Інтервальне оцінювання статистичних моментів негаусівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень

ПРИХОДЬКО С.Б.

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Наведено метод оцінки довірчих інтервалів статистичних моментів негаусовських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень, який дає змогу оцінювати довірчі інтервали статистичних моментів негаусовських випадкових величин без застосування припущення про нормальність їх розподілів.

Предложен метод оценки доверительных интервалов статистических моментов негауссовских случайных величин на основе нормализирующих преобразований, который дает возможность оценивать доверительные интервалы статистических моментов негауссовских случайных величин без применения предположения о нормальности их распределений.

The method to estimate confidence intervals of statistical moments of non-Gussian variates on the basis of the normalizing transformations, which enables to estimate confidence intervals of statistical moments of non-Gussian variates without application of assumption on normal of its distributions, is proposed.

Оскільки при кожному конкретному випробуванні значення точкових оцінок чисельних характеристик (в тому числі, і статистичних моментів) випадкових величин відрізняються від значень відповідних характеристик, то більш повним і надійним способом їх оцінювання є визначення інтервалу (а не одного значення), в якому з заданою ступеню достовірності буде знаходитися значення характеристики, яка оцінюється. В цьому випадку говорять про інтервальне або довірче оцінювання.

Як відомо, задача визначення довірчого інтервалу може бути вирішена у разі, якщо вдається знайти розподіл оцінки, яка шукається. В цьому полягає основна складність. Зараз ці питання добре розроблені для випадкових величин з нормальним розподілом. Навіть при непараметричному підході, як правило, інтервальне оцінювання виконується завдяки припущенню про нормальність відповідної оцінки [1]. Для негаусівських випадкових величин визначення довірчого інтервалу відомо лише для окремих розподілів, зокрема, – для пуасонівського [2]. Тому проблема інтервального оцінювання чисельних характеристик, в тому числі і статистичних моментів, негаусівських випадкових величин залишається актуальною.

В [3] запропоновано виконувати інтервальну оцінку статистичних моментів на основі застосування нормалізуючого перетворення Джонсона, яке дозволяє здійснювати перехід до випадкової величини з нормальним розподілом. Суть запропонованого в [3] підходу полягає у наступному. Спочатку за значеннями оцінок асиметрії та ексцесу вибіркового розподілу випадкової величини підбирають сім'ю з розподілів Джонсона та знаходять відповідні параметри. Використовуючи перетворення Джонсона зі знайденими параметрами обчислюють значення нормально розподіленої випадкової величини, для якої знаходять довірчі інтервали точкових оцінок статистичних моментів. За цими довірчими інтервалами на основі перетворення Джонсона визначають довірчі інтервали статистичних моментів для початкової випадкової величини. Зазначимо, що застосування запропонованого в [3] підходу потребує, по-перше, визначення параметрів відповідного нормалізуючого перетворення, а, по-друге, розкладання в ряд нелінійної функції цього перетворення.

В [3] визначення параметрів перетворення Джонсона здійснюється за емпіричним розподілом випадкової величини методом найменших квадратів. А це в свою чергу приводе до необхідності мати велику вибірку значень випадкової величини. Виникає питання: що робити у разі малої вибірки? В цьому разі пропонується розповсюдити запропонований в [3] підхід для інтервальної оцінки статистичних моментів як для перетворення Джонсона, та і для інших нормалізуючих перетворень, зокрема, Бокса-Кокса (Box-Cox) і Ієо-Джонсона (Yeo-Johnson) [4]. Ці перетворення залежать від одного параметра, визначення якого здійснюється або за методом максимальної правдоподібності (для перетворення Бокса-Кокса), або шляхом мінімізації відстані Кульбака-Леблера між нормальним розподілом та розподілом, який перетворюють (для перетворення Ієо-Джонсона). Таке різноманіття методів для знаходження параметрів відповідного перетворення потребує певного узагальнення, яке і робиться у роботі.

В [3] також при розкладанні в ряд нелінійної функції нормалізуючого перетворення не враховувалася сума залишкових членів. В цій роботі пропонується при знаходженні довірчих інтервали точкових оцінок статистичних моментів це врахувати.

Тому **метою роботи** є представити метод оцінки довірчих інтервалів статистичних моментів негаусовських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень, який давав би змогу знаходити відповідні інтервальні оцінки без застосування припущення про нормальність розподілів цих величин та дозволяв враховувати суму залишкових членів ряду нелінійної функції цього перетворення.

Виклад основного матеріалу. В загальному випадку нормалізуюче перетворення Джонсона має вигляд [2]

$$z = \gamma + \eta h(x, \varphi, \lambda), \qquad (1)$$

де z – нормована нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією; x – випадкова величина, яка нормалізується; γ, η, λ, φ – параметри розподілу Джонсона, $\eta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, $\lambda > 0$, $-\infty < \varphi < \infty$; h – функція з певної сім'ї:

$$h(x, \varphi, \lambda) = \begin{cases} \ln(\tilde{x}), & x > \varphi, \quad \text{для сім'ї } S_L; \\ \ln[\tilde{x}/(1-\tilde{x})], & \varphi < x < \varphi + \lambda, \quad \text{для сім'ї } S_B; \\ \operatorname{Arsh}(\tilde{x}), & -\infty \le x \le +\infty, \quad \text{для сім'ї } S_U. \end{cases}$$

Тут $\tilde{x} = (x-\varphi)/\lambda$; $\operatorname{Arsh}(\tilde{x}) = \ln\left(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 1}\right)$.

Для сімей S_L, S_B і S_U функції щільності ймовірності задаються як

$$f_L(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x-\varphi)} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\gamma - \eta \ln \lambda}{\eta} + \ln(x-\varphi)\right]^2\right\};$$

$$f_B(x) = \frac{\eta\lambda}{\sqrt{2\pi}(x-\varphi)(\lambda+\varphi-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda+\varphi-x}\right)\right]^2\right\};$$

$$f_U(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi\left\{(x-\varphi)^2 + \lambda^2\right\}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \operatorname{Arsh}\left(\frac{x-\varphi}{\lambda}\right)\right]^2\right\}.$$

Вибір відповідного розподілу Джонсона здійснюють за оцінками асиметрії у квадраті A^2 та ексцесу ε (рис. 1).

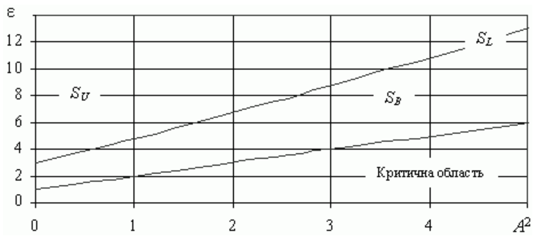

Рис. 1. Комбінації A^2 і ε для розподілів Джонсона

Параметри γ, η, λ та φ для обраної сім'ї розподілів Джонсона можна знайти шляхом рішення наступної задачі математичного програмування [3]:

$$\theta = \arg\min_{\theta}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[y(x_j) - f(x_j, \theta)\right]^2\right\}, \tag{2}$$

де θ – вектор невідомих параметрів, $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$; x_j – значення x в середині j-го підінтервалу; $y(x_j)$ – значення ординати гістограми при значенні x_j; $f(x_j, \theta)$ – функція щільності ймовірності при значенні x_j; m – кількість підінтервалів гістограми.

Перетворення Бокса-Кокса задається як [4]

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda} - 1}{\lambda}, & \textit{якщо} \quad \lambda \neq 0; \\ \ln(x), & \textit{якщо} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Перетворення Менлі (Manly) задається як

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}, & \textit{якщо} \quad \lambda \neq 0; \\ x, & \textit{якщо} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В перетворенні (3) параметр λ визначається шляхом максимізації логарифму функції правдоподібності [4]

$$l(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i(\lambda) - \bar{x}(\lambda)\right)^2}{n} + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i), \tag{5}$$

де $\bar{x}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda)/n$.

Перетворення Іео-Джонсона задається як [4]

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^{\lambda} - 1}{\lambda}, & \textit{якщо} \quad \lambda \neq 0, x \geq 0; \\ \ln(x+1), & \textit{якщо} \quad \lambda = 0, x \geq 0; \\ \dfrac{(1-x)^{2-\lambda} - 1}{\lambda - 2}, & \textit{якщо} \quad \lambda \neq 2, x < 0; \\ -\ln(1-x), & \textit{якщо} \quad \lambda = 2, x < 0. \end{cases} \tag{6}$$

В перетворенні (6) параметр λ визначається шляхом мінімізації відстані Кульбака-Леблера між нормальним розподілом та розподілом, який перетворюють.

Для кожного нормалізуючого перетворення, як ми бачимо, використовують свій метод визначення параметрів цих перетворень. Тому пропонується знаходити параметри всіх перетворень (1), (3), (4) і (6) в результаті рішення наступної задачі:

$$\theta = \arg\min_{\theta}\left\{A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2\right\}, \tag{7}$$

де θ – вектор невідомих параметрів, $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$ для перетворення (1) і $\theta = \lambda$ для перетворень (3), (4) і (6); $A_z = \frac{1}{nS_z^3}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^3$; $\varepsilon_z = \frac{1}{nS_z^4}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^4$; $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$; $S_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$; z_i – i-значення нормалізованої випадкової величини z у вибірці довжиною n, $i \in [1, n]$, визначаються за перетвореннями (1), (3), (4) або (6).

Після знаходження параметрів відповідного нормалізуючого перетворення, вибіркового середнього $\bar{z}$ та вибіркової дисперсії S_z^2 значень z переходимо до визначення довірчих інтервалів точкових оцінок статистичних моментів випадкової величини x. Для цього спочатку знаходимо довірчі інтервали математичного сподівання $[\alpha_1(z)]$ та середнього квадратичного відхилення $[S_z]$ величини z.

Для нормальної генеральної сукупності $(1-\alpha)$%-вий довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання визначається як [5]

$$[\alpha_1(z)] = \left[\bar{z} - t_{n-1}S_z/\sqrt{n},\ \bar{z} + t_{n-1}S_z/\sqrt{n}\right], \tag{8}$$

де $\bar{z}$ і S_z – відповідно вибіркові середнє і середнє квадратичне відхилення величини z; t_{n-1} – квантіль t-розподілу Стьюдента, визначається за таблицею верхніх 100α %-вих точок t-розподілу Стьюдента за рівнем значимості $\alpha/2$ та кількостю ступенів вільності ν.

Для нормальної генеральної сукупності $(1-\alpha)$%-вий довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення визначають як [5]

$$[S_z] = \left[S_z\sqrt{n/\chi^2_{\alpha/2}},\ S_z\sqrt{n/\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]. \tag{9}$$

Значення $\chi^2_{\alpha/2}$ і $\chi^2_{1-\alpha/2}$ визначають в залежності від α та ν за таблицею верхніх 100α %-вих точок розподілу χ^2. Значення ν визначається як $\nu = n - 1$.

Далі розкладаємо у ряд Тейлора нелінійну функцію певного нормалізую чого перетворення.

Всі функції h з перетворення (1), які запропонував Джонсон, можуть бути представлені як

$$h(x,\varphi,\lambda) = \tilde{x} + R_1, \tag{10}$$

R_1 – сума залишкових членів ряду; $\tilde{x} = (x-\varphi)/\lambda$.

З урахуванням (10) перетворення (1) запишемо як

$$z = \gamma + \eta(\tilde{x} + R_1). \tag{11}$$

Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (11), отримуємо

$$\alpha_1(z) = \gamma + \eta\{\alpha_1(\tilde{x}) + \alpha_1(R_1)\}, \tag{12}$$

де $\alpha_1(z)$, $\alpha_1(\tilde{x})$ і $\alpha_1(R_1)$ – початкові статистичні моменти першого порядку відповідно z, $\tilde{x}$ і R_1.

З (12) знаходимо

$$\alpha_1(R_1) = \frac{\alpha_1(z) - \gamma}{\eta} - \frac{\alpha_1(x) - \varphi}{\lambda}. \tag{13}$$

Замінивши в (13) $\alpha_1(x)$ на $[\alpha_1(x)]$, а $\alpha_1(z)$ на $[\alpha_1(z)]$, отримуємо оцінку довірчого інтервалу для $\alpha_1(x)$

$$[\alpha_1(x)] = \lambda\left(\frac{[\alpha_1(z)] - \gamma}{\eta} - \alpha_1(R_1)\right) + \varphi. \tag{14}$$

Оцінку довірчого інтервалу дисперсії $[D(x)]$ випадкової величини x визначимо наступним чином. Робимо піднесення у квадрат обох частин (11) та отримуємо

$$\tilde{z}^2 = \tilde{x}^2 + R_2, \tag{15}$$

де $\tilde{z} = (z-\gamma)/\eta$; R_2 – остача, яка залишається після віднімання $\tilde{x}^2$ від $(\tilde{x} + R_1)^2$.

Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (15), маємо

$$\alpha_2(\tilde{z}) = \alpha_2(\tilde{x}) + \alpha_1(R_2), \tag{16}$$

де $\alpha_2(\tilde{z})$ і $\alpha_2(\tilde{x})$ – початкові статистичні моменти другого порядку відповідно випадкових величин $\tilde{z}$ і $\tilde{x}$; $\alpha_1(R_2)$ – математичне сподівання остачі R_2.

Із (16) знаходимо $\alpha_1(R_2)$. Замінивши в (16) $\alpha_2(\tilde{x})$ на $[\alpha_2(\tilde{x})]$, а $\alpha_2(\tilde{z})$ на $[\alpha_2(\tilde{z})]$, отримуємо інтервальну оцінку для $\alpha_2(\tilde{x})$

$$[\alpha_2(\tilde{x})] = [\alpha_2(\tilde{z})] - \alpha_1(R_2).$$

Після обчислення $[\alpha_2(\tilde{x})]$ знаходимо оцінку довірчого інтервалу початкового статистичного моменту другого порядку $[\alpha_2(x)]$ величини x. Далі визначаємо

$$[D(x)] = [\alpha_2(x)] - \left[\alpha_1^2(x)\right].$$

Аналогічно знаходять оцінку довірчого інтервалу початкового статистичного моменту k-го порядку $[\alpha_k(x)]$ випадкової величини x. Для цього виконують вже піднесення у k-ту степінь обох частин (11).

Функція x^λ з перетворення Бокса-Кокса (3) може бути представлена як

$$x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \ln x} = 1 + \lambda \ln x + R_1, \ \left[x^2 < \infty\right], \tag{17}$$

де R_1 – сума залишкових членів ряду.

Функція $\ln x$ з (17) може бути представлена як

$$\ln x = x - 1 + R, \ [0 < x \le 2], \tag{18}$$

де R – сума залишкових членів ряду.

Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (17), отримуємо

$$\alpha_1\left(x^\lambda\right) = 1 + \lambda\alpha_1(\ln x) + \alpha_1(R_1). \tag{19}$$

де $\alpha_1(R_1)$ – початковий статистичний момент першого порядку суми залишкових членів ряду R_1.

З (19) знаходимо $\alpha_1(R_1)$. Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (18), отримуємо

$$\alpha_1(\ln x) = \alpha_1(x) + \alpha_1(R) - 1, \tag{20}$$

де $\alpha_1(R)$ – початковий статистичний момент першого порядку суми залишкових членів ряду R.

З (20) знаходимо $\alpha_1(R)$. З урахуванням (17) і (18) перетворення (3) при $\lambda \ne 0$ запишемо як

$$z = x + R - 1 + R_1/\lambda. \tag{21}$$

Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (21), отримуємо

$$\alpha_1(z) = \alpha_1(x) + \alpha_1(R) - 1 + \alpha_1(R_1)/\lambda. \tag{22}$$

Замінивши в (22) $\alpha_1(x)$ на $[\alpha_1(x)]$, а $\alpha_1(z)$ на $[\alpha_1(z)]$, маємо

$$[\alpha_1(x)] = [\alpha_1(z)] - \alpha_1(R) + 1 - \alpha_1(R_1)/\lambda. \tag{23}$$

Функція $\mathrm{e}^{\lambda x}$ з перетворення Менлі (4) може бути представлена як

$$\mathrm{e}^{\lambda x} = 1 + \lambda x + R_1. \tag{24}$$

З урахуванням (24) перетворення (4) при $\lambda \ne 0$ запишемо як

$$z = x + R_1/\lambda. \tag{25}$$

Виконуючи операцію математичного сподівання для кожної частини (25), отримуємо

$$\alpha_1(z) = \alpha_1(x) + \alpha_1(R_1)/\lambda. \tag{26}$$

З (26) знаходимо $\alpha_1(R_1)$. Замінивши в (26) $\alpha_1(x)$ на $[\alpha_1(x)]$, а $\alpha_1(z)$ на $[\alpha_1(z)]$, маємо

$$[\alpha_1(x)] = [\alpha_1(z)] - \alpha_1(R_1)/\lambda. \tag{27}$$

За аналогією з перетворенням Бокса-Кокса перетворення (6) при $\lambda \ne 0$ і $x \ge 0$ запишемо як

$$z = x + R + R_1/\lambda. \tag{28}$$

Тоді для (28) оцінка довірчого інтервалу $\alpha_1(x)$ буде

$$[\alpha_1(x)] = [\alpha_1(z)] - \alpha_1(R) - \alpha_1(R_1)/\lambda, \tag{29}$$

де

$$\alpha_1(R) = \alpha_1(\ln(x+1)) - \alpha_1(x);$$

$$\alpha_1(R_1) = \alpha_1\left((x+1)^\lambda\right) - 1 - \lambda\alpha_1(\ln(x+1)).$$

Аналогічно з перетворенням (1) знаходять оцінку довірчого інтервалу початкового статистичного моменту k-го порядку $[\alpha_k(x)]$ величини x для перетворень (3), (4) або (6). Для цього виконують вже піднесення у k-ту степінь обох частин (21), (25) або (28).

Таким чином, суть методу оцінки довірчих інтервалів статистичних моментів негаусовських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень полягає у наступному. Спочатку здійснюють вибір відповідного нормалізуючого перетворення, знаходять його параметри, визнають значення нормалізованої випадкової величини z та оцінки довірчих інтервалів її математичного сподівання і дисперсії. Далі розкладають у ряд Тейлора нелінійну функцію нормалізуючого перетворення і підставляють цей розклад (з урахуванням суми залишкових членів) замість функції в обране перетворення. Для кожної частини отриманого перетворення виконують операцію математичного сподівання і знаходять математичне сподівання суми залишкових членів ряду. Далі в отриманому перетворенні замінюють математичні сподівання величин z і x на їх інтервальні представлення і на основі оцінки довірчого інтервалу математичного сподівання для z знаходять оцінку довірчого інтервалу математичного сподівання початкової випадкової величини x. Аналогічно знаходять оцінку довірчого інтервалу початкового статистичного моменту *k*-го порядку випадкової величини x. Для цього спочатку виконують піднесення у *k*-ту степінь обох частин нормалізуючого перетворення після підстановки в нього замість відповідної нелінійної функції її розкладу в ряд Тейлора з урахуванням суми залишкових членів.

Для ілюстрації представленого методу розглянемо дані мікрохвильового випромінювання з монографії [4] (приклад 4.10, с.180) – значення випадкової величини x, які наведені в табл. 1 $(x \in [0{,}01, 0{,}40])$.

Таблиця 1

Значення випадкової величини x						
0,15	0,08	0,01	0,01	0,15	0,10	0,20
0,09	0,05	0,10	0,40	0,10	0,20	0,30
0,18	0,08	0,10	0,10	0,15	0,11	0,30
0,10	0,10	0,10	0,05	0,09	0,30	0,40
0,05	0,07	0,02	0,03	0,08	0,02	0,30
0,12	0,02	0,10	0,05	0,18	0,20	0,05

За вибіркою значень x були обчислені наступні оцінки: $\hat{\alpha}_1(x) = \bar{x} = 0{,}128$; $S_x^2 = 9{,}81 \cdot 10^{-3}$; $\hat{\varepsilon}_x = 3{,}85$; $\hat{A}_x = 1{,}23$. Значення оцінок ексцесу і асиметрії вказують на те, що величина x є негаусовською. Виконаємо її нормалізацію. За рис. 1 вибірку x можна нормалізувати за перетворенням (1) із сім'ї S_B. Результати нормалізації x за перетвореннями (1), (3), (4), (6) та оцінки імовірнісних характеристик z наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Нормалізуюче перетворення	Метод оцінки параметрів / значення $A_z^2+(\varepsilon_z-3)^2$	$\bar{z}$	S_z	$\hat{\varepsilon}_z$	$\hat{A}_z$	χ^2
(3)	(5)/ 0,107	-1,69	0,445	2,67	-0,030	4,19
(3)	(7)/ 0,101	-1,78	0,496	2,71	-0,129	4,15
(1) S_B	(7)/ $4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-4}$	0,999	3,00	$8 \cdot 10^{-9}$	5,02
(1) S_B	(2)/ 0,279	-0,199	1,320	2,50	0,171	4,92
(4)	(7)/ 0,476	0,090	0,051	2,52	0,492	14,0
(6)	(7)/ 0,451	0,087	0,048	2,51	0,458	14,3

В табл. 2 також наведені значення χ^2 для перевірки нормальності розподілу z за критерієм Пірсона. При перевірці нормальності розподілу за цим критерієм інтервал значень z ділили на п'ять частин, критичне значення $\chi^2_{кр} = 5{,}99$ бралося за таблицею верхніх $100\alpha\%$-их точок розподілу χ^2 в залежності від α $(\alpha = 0{,}05)$ і ν $(\nu = 5-2-1 = 2)$. За критерієм Пірсона нормальний закон розподілу з довірчою ймовірністю 0,95 мають ті вибірки z, для яких $\chi^2 \le \chi^2_{кр}$. А це лише ті, які отримані за перетвореннями Бокса-Кокса (3) та Джонсона (1) із сім'ї S_B. Параметр λ для (3) має такі значення: $\lambda = 0{,}2759$ за рішенням задачі (5) і $\lambda = 0{,}2310$ за рішенням задачі (7). Відмітимо, що в [4] значення λ для (3) за рішенням задачі (5) з точністю 0,1 є 0,3. Параметри γ, η, λ і φ для (1) із сім'ї S_B є такими: $\gamma = 1{,}3489$, $\eta = 0{,}90195$, $\lambda = 0{,}56678$, $\varphi = -0{,}00164$ за рішенням задачі (7) та $\gamma = 19{,}609$, $\eta = 3{,}1815$, $\lambda = 129{,}19$, $\varphi = -0{,}15734$ за рішенням задачі (2). Значення λ інших перетворень за рішенням задачі (7) є такими: $\lambda = -3{,}95$ для (4) і $\lambda = -3{,}78$ для (6).

Для перетворення Джонсона (1) із сім'ї S_B формулу (14) зручніше записати як

$$[\alpha_1(x)] = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{[\alpha_1(z)] - \gamma}{2\eta} + 1 - \alpha_1(R_1)\right) + \varphi, \qquad (30)$$

де $$\alpha_1(R_1) = \frac{\alpha_1(z) - \gamma}{2\eta} - 2\frac{\alpha_1(x) - \varphi}{\lambda} + 1.$$

За (8) з ймовірністю 0,95 оцінка $[\alpha_1(z)]$ величини z $(z \in [-2{,}137, 2{,}151])$, значення якої створені за (1) з параметрами, знайденими за рішенням задачі (7), є такою: $[\alpha_1(z)] = [-0{,}312, 0{,}311]$. Підставив цю оцінку в (30), маємо $[\alpha_1(x)] = [0{,}079, 0{,}177]$.

Якщо вважати, що x має нормальний розподіл, як це зазвичай робиться при непараметричному оцінюванні [1], то з ймовірністю 0,95 маємо $[\alpha_1(x)] = [0{,}097, 0{,}159]$, тобто отримуємо зменшення довжини довірчого інтервалу в 1,6 рази в порівнянні з оцінкою на основі застосування перетворення Джонсона із сім'ї S_B.

За (8) з ймовірністю 0,95 оцінка $[\alpha_1(z)]$ величини z $(z \in [-2{,}607, -0{,}810])$, значення якої утворені за (3) з параметрами, знайденими за рішенням задачі (5), є такою: $[\alpha_1(z)] = [-1{,}831, -1{,}553]$. Підставив цю оцінку в (23), маємо $[\alpha_1(x)] = [-0{,}011, 0{,}267]$. Ліва границя цієї оцінки менше за мінімальне значення x, що свідчить про її хибність. Такий же хибний результат був отриманий для перетворень (4) і (6) відповідно за формулами (27) і (29).

Отже для розглянутого прикладу добрий результат по оцінці довірчого інтервалу математичного сподівання x дає лише перетворення Джонсона (1) із сім'ї S_B, параметри якого визначалися за рішенням задачі (7). Це перетворення дає значно кращу нормалізацію за значенням ексцесу і асиметрії в порівнянні з іншими перетвореннями, що свідчить про наступне: виконання критерію Пірсона не є достатньою умовою для оцінювання довірчих інтервалів статистичних моментів негаусовських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень; окрім цієї умови потрібно щоб значення $A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2$ було менше за 0,01.

Висновки

Представлено метод оцінки довірчих інтервалів статистичних моментів негаусовських випадкових