо якого вони коливаються. Кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо фазова координата швидко реагує на якісні зміни у досліджуваній динамічній системі, то їй відповідатиме максимальне число, тобто  $n-1$  гармонік. Мінімальне число гармонік буде у розкладі тих фазових координат, які слабо реагують на зміни в інших елементах системи. Відзначимо, що загальна кількість значущих гармонік в (6) суттєво залежить від рівня значущості  $\alpha$ . Вона зменшується зі зменшенням величини  $\alpha$  [7]. Як наслідок, між меншим числом фазових координат можна встановити значущі взаємозв'язки, які повинні визначати тенденцію розвитку даної системи і формувати циклічні процеси, що відбуваються в ній. Тому проблема специфікації фазових координат є особливо важливою при моделюванні стаціонарних динамічних систем.

Припустимо, що при фіксованому значенні рівня значущості  $\alpha$  нам вдалось зробити оптимальний вибір фазових координат і забезпечити високі імітаційні та прогнозні властивості регресійної моделі (6). Переходимо до параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі (2).

У багатьох випадках диференціальне рівняння (2) отримується, виходячи з розкладу фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  на складові фізичного змісту. Наприклад, в моделі міжгалузевого балансу макроекономічних систем [9]

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t). \quad (7)$$

Звідси знаходимо

$$\mathbf{u}(t) = R\mathbf{x}(t) - B\dot{\mathbf{x}}(t), \quad R = E - A. \quad (8)$$

Порівнюючи рівняння (2) і (8), виражаємо матриці  $P$  і  $Q$  через матриці  $R$  і  $B$ :

$$P = -B^{-1}R, \quad Q = -B^{-1}. \quad (9)$$

Параметрична ідентифікація регресійної моделі (5) дозволила нам знайти оптимальні значення МНК-оцінок (6), і траєкторії фазових координат описуються формулами:

$$\mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos \omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin \omega_k t). \quad (10)$$

Тепер, враховуючи (8), для ідентифікації вектора керувань  $\mathbf{u}(t)$  складаємо регресійну модель

$$\mathbf{u}_t = R\mathbf{x}(t) - B\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{r}_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

де  $\mathbf{r}_t$  – випадкові збурення.

Значимо, що оскільки регресійна модель (11) не має вільного члена, то у загальному випадку для неї не будуть виконуватися умови Гауса-Маркова для класичних регресій [7]. Зробимо так, щоб середні всіх регресорів і регресанда дорівнювали нулю. Умови Гауса-Маркова для таких регресій без вільного члена виконуються. Тому регресійну модель (11) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{u}_t - \bar{\mathbf{u}} = R(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - B(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}}) + \mathbf{r}_t. \quad (12)$$

Лінійна модель (12) оцінюється звичайним МНК, якщо на елементи матриць  $A$  і  $B$  (8) не накладаються обмеження-нерівності. У випадку лінійних обмежень-нерівностей вигляду

$$\alpha_1 < a_{ij} < \alpha_2, \quad \beta_1 < b_{ij} < \beta_2 \quad (13)$$

задача мінімізації суми квадратів відхилень регресійної моделі (12) за допомогою теореми Куна-Такера зводиться до задачі лінійного програмування, яка розв'язується методом множників Лагранжа [10].

**Практична реалізація алгоритму.** Модель (7) можна розглядати як задачу мультикритеріальної параметричної ідентифікації моделі Леонт'єва динамічного міжгалузевого балансу [9]. Для цього розділимо макроекономічну систему на  $n$  секторів. Тоді координати фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  моделі є валові випуски продукції кожного сектора, а координати керування  $\mathbf{u}(t)$  – кінцеві споживчі витрати на продукцію відповідної галузі. В якості макроекономічної системи вибрана Франція. Чисельний експеримент дозволив встановити оптимальне значення об'єму вибірки  $N=50$ : 1960-2009 – період ідентифікації, 2010-2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності  $n$  фазового простору від рівня значущості  $\alpha$  показує, що при  $\alpha=0,05$  економіку Франції необхідно ділити на 17 секторів, при  $\alpha=0,01$  – на 10, а при  $\alpha=0,005$  – на 5 секторів. Розглянемо п'ятисекторну макроекономічну систему: промисловість і сільське господарство; будівництво і транспорт; фінансовий сектор і нерухомість; комунікації і наука; сфера послуг (освіта, медицина тощо). Для статистичних даних у цілочисельних точках  $t=1, 2, \dots, N$  періоду ідентифікації виконуються балансові рівняння:

$$\sum_{m=1}^n x_{tm} = x_t, \quad \sum_{m=1}^n u_{tm} = u_t,$$

де  $\{x_{tm}\}$  і  $\{u_{tm}\}$  – випуск і невиробниче споживання  $m$ -го сектора,  $\{x_t\}$  і  $\{u_t\}$  – випуск і невиробниче споживання всієї системи (в момент часу  $t$ ).

Розкладання часового ряду  $\{x_t\}$  на періоді ідентифікації ( $t=1, 2, \dots, 50$ ) на трендову і періодичну складові підтверджує наявність у даній динамічній системі у випадку  $\alpha=0,005$  чотирьох значущих гармонік ( $k=1, 3, 4, 6$ ). Отже,  $n=5$  і наступним кроком є розкладання часових рядів випусків п'яти вказаних секторів на трендову і періодичну складові згідно (5). Коефіцієнти детермінації  $R^2$  трендів, навколо яких відбуваються коливання в цих секторах, подані в табл. 1.

Таблиця 1. Коефіцієнти детермінації трендів

№ с-ра	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,770	0,862	0,766	0,841	0,889	0,829

Переходимо до аналізу гармонічних коливань, які властиві обраним секторам. Можна показати некорельованість гармонік за умови, що частоти коливань належать спектру  $\{\omega_k = 2\pi k / N, k = 1, 2, \dots\}$ . Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектора ( $m = \overline{1, n}$ ) обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації

$$R_{km}^2 = \frac{N(a_{km}^2 + b_{km}^2)}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_{tm}^2}, \quad \varepsilon_{tm} = x_{tm} - \bar{x}_m - \hat{b}_m(t - \bar{t}),$$

значення яких наведені в табл. 2.

Таблиця 2. Вклад гармонік в коливальний процес

№ сектора	1	3	4	6	$\Sigma$
1	0,918	0,037	–	–	0,955
2	0,821	0,106	–	–	0,927
3	0,725	0,135	0,393	0,035	0,935
4	0,680	0,108	0,099	0,021	0,916
5	0,881	0,044	0,009	–	0,934
$\Sigma$	0,785	0,086	0,044	0,032	0,947

Сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань випусків секторів становить від 91,6 % (4-й сектор) до 95,5 % (1-й сектор). Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків приводяться в табл. 3.

Таблиця 3. Якість модельних траєкторій випусків

№ с-ра	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$R^2$	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,98

Аналіз отриманих результатів свідчить про високу якість апроксимаційних властивостей моделей випусків секторів і відповідних моделей коливань в цих секторах. На рис.1 приведені графіки фазових траєкторій і траєкторій коливань, які відповідають четвертому (комунікації і наука) і п'ятому (сфера послуг) секторах та макроекономічній системі вцілому

( $x(t) = \sum_{m=1}^n x_m(t)$ ). Тут точками зображена статистична

інформація, а суцільною лінією – траєкторії руху ( всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковій точці ). Порівняння прогностичних значень з реальними даними ( дві останні точки ) свідчить про високоточні прогностичні властивості моделі (5).

Якщо отримані якісні імітаційні та прогностичні властивості фазових траєкторій, то можна тепер оцінювати регресійну модель (12). Параметрична ідентифікація матриць  $R$  і  $B$  проводилась при наступних обмеженнях-нерівностях на елементи матриць  $A$  і  $B$ :

$$0,005 < a_{ij} < 0,95, \quad 0,005 < b_{ij} < 0,150, \quad i, j = 1, 5.$$

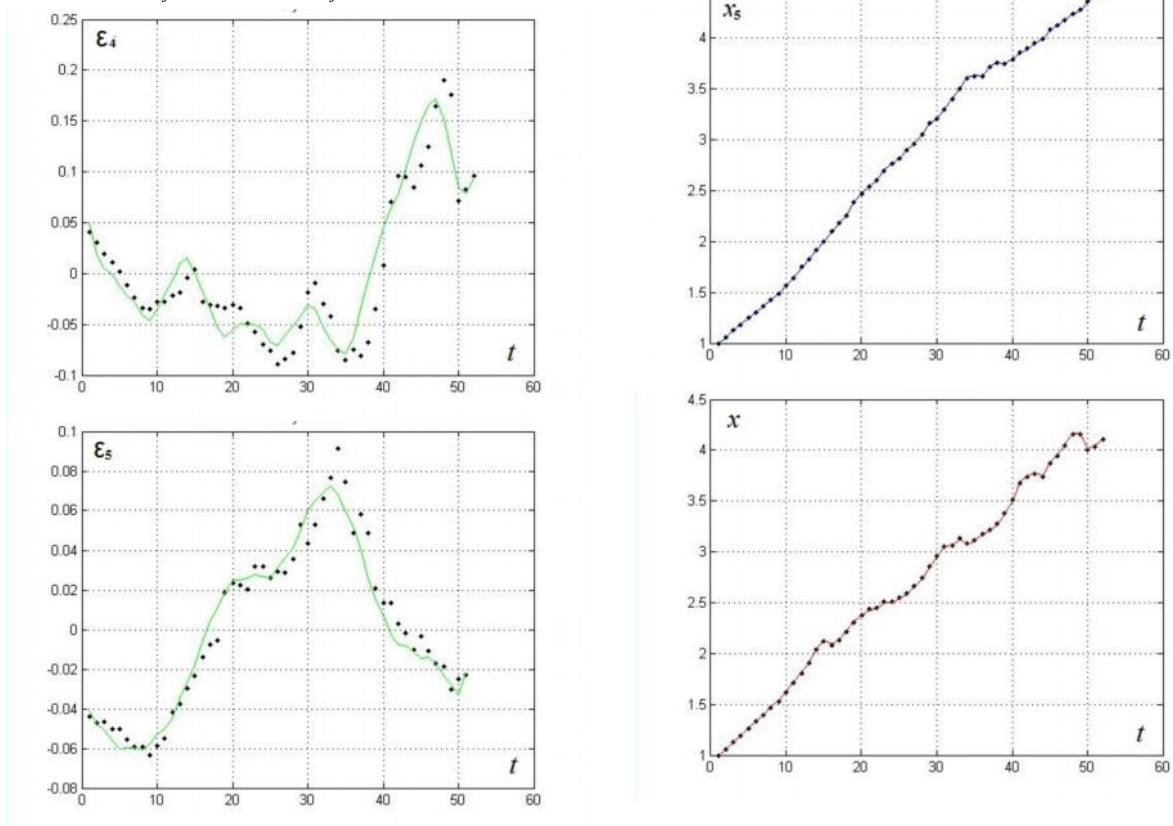


Рис. 1. Реальні та модельні значення випусків і відповідних коливань

В табл. 4 подані результати оцінювання матриць  $A$  і  $B$ .

Таблиця 4. МНК-оцінки елементів матриць  $A$  і  $B$ 

 а) матриця  $A$ 

0,242	0,214	0,055	0,336	0,269
0,091	0,041	0,181	0,293	0,212
0,290	0,178	0,393	0,133	0,313
0,311	0,504	0,464	0,247	0,714
0,174	0,090	0,015	0,029	0,729

 б) матриця  $B$ 

0,132	0,059	0,071	0,027	0,058
0,064	0,049	0,017	0,045	0,045
0,033	0,054	0,024	0,032	0,036
0,049	0,061	0,045	0,023	0,120
0,039	0,026	0,011	0,021	0,045

Рис. 2 характеризує апроксимаційні та прогнози властивості модельних траєкторій невиробничого споживання четвертого ( $u_4(t)$ ) і п'ятого секторів ( $u_5(t)$ ) та макроекономічної системи в цілому ( $u(t) = \sum_{m=1}^n u_m(t)$ ). Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – модельні криві ( всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковій точці ). На періоді прогнозування порівняння з реальними даними ( за 2010-2011 рр. ) дає задовільні результати, як і у випадку модельних траєкторій випусків. Тому запропонована методика прогнозування часових рядів макроекономічної динаміки може бути використана для ефективного прогнозування реальних макроекономічних систем.

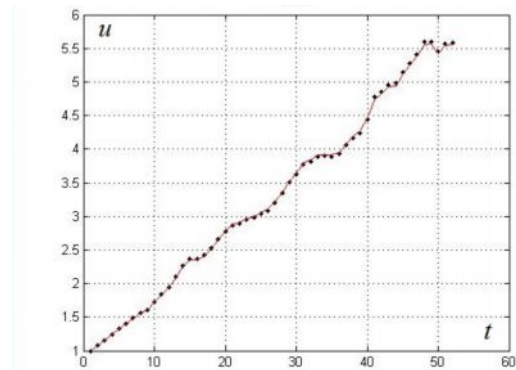
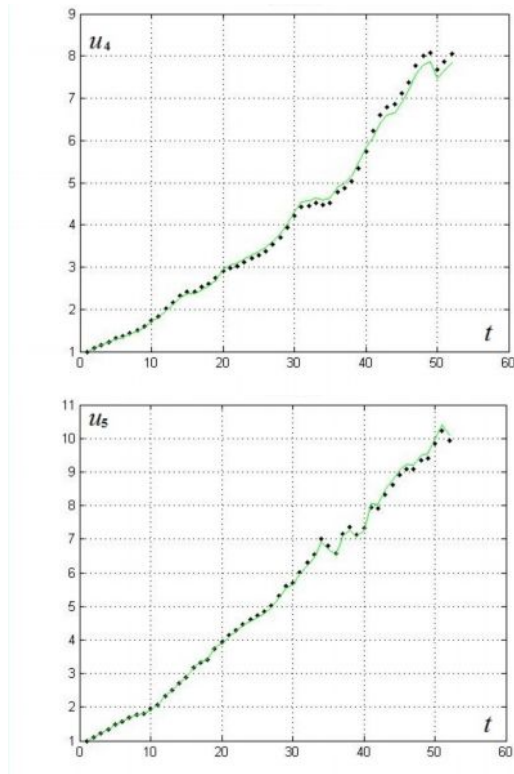


Рис. 2. Реальні і модельні значення невиробничого споживання

## Висновки

У роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації лінійних стаціонарних моделей слабо формалізованих систем у  $n$ -вимірному фазовому просторі. Часові ряди фазових координат моделюються за допомогою розкладання траєкторій руху на трендову і періодичну складові. Модельні траєкторії керувань отримуються в результаті оцінювання диференціальних рівнянь руху з обмеженнями на параметри. Побудовані алгоритми апробовані на реальній макроекономічній динаміці.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. — N. J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999. — 432 p.
2. Ramsay J. O. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell // J. of the Royal Stat. Society. Series B. — 2007. — Part 5, No. 69. — P. 741—796.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл. — М.: Наука, 2004. — 591 с.
4. Nazarenko O. M. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective / O. M. Nazarenko, D. V. Filchenko // Int. J. of Innovating Computing, Information and Control. — 2008. — Vol. 4, No. 7. — P. 1553—1566.
5. Greene W. H. Econometric Analysis / W. H. Greene. — 5th ed. — N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. — 1056 p.
6. Назаренко А. М., Фильченко Д. В. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. — Киев, 2009. — Вып. 158. — С. 42—61.
7. Назаренко О. М. Основы эконометрики. Вид. 2-е, перероб. : Підручник. — К.: Центр навч. літератури, 2005. — 392 с.
8. Хьюбер Д. П. Робастность в статистике / Хьюбер Д. П.; [пер. с англ.; под ред. И. Г. Журбенко] — М.: Мир, 1984. — 304 с.
9. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроекономических процессов и систем : учеб. пособ. — М.: Юнити-Дана, 2005. — 295 с.

- 
10. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Пер. с англ. — М. : Наука, 1986. — 232 с.

пост.06.06.13