4. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1967. – №2. – С. 9-10.
5. Зеленцов Д.Г., Радуль О.А., Короткая Л.И. Анализ применимости аналитических формул при решении задач долговечности стержневых корродирующих конструкций// Системные технологии. 2007 - №50. – С. 121-129.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – Москва: Радио и связь, 1982. – 432 с.

пост. 23.12.2010

К расчету термических напряжений при конвективном нагреве шара

ГОРБУНОВ А.Д.

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве шаровых тел.
Ключевые слова: аналитический расчет, нагрев, термическое напряжение, шар.

Розроблено інженерну методику аналітичного розрахунку термічних напружень при конвективному нагріванні кульових тіл.
Ключові слова: аналітичний розрахунок, термічні напруження, нагрівання, куля.

The article represents the developed engineering technique of thermal tension during convective heating of spherical bodies.
Key words: analytical calculations, heating, thermal tension, sphera.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Без знания температурных полей и термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить рациональные энерго- и материалосберегающие тепловые и температурные режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, сушильных установок, химических реакторов и т. п. При значительных скоростях нагрева в шаре могут возникать термические напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_c

$$\tilde{\sigma}(X,\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta(X,\mathrm{Fo}), \qquad (1)$$

на поверхности при X=1

$$\tilde{\sigma}_n(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_n(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \qquad (2)$$

и в центре пластины при X=0

$$\tilde{\sigma}_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \qquad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \le \tilde{\sigma} \le 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0 /(1-\nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры:
в любой точке $X = x/R_0$

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \qquad (4)$$

на поверхности

$$\theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}}, \qquad (5)$$

в центре

$$\theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}} \qquad (6)$$

и среднемассовая

$$\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}}, \qquad (7)$$

где $\theta(\mathrm{Fo}) = (t(\tau) - t_c)/\Delta t_0$; $\Delta t_0 = t_0 - t_c$; t_0 — начальная температура тела, °C; Fo= $a\tau/R_0^2$- число Фурье; Bi=$\alpha R_0/\lambda$ – число Био; $P_n(\mu_n) = 2\mathrm{Bi}/\left[\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}+1) + \mu_n^2\right]$ – тепловая амплитуда; $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n)/\cos\mu_n$; $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot \mathrm{Bi}/\mu_n^2$; $C_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$; $D_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - P_n(\mu_n)$; $U_n(x) = \cos\mu_n X/\cos\mu_n$; μ_n – собственные числа, определяемые характеристическим уравнением:

$$\mathrm{ctg}\mu_n = \mu_n/\mathrm{Bi}. \qquad (8)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), можно получить формулу связи между термонапряжениями в центре и на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(\mathrm{Fo}) = -\Delta\theta(\mathrm{Fo}) + \tilde{\sigma}_{\text{ц}}(F_0), \qquad (9)$$

где относительный перепад температур получается путем вычитания из (5) уравнения (6)

$$\Delta\theta(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{п}} - \theta_{\text{ц}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \qquad (10)$$

в котором $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$.

Из анализа уравнений (2), (3), (9) и (10) следует, что динамика изменения напряжений во времени аналогична изменению температурной разности, т.е. резко возрастают, достигая максимального значения при числах Фурье $\mathrm{Fo}_{\max}$=0,05…0,50, а затем постепенно падают, т.е. носят колоколообразный характер.

На практике иногда важнее знать не всю динамику изменений напряжений во времени, а только их максимально возможные характерные величины. Целью данной работы является аналитическое определение указанных величин для шаровых тел.

Изложение материалов исследования. Задачу определения термических напряжений в шаре будем решать в предположении такой же их зависимости от температур на поверхности, в центре и среднемассовой как для плоских тел.

Для шаровых тел будут справедливы уравнения (1)...(7), (9), (10) для пластины с заменой координатной функции $U(X)$, входящей в уравнение (4) $U_n(X)=$ $=\left[\sin(\mu_n X)/\sin\mu_n\right]\cdot \mu_n/(\mu_n X)$, тепловых амплитуд $P_n(\mu_n)=2\mathrm{Bi}/\left[-\mathrm{Bi}B+\mu_n^2\right]$ для уравнения (5), $A_n(\mu_n)=$ $=P_n(\mu_n)\cdot \mu_n/\sin\mu_n$ — для (6) и $M_n(\mu_n)=3\mathrm{Bi}/\mu_n^2$ — для (7). Теперь μ_n вместо (8) определяется из характеристического уравнения:

$$\mathrm{ctg}\mu_n = B/\mu_n\,, \tag{11}$$

где $B=1-\mathrm{Bi}$.

Дифференцируя уравнения (2), (3) и (10) по времени, приравнивая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулы для расчёта максимальных времен Фурье:

для максимального термического напряжения на поверхности

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.п}} = (1/a)\ln(1/b_{\text{п}})\,, \tag{12}$$

перепада температур

$$\mathrm{Fo}_{\max} = \frac{1}{a}\ln\frac{1}{b} \tag{13}$$

и термонапряжения в центре

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}} = (1/a)\ln(1/b_{\text{ц}})\,, \tag{14}$$

где $a=\mu_2^2-\mu_1^2$; $b_{\text{п}}=-\delta D_1/D_2$; $b_{\text{ц}}=-\delta C_1/C_2$; $b=-\delta E_1/E_2$; $\delta=(\mu_1/\mu_2)^2$.

Здесь и далее под E_i понимается амплитуда $E_i(\mu_i)$.

Подставляя Fo_{max} из (13) в уравнение (10), получим максимальный перепад температур с учётом двух членов ряда:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_m &= E_1 e^{-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{max}}\left(1+E_2\big/E_1\cdot e^{-a\mathrm{Fo}_{max}}\right)= \\ &= (1-\delta)E_1(\mu_1)e^{-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{max}}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

При выводе (15) было учтено, что согласно уравнению (13) $\exp(-a\mathrm{Fo}_{max})=b$.

По аналогии подставляя $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}$ в уравнение (2), получим максимальное термическое напряжение на поверхности

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.п}} = (1-\delta)D_1\cdot e^{-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}} \tag{16}$$

и после подстановки (14) в (3) — максимальное напряжение в центре шара

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.ц}} = (1-\delta)C_1 e^{-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}}}\,. \tag{17}$$

Анализ полученных решений. Формулы (12)…(14) однотипны и могут быть описаны одним уравнением

$$\mathrm{Fo}_{m.j} = (1/a)\ln(1/b_j)\,. \tag{18}$$

При $j=1,3$ имеем расчет напряжений на поверхности и в центре, а при $j=2$ — перепада температур. После определения максимальных времен можно найти соответствующие температуры при этих числах Фурье с учетом двух членов ряда.

Подставляя $\mathrm{Fo}_{m.j}$ в уравнение (5), получим температуру поверхности

$$\theta_{\text{п}.j} = (P_1+b_jP_2)\exp\left(-\mu_1^2\cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \tag{19}$$

в (6) — температуру центра

$$\theta_{\text{ц}.j} = (C_1+b_jC_2)\exp\left(-\mu_1^2\cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \tag{20}$$

в соотношение (7) — среднемассовую

$$\theta_{\text{ср}.j} = (M_1+b_jM_2)\exp\left(-\mu_1^2\cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \tag{21}$$

и в (10) перепад температур

$$\Delta\theta_j = (E_1+b_jE_2)\exp\left(-\mu_1^2\cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right). \tag{22}$$

Наибольшую и основную трудность при практических расчётах по уравнениям (1)…(22) представляет определение по соотношению (11) бесчисленного множества корней. В работе [2] приведена общая приближенная формула расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}\,, \tag{23}$$

где $D=k\mathrm{Bi}/m$; $m=1+\mathrm{Bi}/(k+2)$ — коэффициент термической массивности; $\gamma=\left(1+\sqrt{1+4\rho}\right)/2$; $\rho=D^2/\left[k(k+2)^2(k+4)\right]$; k — коэффициент геометрической формы, равный 1 – для пластины, 2 – цилиндра и 3 – шара. При малых ρ число $\gamma\cong 1+\rho$.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева – при больших и малых числах Био [3].

При малых числах Био (Bi < 3)

$$\mu_n = b_n - z_n\,, \tag{24}$$

где $z_n=G_1/\gamma_n$; $G_1=B/b_n$; $\rho_n=(2+\mathrm{Bi})B/\left(3b_n^2\right)$; $b_n=(2n-1)\pi/2$; $n=1,2,3,...$

При больших числах Био ($\mathrm{Bi}\ge 3$)

$$\mu_n = a_n - G_2/\gamma_n \approx a_n(1-\beta/\gamma_n)\,, \tag{25}$$

где $G_2=\beta a_n$; $\rho_2=G_2^2/3$; γ — см. уравнение (23); $a_n=n\pi$; $\beta=1/\mathrm{Bi}$.

В двух предельных случаях — малые и большие числа Био, полученные решения значительно упрощаются. Предварительно упростим расчет тепловой амплитуды $A(\mu_n)$. Используя тригонометрическое тождество $1/\sin x=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}$ и характеристическое уравнение (11), можно записать

$$\mu_n/\sin\mu_n = (-1)^{n+1}\cdot\sqrt{\mu_n^2+B^2}\,. \tag{26}$$

С учетом последнего выражения тепловая амплитуда, входящая в уравнение (6) определения температуры центра шара, станет

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n)(-1)^{n+1}\sqrt{\mu_n^2 + B^2} \ . \qquad (27)$$

Теперь получим упрощенные выражения для других амплитуд в двух предельных случаях.

Асимптотика при малых числах Био. Первый корень уравнения (11) вычисляем по соотношению (23) при $\gamma \cong 1$ и $m = 1 + \mathrm{Bi}/5$, а второй — по (24). Тогда отношение собственных чисел

$$\delta = (\mu_1/\mu_2)^2 = D\Big/\left[\gamma b_2^2(1-\varepsilon_2)^2\right] \approx 4\mathrm{Bi}\cdot(1-\mathrm{Bi}/5)\Big/\left(3\pi^2\right), \qquad (28)$$

где $\varepsilon_2 = B/(b_2\gamma_2)$; $\gamma_2 \approx 1+\rho_2$; $\rho_2 = -(2+\mathrm{Bi})\cdot B\Big/\left(3b_2^2\right)$.

Здесь и далее, для оценки погрешности получаемых приближенных решений, имеет смысл привести величины при числе $\mathrm{Bi} = 1\ (B=0)$, когда точные значения корней: $\mu_n^{\text{т}}(1) = b_n = (2n-1)\pi/2$. Расчет по уравнению (23) при $\mathrm{Bi}=1$ первого корня дает $\mu_1(1) \cong 1{,}5708$ с погрешностью $\Pi_{\mu_1} = 0{,}06\,\%$ по сравнению с точным $\mu_1^{\text{т}}(1) = \pi/2$. Отношение корней $\delta^{\text{т}}(1) = 1/9$, а расчет по (28) $\delta(1) \cong 0{,}1121$ с $\Pi_\delta = 0{,}9\,\%$.

Разность квадратов корней $a = \mu_2^2 - \mu_1^2 = b_2^2(1-\varepsilon_2)^2 - D/\gamma \approx 9\pi^2/4$. При этом $a^{\text{т}}(1) = 2\pi^2$.

Первая амплитуда, входящая в уравнение (5) температуры поверхности

$$P_1 = 2/(-B + 3/m\gamma) \approx 1/(m\gamma) \approx 1 - \mathrm{Bi}/5 . \qquad (29)$$

По аналогии вторая $P_2 = 2/(-B + 1/m_2)$ и любая

$$P_n(\mu_n) = 2/(-B + 1/m_n), \qquad (30)$$

где $m_n = \mathrm{Bi}/\mu_n^2$ — n-ый коэффициент термической массивности.

При $\mathrm{Bi}=1$ $P_1^{\text{т}}(1) = 2\mathrm{Bi}/b_1^2 = 8/\pi^2 = 0{,}81057$ и $P_2^{\text{т}}(1) = P_1^{\text{т}}(1)/9 \cong 0{,}09$.

Интересно отметить, что в отличие от других амплитуд зависимость P_2 от числа Био носит немонотонный характер, возрастает от нуля до максимального значения $P_{2\,max} \cong 0{,}2$ при числе $\mathrm{Bi} \cong 5$, а затем уменьшается до нуля, оставаясь меньше $P_1(\mathrm{Bi})$.

Введем отношение поверхностных амплитуд

$$\begin{aligned}\eta = P_2/P_1 &= \left(-B + \mu_1^2/\mathrm{Bi}\right)/(-B + 1/m_2) = \\ &= (\delta - m_2 B)/(1 - m_2 B).\end{aligned} \qquad (31)$$

При числе $\mathrm{Bi}=0$ $\eta(0) = \delta(0) = 0$, а при $\mathrm{Bi}=1$ $\eta^{\text{т}}(1) = \delta^{\text{т}}(1) = 1/9$.

Амплитуда A_1 согласно уравнению (27) и с учетом того, что при малых аргументах $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$:

$$A_1 = P_1\sqrt{\mu_1^2 + B^2} \approx 1 + K_A\cdot\mathrm{Bi}\ , \qquad (32)$$

где $K_A = k/2(k+2) = 3/10$.

Вторая амплитуда

$$A_2 = -P_2\sqrt{\mu_2^2 + B^2} \approx -P_2\mu_2\left(1 + B^2/2\mu_2^2\right). \qquad (33)$$

Значения при $\mathrm{Bi}=1$: $A_1^{\text{т}}(1) = P_1^{\text{т}}(1)\cdot b_1 = 4/\pi = 1{,}27323$; $A_2^{\text{т}}(1) = -P_2^{\text{т}}(1)\cdot b_2 = -A_1^{\text{т}}/3 = -4/3\pi = -0{,}424413$.

Для среднемассовой температуры:

$$M_1 = P_1\cdot 3\mathrm{Bi}/\mu_1^2 = P_1 m\gamma \approx \left(1 - \mathrm{Bi}^2/25\right) \text{ и } M_2 = 3P_2\cdot m_2 . \qquad (34)$$

При $\mathrm{Bi}=1$: $M_1^{\text{т}}(1) = 3P_1^{\text{т}}/b_1^2 = 96/\pi^2 = 0{,}985534$ и $M_2^{\text{т}}(1) = M_1^{\text{т}}/81 = 0{,}012167$.

Для перепада температур по уравнению (10)

$$E_1 = P_1 - A_1 = P_1\left(1 - \sqrt{\mu_1^2 + B^2}\right) \approx -\mathrm{Bi}(1 - \mathrm{Bi}/15)/2\ , \qquad (35)$$

$E_2 = P_2\left(1 + \sqrt{\mu_2^2 + B^2}\right)$. При $\mathrm{Bi}=1$: $E_1^{\text{т}}(1) = P_1^{\text{т}}(1 - b_1) = -0{,}46267$ и $E_2^{\text{т}}(1) = P_2^{\text{т}}(1 + b_2) = 0{,}514476$.

Для термических напряжений в центре шара по (3)

$$C_1 = M_1 - A_1 = P_1\left(3\mathrm{Bi}/\mu_1^2 - \sqrt{\mu_1^2 + B^2}\right) \approx P_1(m\gamma - \mu_1). \qquad (36)$$

$$C_2 = M_2 - A_2 = P_2\left(3m_2 + \sqrt{\mu_2^2 + B^2}\right).$$

При числе $\mathrm{Bi}=1$: $C_1^{\text{т}}(1) = P_1^{\text{т}}\left(3/b_1^2 - b_1\right) = -0{,}287705$ и $C_2^{\text{т}}(1) = P_2^{\text{т}}\left(3/b_2^2 + b_2\right) = 0{,}436580$.

Для термонапряжений на поверхности

$$D_1 = M_1 - P_1 = P_1\left(3Bi/\mu_1^2 - 1\right) \cong P_1(m\gamma - 1) \approx P_1\cdot\mathrm{Bi}/5\ , \qquad (37)$$

$$D_2 = M_2 - P_2 = P_2(3m_2 - 1).$$

При $\mathrm{Bi}=1$: $D_1^{\text{т}}(1) = P_1^{\text{т}}\left(3/b_1^2 - 1\right) = 0{,}17496$ и $D_2^{\text{т}}(1) = P_2^{\text{т}}\left(3/b_2^2 - 1\right) = -0{,}077896$.

С целью проверки амплитуды D можно использовать равенство $D = C - E$.

Выражения для расчета максимальных времен по уравнению (18) также упростятся.

Коэффициент поверхности $(j=1)$

$$b_{\text{п}} = -\delta D_1/D_2 = -\delta(m\gamma - 1)/[\eta(3m_2 - 1)] \approx 3\mathrm{Bi}/10\ ,$$

для перепада температур $(j=2)$

$$\begin{aligned} b &= -\delta E_1/E_2 = \\ &= -\delta/\eta\cdot\left(1 - \sqrt{\mu_1^2 + B^2}\right)\Big/\left(1 + \sqrt{\mu_2^2 + B^2}\right) \approx Bi/10, \end{aligned} \qquad (38)$$

где отношение $\delta/\eta \cong (1 - m_2 B)/(1 - m\gamma/3) \approx 3/2$ и центра $(j=3)$

$$b_{\text{ц}} = -\delta C_1/C_2 = (\delta\cdot 3\mathrm{Bi}/10)\Big/\left[\eta\left(3\mathrm{m}_2 + \sqrt{\mu_2 + B^2}\right)\right] \approx \mathrm{Bi}/8\ .$$

При числах $\mathrm{Bi}=1$ коэффициенты: $b_{\text{п}}^{\text{т}}(1) = -\left(3/b_1^2 - 1\right)\Big/\left(3/b_2^2 - 1\right) = 0{,}249571$; $b^{\text{т}}(1) = (b_1 - 1)/(b_2 + 1) = 0{,}09992$; $b_{\text{ц}}^{\text{т}}(1) = -\left(3/b_1^2 - b_1\right)\Big/\left(3/b_2^2 + b_2\right) = 0{,}073222$.

Результаты расчетов при $\mathrm{Bi}=1$ максимальных времен Fo_j по формуле (18) и соответствующих этим временам максимальных термических напряжений на поверхности по уравнению (16), $\Delta\theta_m$ по (15) и термонапряжений в центре шара по (17) приведены в табл. 1. Там же представлены данные при $\mathrm{Bi} = \infty$.

Таблица 1. **Коэффициенты** b_j**, максимальные времена** Fo_j**,** $\widetilde{\sigma}_{\text{м.п.}}$**,** $\Delta\theta_m$ **и** $\widetilde{\sigma}_{\text{м.ц.}}$ **при** $\mathrm{Bi}=1$ **и** ∞**.**

j	Число Био $\mathrm{Bi}=1$			$\mathrm{Bi}=\infty$		
	b_j	$\mathrm{Fo}_{m.j}$	$\widetilde{\sigma}_{m.j}$	b_j	$\mathrm{Fo}_{m.j}$	$\widetilde{\sigma}_{m.j}$
1	0,249570	0,070318	0,13075	1	0	0
2	0,099922	0,117057	–0,30809	1/4	0,04682	–0,9449
3	0,073222	0,132440	–0,18445	0,16172	0,06153	–0,5688

Анализ уравнений (18) и (38) позволяет сделать вывод о том, что максимум величин наступает в последовательности $j=1,2,3$ и с ростом числа Био эти времена уменьшаются.

Для оценки различия максимальных времен составим их разности:

$$\Delta\mathrm{Fo}_1=\mathrm{Fo}_{max}-\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}=0{,}117-0{,}070=0{,}0467\,;$$

$$\Delta\mathrm{Fo}_2=\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}}-\mathrm{Fo}_{max}=0{,}129-0{,}117=0{,}0125\,;$$

и

$$\Delta\mathrm{Fo}_3=\Delta\mathrm{Fo}_1+\Delta\mathrm{Fo}_2=0{,}0467+0{,}0125=0{,}0592\,. \tag{39}$$

Из (18) и табл. 1 следует, что с ростом числа Био различия максимальных времен увеличиваются, вплоть до $\Delta\mathrm{Fo}_3=0{,}0615$ – см. уравнение (47).

На практике технологов интересует вопрос — насколько термические напряжения на поверхности тела больше, чем в его середине. Обозначим их отношение $R=\sigma_{\text{п}}/\sigma_{\text{ц}}$. Наиболее просто R можно найти в стадии регулярного режима нагрева (PPH), который наступает при числах Фурье $\mathrm{Fo}>0{,}3$ и когда вместо бесконечных сумм в уравнениях (2)…(10) можно ограничиться одним членом ряда. Тогда, деля уравнение (2) на (3) и учитывая упрощенные соотношения (36) и (37), получим

$$\begin{aligned}&R=\widetilde{\sigma}_{\text{п}}/\widetilde{\sigma}_{\text{ц}}=D_1/C_1=\\&=\left(3\mathrm{Bi}/\mu_1^2-1\right)\Big/\left(3\mathrm{Bi}/\mu_1^2-\sqrt{\mu_1^2+B^2}\right)\approx\\&\approx 2/\left[3(1+2\mathrm{Bi}/3)\right].\end{aligned} \tag{40}$$

При числе $\mathrm{Bi}=0$ $R(0)=-2/k=-2/3$, а при $\mathrm{Bi}=1$ $R^{\text{т}}(1)=\left(3/b_1^2-1\right)\Big/\left(3/b_1^2-b_1\right)=-0{,}6081$.

Таким образом, в отличие от процесса нагрева плоских тел, когда при $k=1$ $R(0)=-2$, термические напряжения на поверхности тела в 2 раза больше термонапряжений в центре, при нагреве шаровых тел уже напряжения в центральных точках тела в 1,5 раза больше, чем на поверхности.

Асимптотика при больших числах Био. Теперь корни μ_n находим по уравнению (25). Тогда отношение

$$\begin{aligned}&\delta=\left[a_1(1-\beta/\gamma_1)\right]^2\Big/\left[a_2(1-\beta/\gamma_2)\right]^2\approx\\&\approx\left(1-2\beta(1/\gamma_1-1/\gamma_2)\right)/4,\end{aligned} \tag{41}$$

где $\gamma_1\cong 1+\rho_1$; $\gamma_2\cong 1+\rho_2$; $\rho_1=a_1^2\beta^2/3$; $\rho_2=4\rho_1$; $a_1=\pi$; $a_2=2\pi$; $a_n=n\pi$.

В предельном случае, при $\mathrm{Bi}=\infty$ отношение $\delta_\infty=\delta(\infty)=1/4$.

Разность квадратов корней

$$\begin{aligned}&a=\pi^2\left[4(1-\beta/\gamma_1)^2-(1-\beta/\gamma_2)^2\right]\approx\\&\approx 3\pi^2\left[1-2\beta(4/\gamma_1-1/\gamma_2)/3\right].\end{aligned} \tag{42}$$

Амплитуды:

$$P_1=2\beta\Big/\left(1-\beta+z^2\right)\approx 2\beta\left(1+\beta-z^2\right)\approx 2\widetilde{\beta}\,;$$

$$P_2=2\beta\left(1+\beta-4z^2\right)\approx 2\widetilde{\beta}\cong P_1\,,$$

где $z=\mu_1/\mathrm{Bi}=a_1(1-\beta/\gamma_1)\beta$; $\widetilde{\beta}=\beta(1+\beta)$.

$$A_1=A_{1.\infty}\cdot(1+\beta)\sqrt{1-z^2}\approx A_{1.\infty}\cdot(1+\beta)\left(1-z^2/2\right);$$

$$A_2=A_{2.\infty}\cdot(1+\beta)\sqrt{1-4z^2}\approx A_{2.\infty}\cdot(1+\beta)\left(1-2z^2\right),$$

где $A_{1.\infty}=2$ и $A_{2.\infty}=-A_{1.\infty}=-2$ — амплитуды при $\mathrm{Bi}=\infty$.

$$M_1=M_{1.\infty}(1+\beta)\Big/(1-\beta/\gamma_1)^2\,;\quad M_2=M_{2.\infty}(1+\beta)\Big/(1-\beta/\gamma_2)^2\,,$$

где $M_{1.\infty}=6/\pi^2=0{,}607927$; $M_{2.\infty}=M_{1.\infty}/4$.

$$C_1=M_1-A_1\,;\; C_{1.\infty}=M_{1.\infty}-A_{1.\infty}=6/\pi^2-2=-1{,}392073\,;$$

$$C_2=M_2-A_2\,;\; C_{2.\infty}=M_{2.\infty}-A_{2.\infty}=2{,}151982\,.$$

$$E_1=P_1-A_1\,;\; E_{1.\infty}=-A_{1.\infty}\,;$$

$$E_2=2\widetilde{\beta}-A_{2.\infty}(1+\beta)\sqrt{1-4z^2}\,;\; E_{2.\infty}=-A_{2.\infty}\,.$$

$$D_1=M_1-P_1\,;\; D_{1.\infty}=M_{1.\infty}\,;$$

$$D_2=M_2-P_2\,;\; D_{2.\infty}=M_{2.\infty}\,.$$

Теперь коэффициенты для расчета максимальных времен примут вид:

$$b_{\text{п}}=\frac{\delta\left[M_{1.\infty}(1+\beta)\cdot(1+2\beta/\gamma_1)-2\widetilde{\beta}\right]}{-\mathrm{M}_{2.\infty}(1+\beta)\cdot(1+2\beta/\gamma_2)+2\widetilde{\beta}}\,; \tag{43}$$

$$b=\frac{\delta\left[A_{1.\infty}(1+\beta)\sqrt{1-z^2}-2\widetilde{\beta}\right]}{-\mathrm{A}_{2.\infty}(1+\beta)\sqrt{1-4z^2}+2\widetilde{\beta}}\,; \tag{44}$$

$$b_{\text{ц}}=\frac{\delta\left[A_{1.\infty}\sqrt{1-z^2}-M_{1.\infty}\cdot(1+2\beta/\gamma_1)\right]}{-\mathrm{A}_{2.\infty}\sqrt{1-9z^2}+M_{2.\infty}\cdot(1+2\beta/\gamma_2)}\,; \tag{45}$$

В предельном случае при $\mathrm{Bi}=\infty$:

$$b_{\text{п}.\infty}=-\delta_\infty D_{1.\infty}/D_{2.\infty}=-M_{1.\infty}/(4M_{2.\infty})=-1\,;$$

$$b_\infty=-\delta_\infty A_{1.\infty}/A_{2.\infty}=1/4\,;$$

$$b_{\text{ц}.\infty}=-\delta_\infty C_{1.\infty}/C_{2.\infty}=0{,}161720. \tag{46}$$

Так как $b_{\text{п}.\infty}=-1$ лишено физического смысла, следует взять $b_{\text{п}.\infty}=|1|$.

Тогда наименьшие максимальные времена согласно (18) при $a_\infty=3\pi^2$ будут:

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.п}.\infty}=0\,,\quad \mathrm{Fo}_{max.\infty}=\left(1/3\pi^2\right)\ln 4=0{,}04682$$

и

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}=\left(1/3\pi^2\right)\ln\left(1/b_{\text{ц}.\infty}\right)=0{,}061532\,. \tag{47}$$

Подставляя (47) в уравнение (3), получим максимально возможное термическое напряжение в центре шара

$$\widetilde{\sigma}_{\text{м.ц}.\infty}=(1-\delta_\infty)C_{1.\infty}\cdot exp\left(-a_1^2\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}\right)=-0{,}568824\,. \tag{48}$$

Величины $b_{j.\infty}$, вычисленные по уравнению (46), времена $\mathrm{Fo}_{j.\infty}$ согласно (47) и максимальные термические напряжения $\widetilde{\sigma}_{m.j.\infty}$ приведены в табл. 1.

Термонапряжение на поверхности при времени $\mathrm{Fo}_{\text{м.ц.}\infty}$

$$\tilde{\sigma}_{\text{п.м.}\infty} = D_{1.\infty}\, exp\left(-a_1^2 \mathrm{Fo}_{\text{м.ц.}\infty}\right) + $$
$$+ D_{2.\infty}\, exp\left(-4a_1^2 \mathrm{Fo}_{\text{м.ц.}\infty}\right) = 0{,}344602$$

и отношение напряжений в этот момент времени

$$R = \sigma_{\text{п}} / \sigma_{\text{ц}} = 0{,}3446/(-0{,}5688) = -0{,}6058 .$$

Последняя несколько больше, чем отношение $R_\infty = D_{1.\infty}/C_{1.\infty} = 0{,}6079/1{,}392 = -0{,}4367$, которое получено для стадии РРН с учетом одного первого члена ряда.

Следует отметить, что если приближенно считать $R = -2/k$, то из уравнения (9) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_n = -K_\sigma \cdot \Delta\theta(\mathrm{Fo}), \qquad (49)$$

где $K_\sigma = 2/(2+k)$.

Это соотношение при $k=1$ и 2 полностью совпадает с формулами Н.Ю. Тайца [4] для максимальных термических напряжений

$$\sigma_{max}(\tau) = K_\sigma \beta E\, \Delta t(\tau)/(1-\nu) . \qquad (50)$$

Из анализа уравнения (43) вытекает, что коэффициент $b_{\text{п}}$ меняет знак по причине изменения знака амплитуды D_2, изменяющейся от $-8\mathrm{Bi}/9\pi^2$ при малых числах Био до $D_{2.\infty} = +0{,}152$. Из условия равенства нулю D_2 можно получить граничное число $\mathrm{Bi}_{\text{м}} = 15$ выше которого имеем случаи нагрева термически «массивного» тела. Таким образом, при числах $\mathrm{Bi} < \mathrm{Bi}_{\text{м}}$ для определения времени $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}$ можно применять формулу (12) в которой $b_{\text{п}}$ определяется по уравнению (43), а при $\mathrm{Bi} > \mathrm{Bi}_{\text{м}}$ коэффициент $b_{\text{п}}$ становится отрицательным и нельзя пользоваться формулой (12). Возникшую ситуацию можно объяснить следующим образом. Формулы (12)…(22) получены с учетом всего двух членов ряда. С ростом числа Био максимальное время $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}$ уменьшается, вплоть до 0 при $\mathrm{Bi} = \infty$.

При очень малых числах Фурье $(\mathrm{Fo} < 0{,}1)$ расчёт температур по уравнениям (2)…(10) затруднителен из-за необходимости учета большого количества членов ряда, ввиду его плохой сходимости. В этом случае для расчёта поверхностной температуры можно использовать формулы, полученные методом операционного исчисления в работе [5]. Объединяя эти формулы в одно уравнение для простых тел, будем иметь:

$$\theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = 1 - H\big(1 - \varphi(y)\big), \qquad (51)$$

где $H = \mathrm{Bi}/G$; $G = \mathrm{Bi} - (k-1)/2$; $y = G\sqrt{\mathrm{Fo}} \equiv \mathrm{Ti}$ – модифицированное время, число Тихонова; $\varphi(y) = e^{y^2} erfcy$; $erfcy = (1 - erfy)$ — дополнительный интеграл вероятностей; $erfy = p \cdot \int\limits_0^y e^{-x^2} dx$ — функция ошибок Гаусса; $p = 2/\sqrt{\pi}$; k — фактор формы, см. уравнение (23).

Зная температуру поверхности и используя методику [1], можно найти среднемассовую температуру

$$\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = 1 - k \int\limits_0^{\mathrm{Fo}} \mathrm{Bi} \cdot \theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) d\mathrm{Fo} = $$
$$= 1 - k\big[(1-H)\cdot \mathrm{Fo} + H\Phi(y)/G\big], \qquad (52)$$

где $\Phi(y) = G^2 \int\limits_0^{\mathrm{Fo}} \varphi(y) d\mathrm{Fo} = \varphi(y) + py - 1$.

Сопоставление приближенных зависимостей (51) и (52) с точными решениями (5) и (7) показало, что погрешность уравнения (52) при расчете средней температуры гораздо меньше, чем уравнения (51) для температуры поверхности.

Так, например, в случае нагрева при $\mathrm{Bi} = 1$ формулой (51) можно пользоваться с относительной погрешностью $\delta t_{\text{п}} = \left(t_{\text{п}}^{\text{точное}} - t_{\text{п}}^{\text{прибл}}\right) \cdot 100 / t_{\text{п}}^{\text{точн}}$ менее $+5\,\%$ при времени начальной стадии от 0 до $\mathrm{Fo}_{\text{н.с}} = 0{,}4$, а формулой (52) с погрешностью $\delta t_{\text{ср}} \le -5\%$ до момента времени $\mathrm{Fo}_{\text{н.с}} = 0{,}53$.

Знаки перед погрешностями δt означают, что температура поверхности при расчете по уравнению (51) занижена, а средняя температура по (52) — завышена по сравнению с точными значениями. При расчетах процессов охлаждения знаки погрешностей поменяются на обратные.

Решения (51) и (52) можно упростить путем разложения функции $\varphi(y)$ в ряд при малых ($y < 1$):

$$\varphi(y) = 1 - py + y^2 - \frac{2p}{3} y^3 + \frac{y^4}{2!} \ldots \qquad (53)$$

и при больших ($y >> 1$) аргументах:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, y}\big[1 - u(1 - 3u(1 - 5u(1 - \ldots)))\big], \qquad (54)$$

где $u = 1\Big/\left(2y^2\right)$.

Графическое решение уравнений (51) и (52) приведено на рисунке 1.

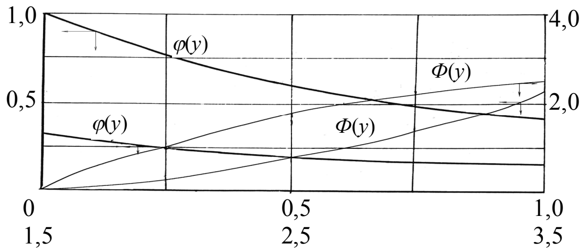

Рис. 1. Зависимость функций φ и Φ от времени y

Интересно отметить, что, в отличие от уравнения (5), где температура поверхности зависит от двух величин – числа Био и Фурье, из уравнения (51) следует, что $\theta_{\text{п}}$ зависит только от одного параметра — числа Тихонова $\mathrm{Ti} = G\sqrt{\mathrm{Fo}}$. Вместо семейства кривых (5) на рисунке 1 имеем всего одну линию. Решения, подобные (51), когда исчезает зависимость процесса от какого-либо параметра, принято называть автомодельными.

При числах $\mathrm{Bi} = 1$ для шара или $1/2$ для цилиндра коэффициент $G = 0$ и в расчетных соотношениях (51) и (52) следует раскрывать неопределенность типа $0/0$. Используя разложение (53) функции $\varphi(y)$ при малых аргументах, из уравнения (51) получим для температуры на поверхности:

$$\theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = 1 - p\mathrm{Bi}_* \sqrt{\mathrm{Fo}} \qquad (55)$$

и для среднемассовой из (52)

$$\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = 1 - k\mathrm{Bi}_*\mathrm{Fo}\left(1 - 2p\mathrm{Bi}_*\sqrt{\mathrm{Fo}}/3\right), \qquad (56)$$

где $\mathrm{Bi}_* = 1$ и $k = 3$ для шара и $\mathrm{Bi}_* = 1/2$ и $k = 2$ — для длинного цилиндра.

Таким образом, при малых временах процесса ($\mathrm{Fo} < 0{,}1$) вместо уравнения (5) будет (51), вместо (7) — (52), а температуру в центре тела на начальной стадии нагрева приближенно можно принять $\theta_{\text{ц}} \cong 1$.

С учетом сказанного уравнение (2) для расчета термических напряжений на поверхности примет вид

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = H(1 - \varphi(y)) - k[(1 - H)\mathrm{Fo} + H\Phi(y)/G]. \qquad (57)$$

При $G = 0$, после раскрытия неопределенности с помощью (53), получим

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = p\mathrm{Bi}_*\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(1 + 2k\mathrm{Bi}_*\sqrt{\mathrm{Fo}}/3\right) - k\mathrm{Bi}_*\mathrm{Fo}. \qquad (58)$$

Дифференцируя уравнение (57) по времени и приравнивая производную нулю с учетом разложений (53) и (54) можно получить формулу, аналогично (12), для расчета времени наступления $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}$ максимального термического напряжения на поверхности. Ввиду сложности (57) и необходимости в дальнейшем решать трансцендентные уравнения, покажем ход расчета на более простом уравнении (58). Из соотношения $d\tilde{\sigma}_n/d\mathrm{Fo} = 0$ получим квадратное уравнение, решение которого имеет вид:

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.п}} = G_3/\gamma_3, \qquad (59)$$

где $G_3 = 1/[k(\pi k - 4\mathrm{Bi}_*)]$; $\gamma_3 = 1 - \rho_3$; $\rho_3 = (2k\mathrm{Bi}_* \cdot G_3)^2$.

Расчет для шара при $k = 3$ и $\mathrm{Bi}_* = 1$ дает $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}(1) = 0{,}07104$, что хорошо согласуется с ранее полученной по (12) величиной 0,070318 (см. табл. 1).

Иногда требуется определить расположение координаты $X_{\text{н}}$ нейтрального слоя в котором термические напряжения меняют знак с $+\tilde{\sigma}$ на $-\tilde{\sigma}$, т.е. в этой точке равны нулю. Наиболее просто это можно сделать в стадии РРН. Тогда согласно уравнению (1) $\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = \theta(X_{\text{н}}, \mathrm{Fo})$ или $M_1 = P_1(\sin(\mu_1 X_{\text{н}}))/(\mu_1 X_{\text{н}}) \times \mu_1/\sin\mu_1)$. Разрешая последнее выражение относительно $X_{\text{н}}$, получим

$$X_{\text{н}} = (1/\mu_1)\sqrt{6(1 - S)}, \qquad (60)$$

где $S = m\gamma\Big/\sqrt{\mu_1^2 + B^2}$.

При малых числах Био $S \approx 1 - 3\mathrm{Bi}/10$. Тогда будем иметь

$$X_{\text{н}} = \sqrt{3/5} = 0{,}7746. \qquad (61)$$

При больших числах Био $S \approx 0$ и

$$X_{\text{н}} = \sqrt{6}/\pi = 0{,}7797. \qquad (62)$$

Таким образом, поскольку $X_{\text{н}} > 0{,}5$ нейтральные слои расположены ближе к поверхности, а само $X_{\text{н}}$ колеблется в узких пределах — от 0,77 до 0,78.

Следует отметить, что при нагреве абсолютные, т.е. размерные термические напряжения $\sigma = \sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ поменяют знаки за счет отрицательности σ_0 из-за $\Delta t_0 = (t_0 - t_{\text{с}}) < 0$.

В заключение укажем, что все полученные решения описывают как процесс конвективного нагрева шаровых тел, так и их охлаждение.

Выводы

1. Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) шаровых тел. Получены простые и эффективные формулы для двух предельных случаев малых и больших чисел Био на начальной и регулярной стадиях нагрева. Сделан акцент на определение максимальных термонапряжений и времени их наступления.
2. При нагреве на поверхности шара возникают сжимающие (отрицательные) напряжения, а в середине растягивающие (положительные); в случае процесса охлаждения знаки поменяются.
3. Нейтральные слои расположены ближе к поверхности.
4. Наибольшее значение по абсолютной величине имеют напряжения в середине, которые примерно в 1,5 раза превышают термонапряжения на поверхности шара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А.Д. К расчёту термических напряжений при конвективном нагреве пластины // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: 2010. № 1(22). – С. 16–21.
2. Гольдфарб Э.М., Горбунов А.Д. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел в прямотоке и противотоке // ИФЖ. – 1984. – Т.46. – № 5. – С. 870–871.
3. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности шара при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1984. – № 2. – С. 79–83.
4. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Металлургиздат, 1950. – 151 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.

пост. 23.12.10