

## Анализ динамических режимов гидросистемы перед срывом подачи центробежного насоса

В. В. ГОЦУЛЕНКО, В. Н. ГОЦУЛЕНКО

Институт предпринимательства “Стратегия”

В данной работе рассмотрена математическая модель автоколебаний (помпажа) в гидросистеме, включающей одноступенчатый центробежный насос с акустической емкостью на его входе. Проведен бифуркационный анализ режимов функционирования рассматриваемой динамической системы при варьировании ее волнового сопротивления и коэффициента гидравлических потерь на подводящей магистрали.

В даній роботі розглянута математична модель автоколивань (помпажу) у гідросистемі, що включає одноступеневий відцентровий насос з акустичною ємністю на його вході. Проведений біфуркаційний аналіз режимів функціонування в розглянутій динамічній системі при варіюванні її хвильового опору та коефіцієнту гідрравлічних втрат на підвідній магістралі.

In this paper we consider the mathematical model of the oscillations (surge) in the hydraulic system, which includes a single-stage centrifugal pump with an acoustic capacity at its input. Performed bifurcation analysis modes of operation of the dynamical system by varying its wave resistivity and hydraulic losses on the supply line.

**Введение.** Лопастные насосы малых ресурсов работают в кавитационном режиме перед срывом подачи [1], в котором самовозбуждаются автоколебания неизвестной природы [2]. Автоколебания в гидросистеме с центробежным насосом возбуждались из-за провала уровня в емкости и всасывания атмосферного воздуха [3]. В этом случае причиной неустойчивой работы насоса было образование восходящей ветви на его напорной характеристике  $H(Q)$ . Подача воздуха на вход в шнеко – центробежный насос приводила к образованию восходящей ветви на напорной характеристике шнека. При этом возбуждение автоколебаний наблюдалось при монотонно убывающей напорной характеристике шнеко – центробежного насоса в целом [4].

При снижении кавитационного запаса  $\Delta h$  автоколебания возникали перед срывом подачи одноступенчатого центробежного насоса в области восходящих кавитационных разветвлений  $H(Q, \Delta h)$  его убывающей напорной характеристике  $H(Q)$  [5].

Условием, определяющим работу лопастного насоса перед срывом подачи в области кавитационных разветвлений, является неравенство  $\partial H / \partial p_{вх} \neq 0$  [6].

Автоколебания (помпаж) возникающие из-за снижения плотности при подаче воздуха на вход шнеко – центробежного насоса или при кавитации, обусловленной снижением величины  $\Delta h$ , могут наблюдаться при монотонно убывающей напорной характеристике насоса в целом. Это следует из условий, определяющих границу области устойчивости, когда число степеней свободы гидросистемы  $n \geq 2$  [7].

Теоретическая напорная характеристика насоса  $H^T(Q)$  центробежных насосов, лопасти которых загнуты против вращения рабочего колеса, является линейной убывающей зависимостью. Действительная напорная характеристика насоса  $H(Q) = H^T(Q) - h_n(Q)$ , когда гидравлические потери  $h_n(Q)$  в его проточном тракте возрастают с увеличением производительности, также является монотонно убывающей функцией расхода  $Q$ . Восходящая ветвь на характеристике  $H(Q)$  в области малых расходов лопастных насосов образуется при появлении нисходящей ветви отрицательного сопротивления на зависимости  $h_n(Q)$  (рис.1, а).

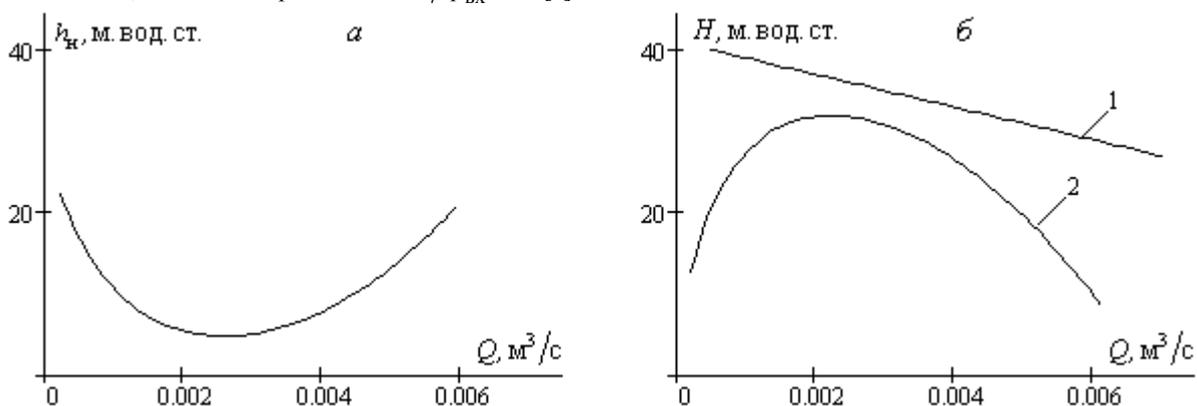


Рис.1. Иллюстрация образования: а) нисходящей ветви на зависимости гидропотерь  $h_n(Q)$ ; б) восходящей ветви на напорной характеристике центробежного насоса, где 1 – теоретическая линейная зависимость  $H^T(Q)$  насосов ЖРД, 2 – действительная напорная характеристика  $H(Q)$

Необходимое условие возбуждения автоколебаний при преобразовании механической энергии или теплоты в напор движущегося потока заключается в положительности потока акустической энергии  $A > 0$  [8]. В соответствии с цепочкой неравенств:

$$\frac{dh_H}{dQ} < 0 \Rightarrow A > 0, \quad \frac{dH}{dQ} > 0 \Rightarrow A > 0,$$

$$\text{запаздывание } \tau \neq 0 \Rightarrow A > 0,$$

определяются механизмы возбуждения автоколебаний. Из этих условий следует, что нисходящая ветвь отрицательного сопротивления зависимости  $h_H(Q)$  порождает восходящую ветвь на характеристике  $H(Q)$  (рис.1, б), являющейся причиной автоколебаний помпажа.

В работе [3] рассмотрена математическая модель автоколебаний (помпажа) в гидросистеме, включающей

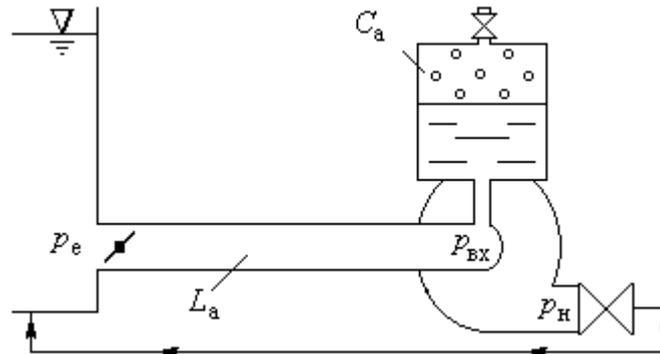


Рис.2. Схема замкнутой гидросистемы, в которой центробежный насос работает перед срывом подачи

**Анализ полученных результатов.** Нестационарные движения жидкости в гидросистеме (рис.2), когда  $\frac{dp_{ВХ}}{dt} = -\frac{dP}{dt}$ , описываются следующей нелинейной автономной динамической системой

$$\begin{cases} \frac{L_a}{\rho g} \frac{dQ}{dt} = P - R(Q), \\ \rho g C_a \frac{dP}{dt} = Q_H - Q, \end{cases} \quad (1)$$

где  $P = \frac{p_e - p_{ВХ}}{\rho g}$ ,  $p_e = const$ ,  $R(Q) = kQ^2$  – гидравлические потери в подводящей магистрали, первое уравнение выражает закон сохранения импульса массы, а второе уравнение – закон сохранения массы. Система уравнений (1) дополняется приключенной к колебательному контуру характеристикой магистрали

$$P_H - P_e = \rho g h_c(Q_H). \quad (2)$$

Воспользовавшись напорной характеристикой насоса  $H(Q_H)$  или рабочей ветвью ее кавитационных разветвлений  $p_H - p_{ВХ} = \rho g h H(Q_H, \Delta h)$ , а также характеристикой сети (2), приходим к следующей зависимости

$$P = f(Q_H), \quad (3)$$

где положено  $f(Q_H) = H(Q_H, \Delta h) - h_c(Q_H)$ . Обозначив обращение зависимости (3) через  $Q_H = \varphi(P)$ , систему (1) окончательно можно записать в следующем виде

центробежный насос при впуске воздуха в подводящей магистрали. В [6] был проведен бифуркационный анализ динамических режимов в замкнутой гидросистеме с центробежным насосом, работающим в кавитационном режиме перед срывом подачи, и акустической емкостью на напорной магистрали. В данной работе рассматривается аналогичная задача для гидросистемы с акустической емкостью на подводящей магистрали.

**Постановка задачи.** В данной работе определяются автоколебания (помпаж) в замкнутой гидросистеме, включающей одноступенчатый центробежный насос с акустической емкостью на его входе (рис. 2), работающий в кавитационном режиме перед срывом подачи.

$$\begin{cases} \frac{L_a}{\rho g} \frac{dQ}{dt} = P - R(Q), \\ \rho g C_a \frac{dP}{dt} = \varphi(P) - Q. \end{cases} \quad (4)$$

Параметры стационарного режима определяются решением системы уравнений (4) при выполнении условий:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{Q=Q^*} = 0, \quad \left. \frac{dP}{dt} \right|_{P=P^*} = 0, \quad (5)$$

что приводит к следующему алгебраическому уравнению  $H(Q^*, \Delta h) = h(Q^*)$ , где  $h(Q) = R(Q) + h_c(Q)$  – характеристика гидросети (рис.2), представляющая квадратичную зависимость  $h(Q) = k_{\Sigma} Q^2$ ,  $k_{\Sigma} = k + k_c$  – коэффициент гидравлических потерь во всей гидросистеме, включающей центробежный насос.

Отметим, что когда напорная характеристика  $H(Q_H)$  или ее кавитационные разветвления  $H(Q_H, \Delta h)$  имеют восходящие ветви, определяемые неравенством  $\partial H / \partial Q_H > 0$ , обращение  $Q_H = \varphi(P)$  зависимости (3) становится неоднозначным. В этом случае удобно с помощью (3) в системе (4) перейти к новым переменным  $Q$  и  $Q_H$ , в которых она примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{L_a}{\rho g} \frac{dQ}{dt} = f(Q_H) - kQ^2, \\ \rho g C_a f'(Q_H) \frac{dQ_H}{dt} = Q_H - Q. \end{cases} \quad (6)$$

Несложно проверить, что динамическая система (6) имеет два положения равновесия  $Q_1^*$  и  $Q_2^*$ , определяемые как корни алгебраического уравнения  $f(Q) - kQ^2 = 0$ . Матрица Якоби системы (6) имеет вид

$$J(Q, Q_H) = \begin{bmatrix} -2k\alpha Q & \alpha f'(Q_H) \\ -\frac{\beta}{f'(Q_H)} & \beta \frac{f'(Q_H) - f''(Q_H)(Q_H - Q)}{(f'(Q_H))^2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где обозначено  $\alpha = \rho g L_a^{-1}$ ,  $\beta = (\rho g C_a)^{-1}$ . Предположим для определенности, что  $Q_1^* \leq Q_2^*$  и определим тип и характер устойчивости данных состояний равновесия. Для этого, как известно, необходимо найти собственные значения  $\lambda_{1,2}^{(j)}$  матрицы (7) при  $Q_H = Q = Q_j^*$  ( $j = \overline{1;2}$ ).

Имеем

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = \frac{\sigma_0^{(j)}}{2} \pm i \sqrt{\sigma_1^{(j)} - \left(\frac{\sigma_0^{(j)}}{2}\right)^2}, \quad (8)$$

где  $\sigma_0^{(j)} = \text{tr}(J) = -2k\alpha Q_j^* + \frac{\beta}{f'(Q_j^*)}$ ,

$$\sigma_1^{(j)} = \det(J) = \alpha\beta \left(1 - \frac{2kQ_j^*}{f'(Q_j^*)}\right) \quad (j = \overline{1;2}).$$

Нетрудно проверить, что  $Q_1^* \neq Q_2^*$  справедливо неравенство  $H'(Q_2^*) < 2(k + k_c)Q_2^*$ . Пусть  $f'(Q_2^*) > 0$ , тогда т.к.  $f'(Q_2^*) = H'(Q_2^*) - 2k_c Q_2^* < 2kQ_2^*$ , то  $1 - \frac{2kQ_2^*}{f'(Q_2^*)} < 0 \Rightarrow \sigma_1 < 0$ . Поэтому в этом случае положение равновесия  $B(Q = Q_2^*, Q_H = Q_2^*)$  является седлом.

Если  $f'(Q_2^*) < 0$ , то  $\sigma_0^{(2)} < 0$ ,  $\sigma_1^{(2)} > 0$  и из критерия Рауса – Гурвица следует, что рассматриваемое положение равновесия является устойчивым фокусом. Аналогично проверяется, что если  $f'(Q_1^*) < 0$  выполняются неравенства  $\sigma_0^{(2)} < 0$ ,  $\sigma_1^{(2)} > 0$  и, следовательно, положение равновесия  $A(Q = Q_1^*, Q_H = Q_1^*)$  также является устойчивым фокусом. Если же  $f'(Q_1^*) > 0$ , то топологическая структура фазового портрета в окрестности положения равновесия  $A$  более содержательна. Мы далее покажем, рассматривая  $\alpha > 0$  или  $\beta > 0$  как бифуркационный параметр, что в окрестности положения равновесия  $A$  возникает субкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Действительно, рассматривая для определенности  $\beta$  как бифуркационный параметр, имеем:

$$\text{Im} \left\{ \lambda_{1,2}^{(1)} \Big|_{\beta=\beta^*} \right\} = \pm \alpha \sqrt{2kQ_1^* f'(Q_1^*) \left(1 - \frac{2k\alpha Q_1^*}{f'(Q_1^*)}\right)} \neq 0,$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_{1,2}^{(1)} \Big|_{\beta=\beta^*} \right\} = -2k\alpha Q_1^* + \frac{1}{f'(Q_1^*)} \neq 0,$$

$$\text{Re} \left\{ \lambda_{1,2}^{(1)} \Big|_{\beta=\beta^*} \right\} = 0,$$

где  $\beta^* = 2k\alpha Q_1^* f'(Q_1^*)$ . Таким образом, с увеличением параметра  $\beta$  комплексно сопряженные собственные значения  $\lambda_{1,2}^{(1)} = \lambda_{1,2}^{(1)}(\beta)$  переходят с левой (устойчивой) комплексной полуплоскости в правую (неустойчивую) полуплоскость. При этом в точке бифуркации, т.е. когда  $\beta = \beta^*$  имеем критический случай. Хорошо известно, что в критическом случае устойчиво положение равновесия не определяется собственными значениями матрицы линеаризации. В нашем случае в точке бифуркации положение равновесия  $A$  линеаризованной системы является центром. Мы далее покажем, что при этом исходная нелинейная система имеет в точке  $A$  слабый фокус. Для этого воспользуемся вычислением первой ляпуновской величины. В точке бифуркации система (6) имеет следующий вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q \\ Q_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - \xi \\ Q_H - \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(Q, Q_H) \\ F_2(Q, Q_H) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где введены обозначения:  $\xi = Q_1^*$ ,  $a = -2k\alpha\xi$ ,  $b = \alpha f'(\xi)$ ,

$$F_1(Q, Q_H) = \alpha [f(Q_H) - f(\xi) - f'(\xi)(Q_H - \xi)] - \alpha k(Q - \xi)^2,$$

$$F_2(Q, Q_H) = 2k\alpha \xi f'(\xi) \left[ \frac{1}{f'(Q_H)} - \frac{1}{f'(\xi)} \right] (Q_H - Q).$$

Для вычисления первой ляпуновской величины приведем систему (9) к нормальной форме. Прежде всего, отметим,

что матрица  $D = \begin{bmatrix} a & b \\ a & -a \end{bmatrix}$  с помощью преобразования

подобия, определяемого матрицей  $M = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ a & 0 \end{bmatrix}$ , где

$$\omega = -\sqrt{-a(a+b)},$$

приводится к жордановой нормальной форме  $J = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$ . Действительно, это следует из ра-

венства  $M^{-1}DM = J$ , где  $M^{-1} = \omega^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -a & a \end{bmatrix}$ . Далее,

с помощью замены переменных  $x_1 = \omega(Q_H - \xi)$ ,  $x_2 = a(Q - \xi)$  система (9) приводится к нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\omega x_2 + K_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega x_1 + K_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (10)$$

где  $K_1(x_1, x_2) = \omega^{-1} F_2(\xi + ax_1 + \omega x_2, \xi + ax_1)$ ,

$$K_2(x_1, x_2) = a\omega^{-1} [F_1(\xi + ax_1 + \omega x_2, \xi + ax_1) - F_1(\xi + ax_1 + \omega x_2, \xi + ax_1)].$$

Известно [9], что для системы (10) представленной в нормальной форме, первая ляпуновская величина вычисляется с помощью следующей формулы

$$A_1 = \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 K_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 K_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 K_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 K_2}{\partial x_2^3} \right) + \frac{1}{16\omega} \left[ \frac{\partial^2 K_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 K_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2 K_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 K_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 K_2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2 K_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 K_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 K_2}{\partial x_2^2} \right]$$

Проведенные расчеты показывают, что в рассматриваемой задаче  $A_1 > 0$ , т.е. первая ляпуновская величина положительна. Это, как известно [10], отвечает случаю субкритической бифуркации Андронова – Хопфа.

Состояние равновесия  $A$  до точки бифуркации окружено неустойчивым предельным циклом  $\Gamma$ , ограничивающим область притяжения устойчивого фокуса  $A$ . При подходе к точке бифуркации неустойчивый цикл  $\Gamma$  стягивается к состоянию равновесия  $A$ .

В точке бифуркации цикл  $\Gamma$  исчезает, состояние равновесия  $A$  становится слабым неустойчивым фокусом. В этом случае возникает жесткая потеря устойчивости стационарного режима, определяемого особой точкой  $A$ .

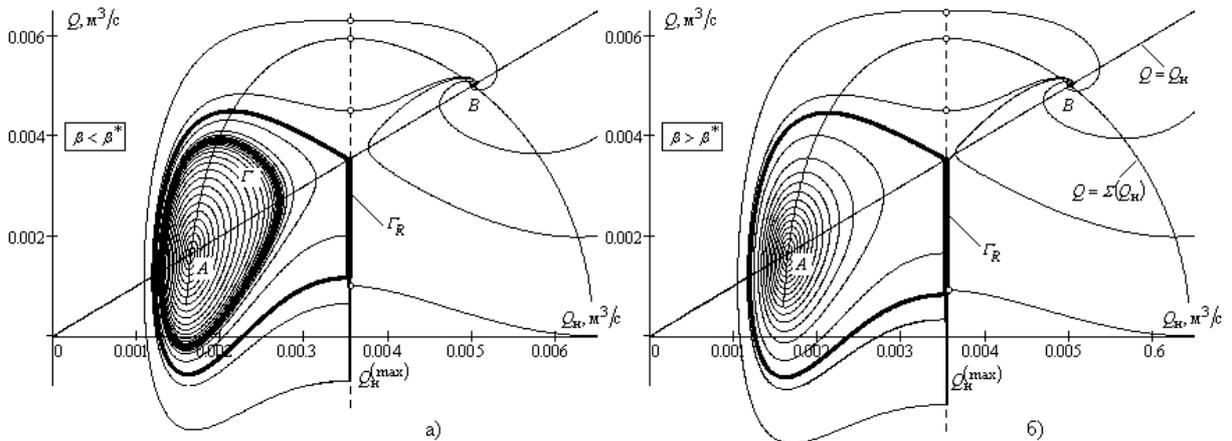


Рис.3. Фазовые портреты динамической системы (6) при варьировании параметра  $\beta$

Таким образом, если  $\beta > \beta^*$ , то особая точка  $A$  является неустойчивым фокусом. С уменьшением  $\beta$ , при  $\beta < \beta^*$ , фокус  $A$  становится устойчивым, с областью притяжения, ограниченной неустойчивым предельным циклом  $\Gamma$  (рис.3, а), который увеличивается при дальнейшем уменьшении  $\beta$ .

Снаружи цикла  $\Gamma$  расположен устойчивый предельный цикл  $\Gamma_R$ , которому соответствуют релаксационные автоколебания (рис.4) с участками быстрых движений вдоль прямой  $Q_H = Q_H^{(max)}$ , где  $Q_H^{(max)} = \operatorname{argmax}_{Q_H} \Sigma(Q_H)$ ,  $\Sigma(Q_H) = \sqrt{\frac{f(Q_H)}{k}}$ .

При уменьшении параметра  $\beta$  предельный цикл  $\Gamma_R$  уменьшается и при некотором значении  $\beta = \beta^{**} < \beta^*$  возникает бифуркация слияния циклов  $\Gamma$  и  $\Gamma_R$ , в результате которой они исчезают. При  $0 < \beta < \beta^{**}$  оба положения равновесия  $A$  и  $B$  являются устойчивыми. Если начальное условие  $Q_H|_{t=0} < Q_H^{(max)}$ , то в дальнейшем фазовая траектория асимптотически приближается к положению равновесия  $A$ , а если  $Q_H|_{t=0} > Q_H^{(max)}$  – то к положению равновесия  $B$ .

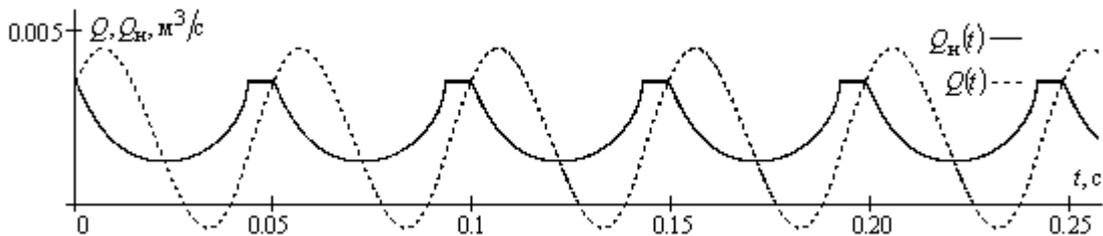


Рис.4. Зависимости релаксационных автоколебаний расхода жидкости в гидросистеме (рис.2)

При изменении коэффициента  $k$  гидравлических потерь на подводящей магистрали возможны также бифуркации состояний равновесия в динамической системе (6). На рис. 5, а приведены графики зависимостей собственных значений матрицы

(линеаризации) Якоби для состояния равновесия  $A$ , а на рис. 5, б – для состояния равновесия  $B$ .

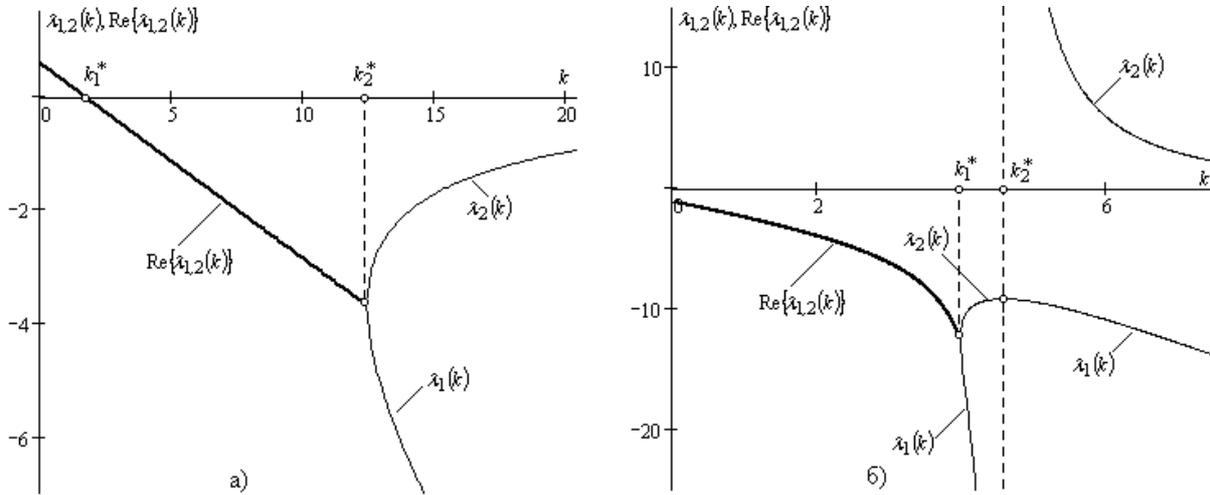


Рис. 5. Зависимости собственных значений матрицы Якоби состояний равновесия динамической системы (6)

Анализ зависимостей (рис.5) показывает, что существует два критических значения  $k_1^*$  и  $k_2^*$  параметра  $k$ . Когда  $k < k_1^*$  положение равновесия  $A$  является неустойчивым фокусом. В точке  $A$  при  $k = k_1^*$  возникает субкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Если  $k_1^* < k < k_2^*$ , то положение равновесия является устойчивым фокусом, а при  $k > k_2^*$  – является устойчи-

вым узлом. Когда  $k < k_1^*$  точка  $B$  является устойчивым фокусом, при  $k_1^* < k < k_2^*$  – устойчивым узлом, а при  $k > k_2^*$  является седловой особой точкой.

Отметим, что при приближении друг к другу положений равновесия  $A$  и  $B$  предельный цикл релаксационных автоколебаний уменьшается (рис.6).

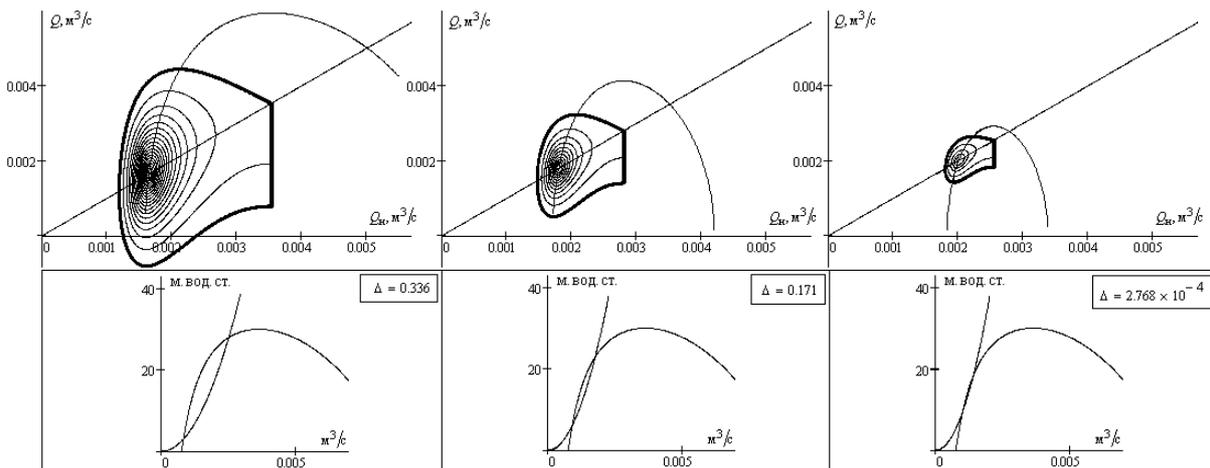


Рис. 6. Деформация предельного цикла релаксационных автоколебаний при уменьшении  $\Delta = Q_2^* - Q_1^*$

Когда  $\Delta = 0$  неподвижные точки  $A$  и  $B$  сливаются в одну. При этом в гидросистеме (рис.2) существует единственный равновесный режим, определяемый неподвижной точкой  $A = B$ . Характер устойчивости данного режима определяется собственными зна-

чениями (8). В этом случае  $\lambda_{1,2}^{(0)} = \lambda_{1,2}^{(1)} = \lambda_{1,2}$ . Причем, т.к.  $H'(\xi) = 2(k + k_c)\xi$ , где  $\xi \equiv Q_1^* = Q_2^*$ , то  $\sigma_1^{(0)} = \sigma_1^{(1)} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{B}{2k\xi} - 2k_a\xi$ . Таким

образом, при  $k < k^* = \frac{Z}{2\xi}$ , где  $Z = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$  – волновое сопротивление, выполняется неравенство  $\lambda_2(k) > 0$  и равновесный режим является неустойчивым (неподвижная точка  $A=B$  является неустойчивым узлом). Соответственно при  $k > k^*$  справедливо неравенство  $\lambda_2(k) < 0$ , т.е. неподвижная точка  $A=B$  является устойчивым узлом и определяемый ею равновесный режим является устойчивым.

### Выводы

Получена математическая модель нестационарных движений жидкости в замкнутой гидросистеме, включающей одноступенчатый центробежный насос с акустической емкостью (воздушной подушкой) на его входе, который работает в кавитационном режиме перед срывом подачи. Установлен характер перестроек режимов функционирования данной динамической системы при варьировании ее волнового сопротивления и коэффициента гидравлических потерь на подводящей магистрали. Установлено существенное отличие топологической структуры фазовых портретов динамических систем для гидросистем с емкостью на подводящей [6] и напорной магистралях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чебаевский В. Ф. Кавитационные характеристики высокооборотных шнеко-центробежных насосов / В. Ф. Чебаевский, В. И. Петров. — М. : Машиностроение, 1973. — 152 с.
2. Вильнер Я. М. Лабораторный практикум по гидравлике и гидравлическим машинам (насосам) / Я. М. Вильнер, И. П. Вопнярский. — Минск : Высшая школа, 1967. — С. 169 — 170.
3. Гоцуленко В. В. Бифуркации динамических режимов в гидросистеме, включающей центробежный насос / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Математическое моделирование. — 2012. — № 1 (26). — С. 35 — 38.
4. Водяницкий В. П. Возникновение автоколебаний в гидравлической системе при подаче свободного газа на вход в насос / Водяницкий В. П. // В кн. Кавитационные автоколебания в насосных системах. — К. : Наукова думка, 1976. — Ч. 1. — С. 86 — 95.
5. Гоцуленко В. Н. Экспериментальное исследование автоколебаний в системе, включающей лопастной насос с монотонно убывающей напорной характеристикой / В. Н. Гоцуленко, Н. Н. Гоцуленко // Энергомашиностроение. — 1978. — №5. — С. 44 — 45.
6. Гоцуленко В. В. Особенность автоколебаний (помпажа) лопастных насосов / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Инженерно-физический журнал. — 2012. — Т. 85, № 1. — С. 117 — 122.
7. Гоцуленко В. В. Об особенностях помпажа шнеко-центробежного насоса / В. В. Гоцуленко // Системные технологии. — 2002. — № 3(20). — С. 3 — 7.
8. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение / Раушенбах Б. В. — М. : Физматгиз, 1961. — 500 с.
9. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — Москва — Ижевск : институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.
10. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах : Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / Анищенко В. С. — М. : Наука, 1990. — 312 с.

пост.27.09.12