

Выводы

Результаты исследований по изучению температурного поля в вертикальных резервуарах большой вместимости при циркуляционном способе нагрева пека показали эффективность использования донных отражателей. Расширить область с наиболее высоким температурным потенциалом возможно при помощи как трапециевидных, так и конических донных отражателей. Использование цилиндрических отражателей для достижения однородности пека в резервуарах так же возможно, однако следует учесть, что забор пека на технологию следует производить из верхней части резервуара. Применение донных отражателей позволит достичь равномерного распределения температуры в резервуаре и поддержания высокоинтенсивного вынужденного конвективного теплообмена в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов В. Е. Каменноугольный пек. / В. Е. Привалов, М. А. Степаненко. М.: Металлургия, 1981. — 387 С.
2. Варфоломеева О. И. Исследование процесса циркуляционного разогрева тяжелого жидкого топлива методом численного моделирования / О. И. Варфоломеева // Известия вузов. Строительство. — 2003. — №8. — С. 85 — 88.
3. Мадера А. Г. Моделирование теплообмена в технических системах / А. Г. Мадера. М.: Изд-во Науч. Фонда «Первая Исслед. лаб. им. Акад. В. А. Мельникова», — 2005. — 208 с.

пост. 24.09.12

Аналитический расчет процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии

А. Д. ГОРБУНОВ

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана инженерная методика теплового расчета начальной стадии процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел. Получены достаточно простые и эффективные формулы. Алгоритм расчета основан на анализе интегрального уравнения, связывающего тепловой поток и температуру на поверхности.

Розроблена інженерна методика теплового розрахунку початкової стадії процесів радіаційного нагріву (охолодження) тіл. Отримані досить прості та ефективні формули. Алгоритм розрахунку збудований на аналізі інтегрального рівняння, яке поєднує тепловий потік і температуру на поверхні.

The engineering methodology of radiation heating calculating on the first stage is developed. Effective and enough simple formula is received. Calculating algorithm is based on the analysis of integral equation which connects heat flux and the surface temperature.

Введение. При рассмотрении инерционной стадии, когда процессу нагрева (охлаждения) подвержены только тонкие поверхностные слои массивного тела, последнее можно считать полу бесконечным плоским телом.

В работе [1] получены интегральные уравнения для определения температуры поверхности $T_n(\tau)$ при известном удельном тепловом потоке

$$T_n(\tau) = T_0 + 2g_1 q(\tau) \cdot \sqrt{\tau} \cdot B_q(\tau) \quad (1)$$

и для расчета теплового потока $q(\tau)$ при заданной температуре на поверхности тела

$$q(\tau) = \beta \cdot T_n(\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot B_t(\tau), \quad (2)$$

где $g_1 = 1/\sqrt{(\pi b)}$; C_V — объемная теплоемкость тела; $\beta = b/\sqrt{\pi}$; $b = \sqrt{\lambda C_V}$; λ — коэффициент теплопроводности; T_0 — начальная температура тела, К; q — тепловой поток на поверхности; коэффициент

$$B_q(\tau) = \frac{1}{2q\sqrt{\tau}} \int_0^{\tau} \frac{q(\xi) d\xi}{\sqrt{\tau-\xi}} \equiv \frac{q(0)}{q(\tau)} + \frac{1}{q(\tau)} \int_0^{\tau} q'(\xi) \sqrt{\tau-\xi} d\xi$$

может быть интерпретирован как безразмерный тепловой поток;

$$B_t(\tau) = \frac{T_n(0)}{T_n(\tau)} + \frac{\sqrt{\tau}}{T_n(\tau)} \int_0^{\tau} \frac{T_n'(\xi) d\xi}{\sqrt{\tau-\xi}}.$$

В статье [1] разработана инженерная методика аналитического расчета процессов нагрева (охлаждения) тела на основании решения уравнений (1) и (2) при линейных граничных условиях.

Данная работа посвящена решению задачи теплопроводности при радиационном или смешанном радиационно-конвективном теплообмене, т.е. при нелинейных граничных условиях. Ранее [2] было показано, что в отличие от конвективного теплообмена, при теплообмене излучением процессы нагрева и охлаждения не являются симметричными, поэтому их приходится рассматривать по отдельности.

Решение задачи при радиационном нагреве. Решение получим в обобщенном виде. Пусть тепловой поток имеет вид

$$q = \sigma(T_c^m - T_n^m). \quad (3)$$

Если $m=1$ и $\sigma=\alpha$, то уравнение (3) соответствует закону охлаждения Ньютона-Рихмана; если $m=4$ и $\sigma=\sigma$, то оно описывает излучение серого тела. В некоторых случаях m может быть не целым. Так, например, при свободной конвекции коэффициент теплоотдачи $\alpha \approx \Delta T^n$, где показатель степени n в зависимости от режима изменяется от 1/8 до 1/3 [3], тогда при $T_c = 0$ тепловой поток $q \approx T_{\text{пов}}^{n+1}$.

Получим два решения, пригодные при малых и больших временах процесса.

Решая совместно уравнения (1) и (3), получим уравнение m -той степени относительно искомой температуры на поверхности T_n

$$NZ^m + Z - 1 = 0, \quad (4)$$

где $Z = \theta_n/A_n$; $\theta_n = T_n/T_c$; $A_n = \theta_0 + \eta$; $\theta_0 = T_0/T_c$; T_c — температура окружающей среды, К; $N = A_n^{m-1} \cdot \eta$; $\eta = Hy$; $y = \sigma T_c^{m-1} \sqrt{\tau}/b \equiv Sk\sqrt{Fo}$ — безразмерное модифицированное время; $Fo = a\tau/R^2$ — число Фурье; $Sk = \sigma T_c^{m-1} R/\lambda$ — радиационное число Старка, если $m=4$ или число Био при $m=1$; R — характерный размер тела; $H = H_q = pB_q$ — малые времена η ; $H = H_t = \sqrt{\pi}/B_t$ — большие η ; $p = 2/\sqrt{\pi}$.

Проведем анализ полученного решения. Уравнение (4) должно решаться методом последовательных приближений, т.к. значение B_q , определяемое уравнением (1), либо значение B_t , определяемое точным (2) зависит от величины еще не найденного теплового потока или искомой температуры поверхности. Однако анализ решения [2] задачи конвективного теплообмена показал, что величина B_q , как и B_t , изменяется в достаточно узком диапазоне от 1 до 1,5, поэтому без большой потери точности можно положить $B_q = 1$ и $B_t = 1$.

Покажем ход решения трансцендентного уравнения (4), проводя более подробный анализ для практически важного случая $m = 4$.

Разлагая функцию (4) в ряд Тейлора для малых N , будем иметь

$$Z \approx 1 - N + mN^2 - \frac{m(3m-1)}{2} \cdot N^3 + \dots \quad (5)$$

Эта формула при $m=4$ дает результаты с точностью δ_Z до 5%, если $N \leq 0,13$ при одном члене разложения, когда $Z \approx 1 - N$ для $N < 0,16$ — при двух и $N < 0,18$ при трех членах разложения (5). По аналогии можно получить разложение в окрестности точек $Z(N=8)=0,5$; $Z(192)=0,25$; $Z(500)=0,2$; $Z(9000)=0,1$ и $Z(152000)=0,05$. Например, для точек близких к $N=8$:

$$Z(N) \approx \frac{1}{2} - \frac{N-8}{80} - \frac{7}{10000}(N-8)^2 - \frac{363}{8 \cdot 10^5}(N-8)^3. \quad (6)$$

Для случая больших N приближенную асимптотику получим, решая (4) при $Z = 0$. Тогда

$$Z = 1/\sqrt[m]{N}. \quad (7)$$

При $m=4$ и $N > 500$ погрешность формулы (7) менее 5,7%, хотя абсолютная разность не выходит за пределы $\Delta Z = 0,025$ уже при $N \geq 100$.

Для получения более точных формул воспользуемся методом касательных Ньютона, итерационная формула которого для уравнения (4) имеет вид

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{f(Z_k)}{f'(Z_k)} = \frac{1 + (m-1)NZ_k^m}{1 + mNZ_k^{m-1}}, \quad (8)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номер итерации.

Число итераций по уравнению (8), необходимое для достижения заданной точности ε , когда $|Z_{k+1} - Z_k| \leq \varepsilon$ можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение. Полагая в (8) $Z_k = 1$, получим уравнение

$$Z = \frac{1 + (m-1)N}{1 + mN} \equiv 1 - N/(1 + mN), \quad (9)$$

Справедливое для $m=4$ при малых $N < 0,58$ и $\delta_Z \leq 5\%$, либо $N < 0,25$ и $\delta_Z \leq 1\%$.

Для больших N , после подстановки (7) в уравнение (8), будем иметь

$$Z = \frac{1}{1/m + N^{1/m}} \quad (10)$$

с погрешностью менее 5% при $N \geq 4$ и $m=4$.

В случае проведения экспресс расчетов, не нуждающихся в особой точности, при определении $Z(N)$ можно воспользоваться графиком, который легко строится по формуле (4), разрешенной относительно N

$$N = (1 - Z)/Z^m. \quad (11)$$

На рисунке 1 в качестве примера приведена зависимость (11), построенная при $m=4$.

После определения Z из уравнения (4) или из графика (рис. 1), окончательно температура поверхности $T_n = Z(\theta_0 + \eta) \cdot T_c$, К.

Интересно отметить, что при нулевой начальной температуре решение (4) упрощается до следующего соотношения, разрешенного относительно времени

$$\eta = \frac{\theta_n}{1 - \theta_n^m}. \quad (12)$$

В таблице 1 и на рисунке 2 приведены предельные зависимости времени от температуры поверхности при $T_0 = 0$ по уравнению (12) в случае радиационного нагрева ($m=4$) и по уравнению (13) при $T_c = 0$. На рис. 2 четко видно, что процессы нагрева и охлаждения ведут себя по разному, т.е. являются существенно несимметричными.

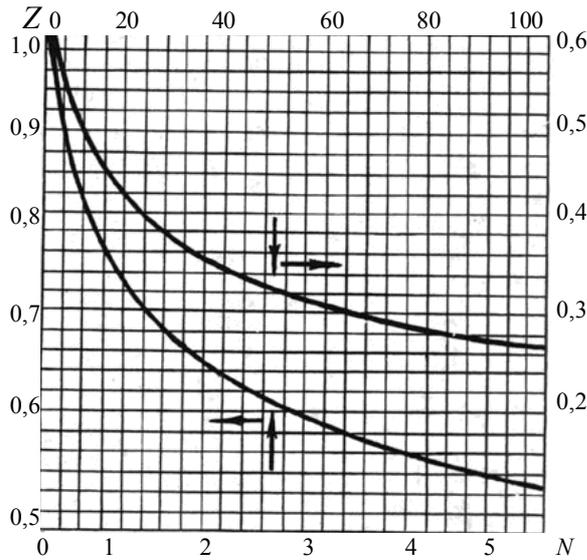


Рис. 1. Графическое решение уравнения $NZ^4 + Z - 1 = 0$

Таблица 1. Зависимость относительной температуры от модифицированного времени при нагреве ($T_0 = 0$) и охлаждении ($T_c = 0$)

θ_n	0,10	0,30	0,50	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,98	0,99
Время, η	0,10	0,30	0,53	0,92	1,10	1,36	1,78	2,62	5,12	0,12	25,12
Охлаждение	9000	86,42	8,00	1,25	0,79	0,49	0,29	0,15	0,06	0,03	0,01

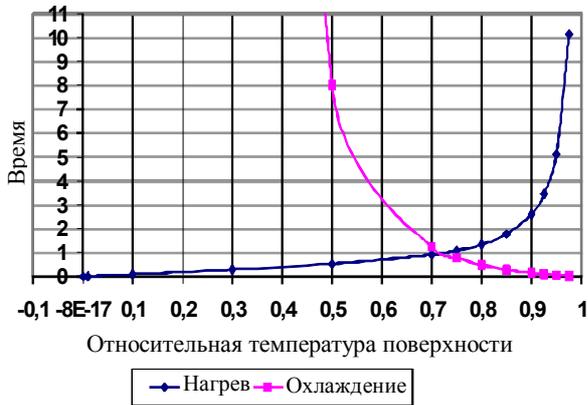


Рис. 2. Зависимость относительной температуры поверхности от модифицированного времени при нагреве и охлаждении

Радиационное охлаждение. Полученные выше решения, описывающие радиационный нагрев полуграниченного тела, в принципе можно использовать и здесь, т.к. тепловой поток имеет тот же вид (3), однако при охлаждении возможны случаи теплообмена в среду с нулевой температурой.

Решая как и ранее совместно уравнение (1) и (3), но уже выбирая в качестве характерной масштабной

температуры не T_c , а начальную T_0 , получим (4), в котором

$$Z = \theta_n / A_0; \theta_n = T_n / T_0; A_0 = 1 + \theta_c^m \cdot \eta; \theta_c = T_c / T_0; N = A_0^{m-1} \cdot \eta; \eta = Hy; y = \sigma T_0^{m-1} \sqrt{a\tau} / \lambda.$$

При охлаждении тела в среду с нулевой температурой, когда $A_0 = 1$, $\theta_n = Z$, $N = \eta$ и решение (4) упрощается до соотношения, разрешенного относительно времени

$$\eta = \frac{1 - \theta_n}{\theta_n^m}. \tag{13}$$

Если $m = 4$ для решения (13) можно воспользоваться графиком (рис. 1) или таблицей 1 при отыскании зависимости $\theta_n(\eta)$ в явном виде.

Анализ полученных решений проведем на предельных случаях, характеризующихся простейшими зависимостями (12) и (13).

Сравнивая (13) с уравнением (12), можно сделать вывод о том, что нелинейные процессы (когда $m \neq 1$) нагрева и охлаждения при изменении температур в тех же пределах существенно отличаются друг от друга. Для количественной оценки этого различия получим асимптотические решения при малых и больших временах процесса. Ограничиваясь в (5) одним членом разложения, получим

$$\theta_n \approx 1 - N = 1 - \eta = 1 - p \cdot y \tag{14}$$

и составим безразмерный тепловой поток при охлаждении

$$Q_{\text{охл}} = \frac{q}{\sigma T_0^m} = \theta_n^m - (1 - \eta)^m \approx 1 - m\eta.$$

Аналогично при нагреве с $\theta_0 = 0$ будем иметь

$$\theta_n = Z \cdot \eta \approx (1 - N)\eta = (1 - \eta^m)\eta; Q_{\text{наг}} = 1 - \theta_n^m \approx 1 - \eta^m.$$

Тогда отношение тепловых потоков на начальной стадии

$$\frac{Q_{\text{охл}}}{Q_{\text{наг}}} = \frac{1 - m\eta}{1 - \eta^m} \approx 1 - m\eta < 1$$

показывает, что тепловой поток при охлаждении меньше, чем при нагреве, т.е. что нагревается тело быстрее, чем охлаждается.

При нахождении асимптотических решений для больших промежутков времени воспользуемся (7) и (10). После преобразований получим

$$\theta_n = Z \approx \frac{1}{1/m + N^{1/m}} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1/m} \frac{1}{1 + \frac{1}{m\eta^{1/m}}} \approx \pi^{-\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{y}\right)^{1/m}; \tag{15}$$

$$Q_{\text{охл}} = \theta_n^m \approx \frac{1}{\eta(1 + \eta^{-1/m})}.$$

Для случая нагрева тела

$$\theta_n = Z\eta = \frac{\eta}{\eta + 1/m} \approx 1 - \frac{1}{m\eta} + \frac{1}{m^2\eta^2}; Q_{\text{наг}} = \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{1}{m\eta}\right).$$

Отношение тепловых потоков при больших временах ($\eta \gg 1$)

$$\frac{Q_{\text{охл}}}{Q_{\text{наг}}} = 1 - \frac{1}{\eta^{1/m}}$$

остается меньше единицы и в этом случае.

Кривые нагрева и охлаждения пересекаются в момент времени $\eta^* = 1$ при температуре поверхности θ_n^* , определяемой по формуле (13) при $\eta = 1$, либо из рисунка 1 при $N = 1$. В случае теплообмена излучением ($m = 4$) $\theta_n^* = 0,724492$ в отличие от конвекции ($m = 1$) с симметричным ходом кривых и пересечением в точке $\eta^* = 1$ и $\theta_n^* = 0,5$.

Для иллюстрации сказанного на рисунке 2 приведены зависимости температуры поверхности от времени, построенные по уравнениям (12) и (13) при $m = 4$. Из графика следует, что тело нагревается излучением значительно быстрее, чем охлаждается при прочих равных условиях.

Установлено также, что все возможные кривые процессов нагрева при $\theta_0 \neq 0$ будут располагаться правее (выше) предельной кривой, определяемой уравнением (12), также как и кривые охлаждения при $\theta_c \neq 0$ — правее, чем по (13).

Оценим точность и простоту полученных решений. Оказалось, что соотношения (12) и (13) полностью совпадают с асимптотически точными [4]. Решения, полученные другими приближенными методами несколько отличаются от точных (см. табл. 2), однако кроме точности, аналитические решения еще должны быть достаточно простыми. Для оценки простоты приведем решение задачи радиационного охлаждения полуограниченного тела в среду с нулевой температурой вариационным методом [5]:

Таблица 2. Сопоставление точного и приближенных решений задачи радиационного охлаждения полуограниченного тела [5]

Метод	Решение для малых времен $\theta_n = 1 - k_1 \cdot y$	Решение для больших времен $\theta_n = k_2 / y^{1/4}$
Точное решение [4]	$k_1 = 1,128 = 2/\sqrt{\pi}$	$k_2 = 0,867 = \pi^{-1/8}$
Вариационный метод	1,120	0,865
Интегральный, профиль параболический	1,225	0,872
Интегральный, профиль кубический	1,153	0,884
Решение по данной методике (14) и (15) при $m = 4$	1,128	0,867

$$\left. \begin{aligned} \psi\eta + \psi\eta = 3(1 - \psi)^m; \\ \frac{\psi\eta^2}{42} + \frac{13}{315}\psi\eta\eta = \frac{7}{30}\psi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $\psi = 1 - \theta_n$; $\eta = \delta\sigma T_0^{m-1}/\lambda$; δ — толщина теплового пограничного слоя.

Чтобы определить температуру поверхности по решению (16) методом Био, необходимо решать систему дифференциальных уравнений первого порядка с привлечением методов численного интегрирования.

В отличие от системы (16) уравнение (4) алгебраическое, легко может быть разрешено с любой точностью относительно искомой температуры, как это показано на асимптотических решениях (14) и (15), а если не разрешать относительно θ_n , то воспользоваться максимально простым решением (13).

Радиационно-конвективный теплообмен. Теперь тепловой поток в уравнении (3) имеет вид

$$q = \alpha(T_c - T_n) + \sigma(T_c^4 - T_n^4). \quad (17)$$

Решая совместно уравнения (1) и (17), получим (4), в котором нужно положить:

$$m = 4; \quad Z = \frac{T_n}{\theta_A}; \quad \theta_A = \frac{T_0 + T_c(\eta_k + \eta_\lambda)}{1 + \eta_k}; \quad N = \frac{\eta_A}{1 + \eta_k};$$

$$\eta_A = HSk_A\sqrt{Fo}; \quad Sk_A = \frac{\sigma\theta_A^3 \cdot R}{\lambda}; \quad \eta_k = HBi\sqrt{Fo};$$

$\eta_\lambda = HSk\sqrt{Fo}$ — безразмерные времена при конвективном и лучистом теплообмене;

$$Bi = \alpha R/\lambda; \quad Sk = \sigma T_c^3 R/\lambda.$$

Полученное решение не различает направления процессов теплообмена. Однако, для уменьшения числа переменных, выявления критериев, определяющих процесс, более эффективного номограммирования и упрощения решения, приведем расчетные соотношения к виду, когда нагрев и охлаждение считаются по разным формулам, отличающимися различными масштабными температурами.

Эти и полученные выше расчетные формулы сведены в таблице 3.

Интересно отметить, что при построении номограмм $\theta_n = f(\theta_0, \eta)$ было обнаружено, что и при чисто радиационном теплообмене все кривые процессов нагрева лежат выше кривой, определяемой уравнением

$$(12). \quad \eta = \frac{\theta_n}{1 - \theta_n^4}. \quad \text{Это свидетельствует о том, что суще-}$$

ствует максимально возможная скорость нагрева, приходящаяся на начальную стадию:

$$\left(\frac{d\theta_n}{d\eta}\right)_{\text{наг}}^{\max} \leq 1 - (m+1) \cdot \eta^m \leq 1$$

или в размерном виде

$$\left(\frac{dT_n}{d\tau}\right)_{\text{наг}}^{\max} = \frac{\sigma T_c^m}{\sqrt{\pi\lambda C_V \tau}} [1 - (m+1)\eta^m] \leq \frac{q_0}{\sqrt{\pi\lambda C_V \tau}}.$$

Аналогично все кривые процессов охлаждения $\theta_n = f(\theta_c, \eta)$ находятся выше линии, определяемой уравнением (13), из которого также как из (12) можно найти максимальную скорость охлаждения

$$\left(\frac{dT_n}{d\tau}\right)_{\text{охл}}^{\max} = \frac{\sigma T_0^m}{\sqrt{\pi\lambda C_V \tau}} (1 - 2m\eta) \leq \frac{q_0}{\sqrt{\pi\lambda C_V \tau}},$$

где q_0 — максимально возможный тепловой поток, определяемый по уравнению (3) или (17) при температуре поверхности равной начальной T_0 .

Таблица 3. Сводная таблица переменных уравнения $NZ^m + Z - 1 = 0$ при различных условиях теплового нагружения

Переменные	N	A	η	Sk	T_n	
нагрев	Радиационный	$A^{m-1} \cdot \eta$	$\theta_0 + \eta$	$H \text{Sk} \sqrt{\text{Fo}}$	$\sigma T_c^{m-1} \frac{R}{\lambda}$	$Z \cdot A \cdot T_c$
	Радиационно-конвективный ($m = 4$)	$\frac{A^3 \eta_n}{1 + \eta_k}$	$\frac{\theta_0 + \eta_k + \eta_n}{1 + \eta_k}$	$\eta_k = H \text{Bi} \sqrt{\text{Fo}}$ $\eta_n = H \text{Sk} \sqrt{\text{Fo}}$	$\sigma T_c^3 \frac{R}{\lambda}$	
охлаждение	Радиационно-конвективное ($m = 4$)	—//—	$\frac{1 + \theta_c (\eta_k + \theta_c^2 \eta_n)}{1 + \eta_k}$	—//—	$\sigma T_0^3 \frac{R}{\lambda}$	$Z \cdot A \cdot T_0$
	Радиационное	$A^{m-1} \cdot \eta$	$1 + \theta_c^m \eta$	$H \text{Sk} \sqrt{\text{Fo}}$	$\sigma T_0^{m-1} \frac{R}{\lambda}$	

Существование простых предельных кривых позволяет рекомендовать их для проведения оценочных экспресс расчетов нагрева по уравнению (12) и охлаждения — по (13).

Таким образом, разработанная инженерная методика теплотехнического расчета начальной стадии нагрева (охлаждения) тел обладает достаточной простотой и точностью и легко обобщается на случаи переменных коэффициентов теплоотдачи, излучения, температуры окружающей среды, а также любой другой нелинейности в граничных условиях.

Численный пример. В заключении приведем пример практического расчета. Пусть плоская заготовка из углеродистой стали толщиной $R = 0,35$ м нагревается в термической печи с температурой печной среды $T_c = 1273$ К. Начальная температура металла $T_0 = 293$ К. Приведенный коэффициент излучения $\sigma = 3,5$; теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности $\lambda = 35$ Вт/мК; объемная теплоемкость $C_V = 5,226 \cdot 10^6$ Дж/м³К.

Требуется определить температуру поверхности заготовки через 2 часа после посадки.

Принимая чисто радиационный нагрев (конвекцию обычно учитывают увеличением σ), выбираем формулы первой строки табл. 3 при $m = 4$. Далее последовательно находим:

$$\text{число Фурье} \quad \text{Fo} = \frac{\lambda \cdot \tau}{C_V \cdot R^2} = \frac{35 \cdot 2 \cdot 3600}{5,23 \cdot 10^6 \cdot 0,35^2} = 0,3918;$$

число Старка

$$\text{Sk} = \frac{\sigma T_c^3 R}{\lambda} = \frac{3,5 \cdot 10^{-8} \cdot 1273^3 \cdot 0,35}{35} = 0,7220;$$

модифицированное время

$$\eta = p \text{Sk} \sqrt{\text{Fo}} = \frac{2}{\sqrt{3,14}} 0,722 \sqrt{0,3918} = 0,5100;$$

$$A = \theta_0 + \eta = 293/1273 + 0,51 = 0,7402;$$

$$N = A^3 \cdot \eta = 0,7402^3 \cdot 0,51 = 0,2068.$$

Так как $0,18 < N < 0,58$, то корень уравнения (4) находим по формуле (9)

$$Z = \frac{1 + 3N}{1 + 4N} = \frac{1 + 3 \cdot 0,2068}{1 + 4 \cdot 0,2068} = 0,8868.$$

Окончательно $\theta_n = Z \cdot A = 0,8868 \cdot 0,7402 = 0,6564$ и температура поверхности $T_n = \theta_n \cdot T_c = 0,6564 \cdot 1273 = 836$ К.

В работе Саломатова В.В. [6] для условий данного примера численным методом было получено $T_n = 850$ К. Таким образом, погрешность δT_n не превышает 2%, что вполне приемлемо для разработанной инженерной методики расчета процессов переноса тепла на начальной стадии.

ЛИТЕРАТУРА

- Горбунов А. Д., Уклеина С. В. Аналитический расчет процессов нагрева тел на начальной стадии // Математичне моделування. — Днепродзержинск: ДГТУ, 2008. — № 1(18). — С. 29—33.
- Горбунов А. Д. О начальной стадии нагрева (охлаждения) тел. — Деп. в УкрНИИТИ 11.03.1985. — № 491 Ук — 85. — 15 с.
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. — М.: Энергия. — 1975. — 448 с.
- Ларднер Т. Вариационный принцип Био для решения задач теплопроводности // Ракетная техника и космонавтика. — 1963. — № 1. — С. 225—236.
- Абарбанел С. Time dependent temperature distribution in radiating solids // I. Math. and Phys. — 1960. — V. 39. — No 4. — 246.
- Саломатов В. В. Методы расчета нелинейных процессов теплового переноса. — Томск: Изд-во Том. Ун-та, 1976. — ч. 1. — 245 с.

пост.07.11.12