

Вирішувати систему рівнянь (20) будемо чисельно, розбиваючи часову вісь на шари, які будемо нумерувати індексом  $n$ . На кожному часовому шарі (при фіксованому  $n$ ) знаходимо матрицю  $B_{ba}^n$  та стовпчик  $t_b^n$ , а потім, вирішуючи систему рівнянь (20) (наприклад, методом Гауса), знаходимо кутові прискорення  $\gamma_a^n = (\alpha_a^n, \beta_a^n)$ . Надалі на наступному часовому кроці ( $n + 1$ ) визначаємо кутові швидкості та кути за формулами:

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + \alpha_i^n \Delta t,$$

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \beta_i^n \Delta t,$$

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \omega_i^{n+1} \Delta t,$$

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \sigma_i^{n+1} \Delta t,$$

що відповідає методу Ейлера-Кромера.

В розглянутій задачі довжина дроту змінна, а тому кількість ланок  $N$  є також змінною величиною навіть при постійному  $l$ . Під час додавання, або відплавлення ланок, необхідно їх перенумерувати.

Таким чином отримано математичну модель траєкторії руху дроту під час продувки металу аргоном на установці ківш-піч в тривимірному випадку, явно виписані рівняння Лагранжа другого роду, що повністю визначають динаміку системи. Побудована математична модель відіг-

рає важливу роль під час дослідження гідродинамічних та теплофізичних процесів позапічної обробки сталі.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Тимошпольский В.И., Болотов В.Ю. и др. Исследование процессов плавления и траектории движения проволоки при вводе в сталь. // Оф. журнал БАЛМ Литье и металлургия - 1999 -№ 2 – С. 21–22;
2. Болотов В.Ю., Павлюченков И.А., Самохвалов С.Е., Черномаз Г.Н. Математическая модель комплексной задачи движения, плавления и усвоения проволоки при продувке металла в сталеразливочном ковше. // Сб. науч. труд. Гос. мет. акад. Укр. (Энергетика, Металлургия). – Дн-вск, 1999. – С. 113-116;
3. Болотов В.Ю., Самохвалов С.Е., Комплексная задача движения, плавления и усвоения проволоки при продувке металла в сталеразливочном ковше. // Сб. науч. труд. ДЦТУ. (Металлургия). – Дн-жинск, 1998. – С. 39-44;
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961 – 824 с;
5. Компанец А.С. Курс теоретической физики. Том I. Элементарные законы – М.: Просвещение, 1972 – 512 с.

пост. 03.02.10

## Математическое моделирование затвердевания металла в песчаной и чугунонй изложницах

АЛЕКСАНДРОВ В.Д.<sup>1</sup>, ГОЛОДЕНКО Н.Н.<sup>1</sup>, ДРЕМОВ В.В.<sup>1</sup>, НЕДОПЕКИН Ф.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

<sup>2</sup>Донецкий национальный университет

Методом конечных разностей решены нестационарные двумерные задачи затвердевания металла в песчаной и чугунонй изложницах с учетом естественной конвекции. На определенные моменты времени вычислены для стального слитка положения фронтов затвердевания, графики температур в жидкой и твердой фазах, профили горизонтальных и вертикальных составляющих скоростей и функций тока в жидкой фазе.

Методом кінцевих різниць вирішені нестационарні двовимірні задачі затвердіння металу в піщаній і чавунній виливницях з урахуванням природної конвекції. На певні моменти часу обчислені для сталевго злитка положення фронтів затвердіння, графіки температур у рідкій і твердій фазах, профілі горизонтальних і вертикальних складових швидкостей і функцій струму в рідкій фазі.

Non-stationary bidimensional problems of hardening of metal in sandy and cast-iron mould with regard for natural convection are solved by the method of finite differences. Hardening front positions, temperatures graphs in liquid and solid phases, profiles of horizontal and vertical speed components and function of current in liquid are computed for certain time moments.

**Введение.** Затвердевание стальных отливок в чугунонйх и песчаных изложницах экспериментально изучено в работах [1, 2]. Из графиков, построенных на основе кривых охлаждения, видно, что затвердевание квадратных отливок в металлургических изложницах происходит примерно в 5 раз быстрее, чем в сырых песчаных формах. В [3] проведено сравнение профилей температуры в затвердевающем стальном слитке и чугунонй изложнице с

результатами математического моделирования методом сеток и отмечено заметное расхождение расчетных и опытных данных на начальном этапе охлаждения слитка. Уравнение Навье-Стокса для расчета конвекции при этом не использовалось. В [4] сравниваются результаты математического моделирования температуры в центре и на поверхности металла в чугунонй изложнице в зависимости от времени с данными эксперимента и отмечается

хорошее совпадение, несмотря на то, что и в этой работе конвекция не учитывается.

В предлагаемой работе рассмотрено влияние стенок чугунной и песчаной изложниц и естественной конвекции на движение фронта затвердевания. Задача решается численно методом конечных разностей с использованием компьютерной программы, разработанной авторами. Изложница представляет собой усеченный клин с углом наклона  $\varphi$  боковых граней к вертикальной плоскости. Поперечное сечение клина вертикальной плоскостью представляет собой трапецию, а боковые грани – прямоугольники. Предполагается, что длина клина много больше его толщины, и не учитывается влияние торцевых поверхностей клина. Поэтому задача решается в двумерной постановке и не учитывается зависимость переменных от продольной координаты  $z$ .

**Постановка задачи.** Уравнение теплопереноса для несжимаемой жидкости запишем в виде [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\bar{v}T) = a_1 \nabla^2 T, \quad (1)$$

для твердой фазы

$$\frac{\partial T}{\partial T} = a_2 \nabla^2 T. \quad (2)$$

Уравнения Навье–Стокса для вертикальной и горизонтальной составляющих размерных скоростей [6]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \quad (3a)$$

$$+ \frac{\bar{\eta}_v}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \beta(T - T_m) \bar{g} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \quad (3b)$$

$$+ \frac{\bar{\eta}_v}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \beta(T - T_m) \bar{g} \cos \varphi.$$

Используется криволинейная ортогональная система координат и уравнение неразрывности для двух составляющих скорости:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

В качестве начального условия считаем, что весь металл в изложнице находится в жидкой фазе при температуре плавления.

Граничные условия для температуры  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  на вертикальной оси изложницы,  $T = T_m$  – на фронте кристаллизации, для скоростей  $u = v = 0$  на фронте затвердевания,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  на вертикальной оси изложницы.

В квазистационарном режиме плотность теплового потока через стенку изложницы, и плотность потока теплоотдачи от внешней стенки изложницы в окружающую среду равны:

$$Q = \lambda_3 \frac{T_w - T_e}{d}, \quad (5a)$$

$$Q = \alpha(T_e - T_0). \quad (5b)$$

Исключив из уравнений (5) температуру внешней поверхности стенки изложницы, получаем

$$Q = k_t(T_w - T_0), \quad (6a)$$

где коэффициент теплопередачи стенки изложницы

$$k_t = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_3} \right)^{-1}. \quad (6b)$$

В квазистационарном режиме через внутреннюю и внешнюю поверхности стенки изложницы протекает тепловой поток одинаковой плотности

$$Q = \lambda \frac{T_{w-1} - T_w}{\xi} = k_t(T_w - T_0). \quad (7)$$

Отсюда граничное условие для температуры внутренней поверхности стенки изложницы

$$T_w = \frac{\frac{\lambda}{\xi} T_{w-1} + k_t T_0}{\frac{\lambda}{\xi} + k_t}. \quad (8a)$$

Аналогично, граничное условие для температуры внутренней поверхности дна изложницы

$$T_b = \frac{\frac{\lambda}{\eta} T_{b-1} + k_t T_0}{\frac{\lambda}{\eta} + k_t}, \quad (8b)$$

где  $T_{w-1}$  и  $T_{b-1}$  – температуры металла в узлах, на шаг отстоящих внутрь от внутренних поверхностей соответственно стенки и дна изложницы.

**Решение задачи.** Уравнение теплопроводности в конечных разностях по методу чередующихся направлений имеет вид [5] (верхний индекс  $n$  при температуре  $T$  и составляющих скорости  $u$  и  $v$  – номер шага времени, нижние индексы  $i, j$  – номера ячеек: первый – по горизонтали, второй – по вертикали):  
при  $i \uparrow, j \uparrow$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{1 + a\tau \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} [T_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} \times$$

$$\times u_{i,j}^n (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - \frac{\tau}{2\eta} v_{i,j}^n (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n) + \quad (9)$$

$$+ \frac{\tau}{\xi^2} a(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\eta^2} a(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)];$$

при  $i \downarrow, j \downarrow$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{1 + a\tau \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times$$

$$\times [T_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} u_{i,j}^n (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - \quad (10)$$

$$- \frac{\tau}{2\eta} v_{i,j}^n (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\xi^2} a(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\eta^2} a(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)];$$

при  $i \uparrow, j \downarrow$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{1 + a\tau \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times$$

$$\times [T_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} u_{i,j}^n (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) -$$

$$- \frac{\tau}{2\eta} v_{i,j}^n (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\xi^2} a (T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\eta^2} a (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)];$$

при  $i \downarrow, j \uparrow$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{1 + a\tau \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} [T_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} u_{i,j}^n \times$$

$$\times (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - \frac{\tau}{2\eta} v_{i,j}^n (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\xi^2} a (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) +$$

$$+ \frac{\tau}{\eta^2} a (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)].$$

Если  $T^{n+1} < T_m$  и  $T^n \geq T_m$  (на данном шаге времени опускающаяся температура в ячейке переходит через точку плавления  $T_m$ ), то учитываем фазовый переход в ячейке. Находим удельную (отнесенную к единице массы) теплоту, теряемую ячейкой за шаг времени  $\tau$ ,

$$q_s = c_1 (T^n - T^{n+1}). \quad (13)$$

Часть удельной теплоты плавления, выделившуюся в ячейке на предыдущих шагах времени, обозначим через  $q^n$ . Верхний индекс при  $q$  здесь и далее – номер шага времени. На начальный момент времени для всех ячеек  $q^0 = 0$ .

Если количество теплоты, которое будет выделено при кристаллизации всей остающейся в ячейке жидкости, меньше потерь тепла ячейкой за данный шаг времени, иначе говоря, если  $\kappa - q^n \leq q_s$ , где  $\kappa$  – удельная теплота плавления, то металл в ячейке кристаллизуется полностью. Вследствие выделения теплоты фазового перехода снижение температуры ячейки будет несколько меньшим, чем это следует из решения уравнения теплопроводности без учета фазового перехода. Скорректированное с учетом фазового перехода значение температуры ячейки

$$T_c^{n+1} = T^n - \frac{q_s - \kappa + q^n}{c_1}, \quad (14)$$

а новое значение части удельной теплоты плавления, выделившейся в ячейки к концу данного шага времени,

$$q^{n+1} = \kappa. \quad (15)$$

Если же  $\kappa - q^n > q_s$ , то не весь жидкий металл кристаллизуется в ячейке к концу данного шага времени. Скор-

ректированное с учетом незавершенного фазового перехода значение температуры ячейки

$$T_c^{n+1} = T_m, \quad (16)$$

а новое значение части удельной теплоты плавления, выделившейся в ячейке к концу данного шага времени, становится больше на величину уменьшения с учетом коррекции температуры удельной теплоты, теряемой ячейкой за текущий шаг времени:

$$q^{n+1} = q^n + c_1 (T_m - T^{n+1}). \quad (17)$$

Продифференцировав (3а) по  $u$  и (3б) по  $x$ , исключив давление [6] и определив вихрь как

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (18)$$

получим уравнение переноса вихря

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{\bar{\eta}_v}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \beta g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi \right).$$

Это же уравнение в консервативной форме [6]:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} = -\frac{\partial (\bar{u} \bar{\zeta})}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{v} \bar{\zeta})}{\partial y} + \frac{\bar{\eta}_v}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \beta g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi \right).$$

Консервативная форма записи конечно-разностного уравнения обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения, справедливых для исходных дифференциальных уравнений.

Определяя функцию тока  $\bar{\psi}$  соотношениями

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = -\bar{v}, \quad (20)$$

уравнение (18) записываем в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = \bar{\zeta}. \quad (21)$$

Размерные величины обозначены чертой сверху (только те, которые используются и в безразмерном виде). Введем характерные размеры и приведем уравнения к безразмерному виду. Тогда уравнение переноса вихря (19b) и уравнение (18) в безразмерной форме принимают вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u \zeta)}{\partial x} - \frac{\partial (v \zeta)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \beta g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi \right),$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (23)$$

Уравнение (22) в конечных разностях (верхний индекс  $n$  при  $\zeta$ ,  $\psi$ ,  $u$ ,  $v$  и  $T$  – номер шага времени, нижние индексы  $i, j$  – номера ячеек: первый – по горизонтали, второй – по вертикали):  
при  $i \uparrow, j \uparrow$

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times \\ & \times \left[ \zeta_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} (u_{i+1,j}^n \zeta_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n \zeta_{i-1,j}^n) - \right. \\ & \left. - \frac{\tau}{2\eta} (v_{i,j+1}^n \zeta_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \zeta_{i,j-1}^n) + \frac{\tau}{\text{Re}} \times \right. \\ & \times \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{\xi^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\eta^2} \right) - \\ & \left. - \beta \tau g \left( \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\xi} \cos \varphi + \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\eta} \sin \varphi \right) \right]; \end{aligned} \quad (24)$$

при  $i \downarrow, j \downarrow$

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times \\ & \times \left[ \zeta_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} (u_{i+1,j}^n \zeta_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n \zeta_{i-1,j}^n) - \right. \\ & \left. - \frac{\tau}{2\eta} (v_{i,j+1}^n \zeta_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \zeta_{i,j-1}^n) + \frac{\tau}{\text{Re}} \times \right. \\ & \times \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\xi^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\eta^2} \right) - \\ & \left. - \beta \tau g \left( \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\xi} \cos \varphi + \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\eta} \sin \varphi \right) \right]; \end{aligned} \quad (25)$$

при  $i \uparrow, j \downarrow$

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times \\ & \times \left[ \zeta_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} (u_{i+1,j}^n \zeta_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n \zeta_{i-1,j}^n) - \right. \\ & \left. - \frac{\tau}{2\eta} (v_{i,j+1}^n \zeta_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \zeta_{i,j-1}^n) + \frac{\tau}{\text{Re}} \times \right. \\ & \times \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{\xi^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\eta^2} \right) - \\ & \left. - \beta \tau g \left( \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\xi} \cos \varphi + \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\eta} \sin \varphi \right) \right]; \end{aligned} \quad (26)$$

при  $i \downarrow, j \uparrow$

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)} \times \\ & \times \left[ \zeta_{i,j}^n - \frac{\tau}{2\xi} (u_{i+1,j}^n \zeta_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n \zeta_{i-1,j}^n) - \right. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left. - \frac{\tau}{2\eta} (v_{i,j+1}^n \zeta_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \zeta_{i,j-1}^n) + \frac{\tau}{\text{Re}} \times \right. \\ & \times \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\xi^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\eta^2} \right) - \\ & \left. - \beta \tau g \left( \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\xi} \cos \varphi + \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\eta} \sin \varphi \right) \right]. \end{aligned}$$

Функцию тока  $\psi$  находим итерационным методом Рундсона [6]:

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{k+1} = & \frac{1}{2(1 + \beta^2)} (\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^k + \\ & + \beta^2 \psi_{i,j+1}^k + \beta^2 \psi_{i,j-1}^k - \xi^2 \zeta_{i,j}). \end{aligned} \quad (28)$$

Начальные условия для гидродинамической задачи берем в виде:

$$u_{i,j}^0 = 0; \quad v_{i,j}^0 = 0; \quad \zeta_{i,j}^0 = 0; \quad \psi_{i,j}^0 = 0. \quad (29)$$

Граничные условия [6] для стенки  $i = l$  с прилипанием:

$$\psi_{l,j} = 0; \quad \zeta_{l,j} = 2 \frac{\psi_{l,j+1} - \psi_{l,j}}{\eta^2}, \quad (30a)$$

для плоскости симметрии (стенка со скольжением):

$$\psi_{0,j} = 0; \quad \zeta_{0,j} = \zeta_{1,j}. \quad (30b)$$

В угловой точке в вершине вогнутого угла уступа

$$\psi_{l,j} = 0; \quad \zeta_{l,j} = 0. \quad (30c)$$

В угловой точке в вершине выпуклого угла уступа

$$\psi_{l,j} = 0; \quad \zeta_{l,j} = 2 \frac{\psi_{l,j+1}}{\eta^2} + 2 \frac{\psi_{l+1,j}}{\xi^2}. \quad (30d)$$

Численный расчет проводился для следующих параметров среды, изложницы и стали:  $T_0 = 300 \text{ K}$ ;  $d = 88 \text{ мм}$ ;  $R_1 = 1.2 \text{ м}$ ;  $\bar{L} = 1 \text{ м}$ ;  $\varphi = 10^\circ$ ;  $T_m = 1808 \text{ K}$ ;  $\bar{\rho} = 7310 \text{ кг/м}^3$ ;  $\bar{g} = 9.81 \text{ м/с}^2$ ;  $\kappa = 2.72 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ ;  $\lambda_1 = 26.5 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м)}$ ;  $\lambda_2 = 30.3 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м)}$ ;  $\bar{a}_1 = 5.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\bar{a}_2 = 4.84 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\beta = 0.06 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$ ;  $c_1 = 800 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$ ;  $\bar{\eta}_v = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ ;  $\bar{U}_0 = 0.96 \text{ мм/с}$ . Для чугунной изложницы  $\alpha = 68 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м}^2)$ ,  $\lambda_3 = 58.7 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м)}$ . Для песчаной изложницы  $\alpha = 17 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м}^2)$ ,  $\lambda_3 = 0.325 \text{ Вт/(К}\cdot\text{м)}$ .

Правая половина изложницы разбивалась на ячейки с числом шагов по радиусу 40, а по азимуту 160, шаг времени  $\tau = 1 \text{ с}$ , шаг итераций  $\tau_1 = 0.09 \text{ мс}$ . Относительная погрешность итераций  $10^{-6}$ . Относительная погрешность, обусловленная температурной зависимостью плотности жидкой фазы,  $2.5 \cdot 10^{-3}$ . На рис. 1 показаны положения фронта затвердевания для ряда моментов времени в случае чугунной (а) и песчаной (б) изложницы. Для чугунной изложницы на момент времени  $t = 1500 \text{ с}$  (рис. 2) и для песчаной на момент времени  $t = 5000 \text{ с}$  (рис. 3) показаны профили температуры (а), вертикальной скорости (б), горизонтальной скорости (с), функции тока (д).

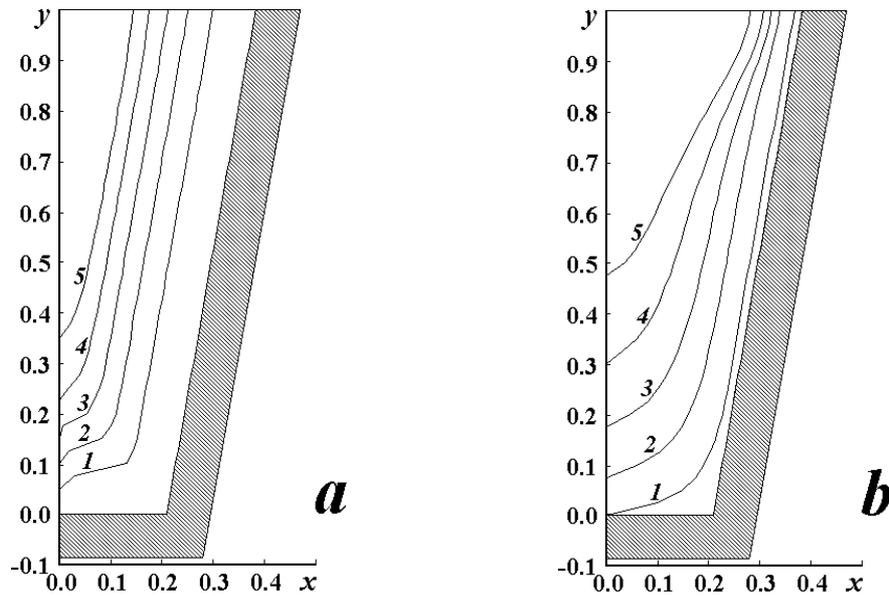


Рис. 1. Положения фронта затвердевания в клинообразной изложнице. Показана правая половина вертикального сечения. Заштрихованы дно и боковая стенка изложницы. Верхняя поверхность металла теплоизолирована. В случае чугунной изложницы (а) для моментов времени: 1 – 300 с, 2 – 600 с, 3 – 900 с, 4 – 1200 с, 5 – 1500 с. В случае песчаной изложницы (b) для моментов времени: 1 – 1000 с, 2 – 2000 с, 3 – 3000 с, 4 – 4000 с, 5 – 5000 с.

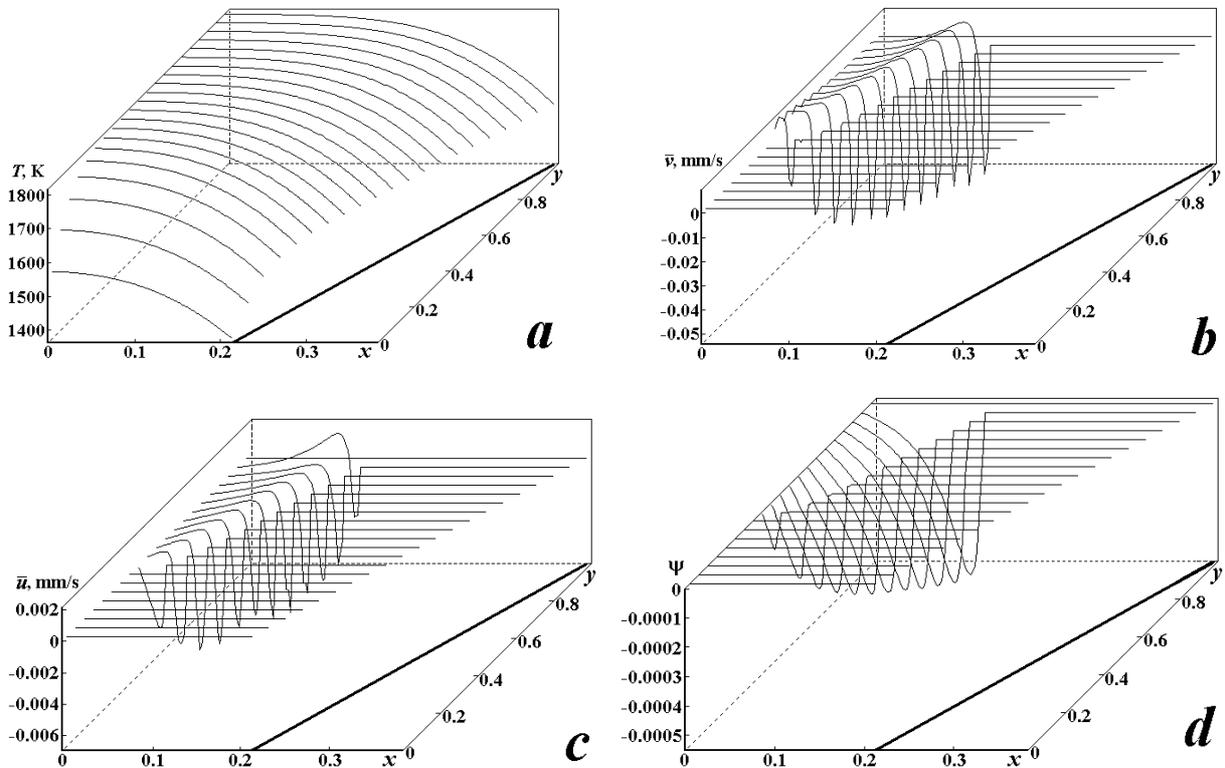


Рис. 2. Рассчитанные для момента времени  $t = 1500$  с в горизонтальных сечениях чугунной изложницы профили температур (а) в жидкой и твердой фазах, вертикальной компоненты скорости (b), горизонтальной компоненты скорости (c), значений функции тока (d) в жидкой фазе.

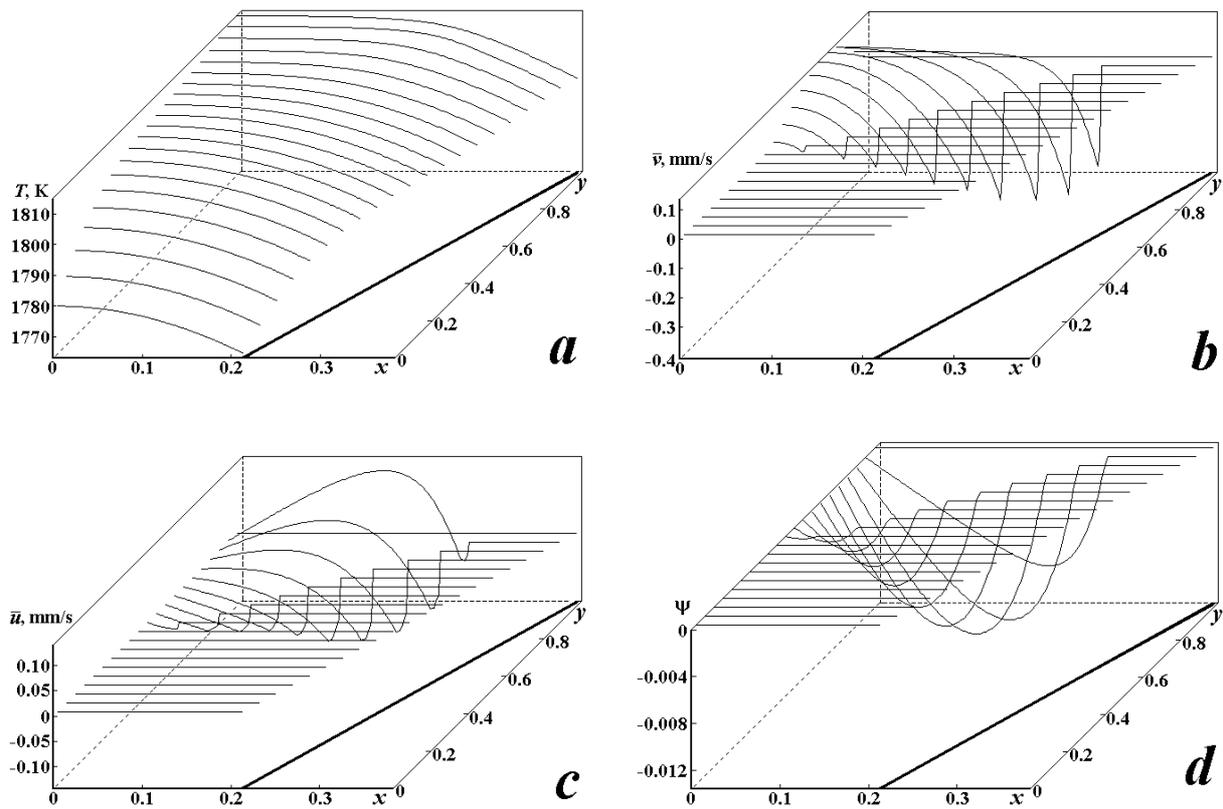


Рис. 3. Рассчитанные для момента времени  $t = 5000$  с в горизонтальных сечениях песчаной изложницы профили температур (а) в жидкой и твердой фазах, вертикальной компоненты скорости (b), горизонтальной компоненты скорости (c), значений функции тока (d) в жидкой фазе.

**Выводы**

Сравнивая положения фронтов затвердевания для чугунной и песчаной изложниц, можно отметить, что в начале процесса движение фронта затвердевания в чугунной изложнице происходит в 6 раз быстрее, чем в песчаной, а в конце затвердевания в 3 раза. Если нарастание толщины корки в чугунной изложнице происходит равномерно по всему сечению изложницы, то в песчаной наиболее быстро металл затвердевает у дна изложницы и более медленно у стенок. Из графиков для профилей вертикальной и горизонтальной скоростей (рис. 2, b, c) следует, что в чугунной изложнице вследствие конвекции возникает вихрь, прижатый к фронту затвердевания. Это же видно из графиков для вихря (рис. 2, d). В песчаной изложнице характер вихревого течения отличается от вихря в чугунной изложнице. Как видно из рис. 3 b, c, у фронта затвердевания образуется тонкая интенсивная струя металла, направленная вниз и более плавная с максимумом в центре изложницы – направленная вверх. Это же подтверждается и на графике функции тока (рис. 3, d). В работе [2] приведены экспериментальные кривые затвердевания стальных отливок в металлических и сырых песчаных формах, из которых следует, что по температуре ликвидуса в песчаных формах затвердевание в начале процесса в 6 раз, а в конце – в 3 раза более медленное ([2], стр. 37, рис. 11), что хорошо согласуется с теоретическими расчетами. Число Рейнольдса для данных расчетов составляет

$$Re = \frac{\bar{U}_0 \bar{L} \rho}{\eta_v} = 1600, \quad \text{число} \quad \text{Грасгофа}$$

$$Gr = \frac{\bar{p}^2 \bar{g} \bar{L}^3}{\eta_v^2} \beta \Delta T = 16 \cdot 10^9; \quad \text{число} \quad \text{Прандтля}$$

$$Pr = \frac{\eta_v}{\alpha_1 \rho} = 0.105; \quad \text{число} \quad \text{Нуссельта}$$

$$Nu = 0.53 \sqrt[4]{Gr \cdot Pr^2} = 61.5.$$

**Обозначения**

- $a$  – температуропроводность,
- $\alpha_1, \alpha_2$  – температуропроводность жидкой и твердой фазы,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;
- $c_1$  – удельные теплоемкости жидкой фазы,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;
- $d$  – толщина стенки изложницы,  $\text{м}$ ;
- $Gr$  – число Грасгофа;
- $\bar{g}, g$  – безразмерное и размерное ускорение свободного падения;
- $k_t$  – коэффициент теплопередачи стенки изложницы,  $\text{Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$ ;
- $\bar{L}$  – высота изложницы,  $\text{м}$ ;
- $Nu$  – число Нуссельта;
- $\bar{p}$  – давление,  $\text{Па}$ ;
- $Pr$  – число Прандтля;

$Q$  – плотность теплового потока через стенку изложницы, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $q$  – часть удельной теплоты плавления, отведенная от ячейки на данный момент времени, Дж/кг;  
 $q_s$  – удельная (отнесенная к единице массы) теплота, отведенная от ячейки за шаг времени, Дж/кг;  
 $R_1$  – радиус дна изложницы, м;  
 $Re$  – число Рейнольдса;  
 $T$  – температура, К;  
 $T_0$  – температура окружающего изложницу воздуха, К;  
 $T_1$  – температура металла начальная, К;  
 $T_m$  – температура кристаллизации, К;  
 $T_b, T_w$  – температуры внутренней поверхности дна и боковой стенки изложницы, К;  
 $T_e$  – температура внешней поверхности изложницы;  
 $\bar{t}, t$  – размерное и безразмерное время, с;  
 $\bar{U}_0$  – характерная скорость, м/с;  
 $\bar{u}, u$  – размерная и безразмерная горизонтальная составляющая скорости, м/с;  
 $\bar{v}, v$  – размерная и безразмерная вертикальная составляющая скорости, м/с;  
 $\bar{x}, \bar{y}, x, y$  – размерные и безразмерные координаты, м;  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи внешней поверхности изложницы, Вт/(К·м<sup>2</sup>);  
 $\beta$  – коэффициент объемного теплового расширения, К<sup>-1</sup>;  
 $\zeta, \zeta$  – размерная и безразмерная величина вихря, с<sup>-1</sup>;  
 $\bar{\eta}, \eta$  – размерный и безразмерный шаг итераций по вертикали;  
 $\bar{\eta}_v$  – динамическая вязкость расплава, кг/(м·с);  
 $\kappa$  – удельная теплота плавления, Дж/кг;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности металла, Вт/(К·м);  
 $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности расплава,  
 $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности твердого металла,  
 $\lambda_3$  – коэффициент теплопроводности материала изложницы, Вт/(К·м).

$\bar{\xi}, \xi$  – размерный и безразмерный шаг итераций по горизонтали;  
 $\rho$  – плотность металла, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\tau$  – шаг итераций по времени;  
 $\varphi$  – угол конусности изложницы, градус;  
 $\bar{\psi}, \psi$  – функция тока размерная и безразмерная, м<sup>2</sup>/с.  
 Индексы:  
 b (bottom) – дно изложницы;  
 c (corrected) – скорректированный;  
 e (external) – наружный,  
 $i, j$  – номера ячеек по горизонтали и по вертикали;  
 $l$  – номер по горизонтали ячейки, соответствующей фронту затвердевания;  
 $k$  – номер итерации;  
 m (melting) – плавление;  
 $n$  – номер шага времени;  
 s (specific) – удельный;  
 t (thermal transmission) – теплопередача;  
 v (viscosity) – вязкость;  
 w (wall) – боковая стенка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Раділ Р. У. Затвердевание отливок. М.: Машгиз, 1960. – 391 с.
2. Bishop H. F., Brandt F. A., Pellini W. S. Solidification Mechanism of Steel Ingots // J. of Metals. – 1952. – Vol. 194. (January). P. 44.
3. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, В. В. Филиппов. Т. 2. Минск. "Белорусская наука" – 2000. С. 640.
4. Промышленные теплотехнологии: Моделирование нелинейных процессов Т. 5 / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, А. П. Несенчук и др.; Под общ. ред. В. И. Тимошпольского и А. П. Несенчука. Минск.: Вышэйшая школа, 2000. – С. 319.
5. Безуглый В. Ю. Численные методы теории конвективного теплообмена. Киев–Донецк: Вища школа, 1984. – 176 с.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. – 616 с.