

- Степаненко // Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии. Сборник научных трудов. – Выпуск 18. – 2008. – С. 200-209
6. Тогобицька Д.М. Інформаційно-аналітична система для дослідження кристалізаційної здатності металургійних шлаків/ Тогобицька Д.М., Степаненко Д.О., Хамхотько А.Ф., Ліхачев Ю.М., // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 2(67). – Дніпропетровськ, 2010. – С.74-80.
 7. Приходько Э В. Моделирование структуры при исследовании связи между составом и свойствами окисных расплавов / Э.В.Приходько. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1980. –Т.16, №5. –С.900-906.
 8. Приходько Э.В. Строение и физико-химические свойства металлургических шлаковых расплавов / Э.В. Приходько, А.Ф. Хамхотько, Д.Н. Тогобицька // Экспресс-информация. Ин-т «Черметинформация». –М.: 1983. - 21 с.
 9. Жило Н.Л., Большакова Л.И., Остроухов М.Я. и др. Физико-химические свойства конечных доменных шлаков заводов СССР / Н.Л. Жило, Л.И. Большакова, М.Я. Остроухов и др.//В сб. Шлаковый режим доменных печей. – М.: Металлургия. -1967. –С.149-168.

пост. 19.05.2010

Особенности итерационного решения нелинейного дискретизированного уравнения магнитостатики

СМОЛЯНСКИЙ П.С.

Криворожский технический университет

Исследованы возможные причины плохой сходимости или расходимости итерационного процесса решения нелинейного дискретизированного уравнения магнитостатики для заданной дискретизации. Предложен эффективный алгоритм реализации итерационного решения с контролем точности и сходимости итерационного процесса.

Досліджені можливі причини поганої збіжності чи розбіжності ітераційного процесу рішення нелінійного дискретизованого рівняння магнитостатики для заданої дискретизації. Запропоновано ефективний алгоритм реалізації ітераційного рішення з контролем точності та збіжності ітераційного процесу.

Possible causes of poor convergence or divergence of the iterative solving process the nonlinear discretized equations of magnetostatics for a given sample are researched. An effective algorithm for implementing the iterative solution with the control of accuracy and convergence of the iterative process is preposed.

Постановка. Разработка методов расчета электромагнитных полей, в частности магнитостатических, является одним из основных и быстро развивающихся направлений математической физики. Только высокоточный массовый вычислительный эксперимент может обеспечить оптимальное проектирование прецизионных устройств электронной техники, что гарантирует компактность и минимальный вес устройства, энергопотребление и стоимость, с одной стороны, и его надежную и устойчивую работу, с другой стороны. Натурный эксперимент на современном этапе развития вычислительной техники нужно проводить на завершающем этапе проектирования устройств, при принятии ключевых решений. Одним из эффективных и распространенных способов расчета магнитостатических систем является метод нелинейных интегральных уравнений. Итерационное решение таких уравнений ставит целый ряд вопросов, которые касаются сходимости метода итераций и влияния характера дискретизации на итерационное решение.

Анализ предыдущих исследований. Существуют два принципиально различных подхода к построению интегральных уравнений магнитостатики [1-4].

Первый приводит к уравнениям относительно фиктивных (расчетных) источников поля, распределенных только на границе исследуемых областей (метод вторичных источников). Второй подход [3, 4] приводит к уравнениям относительно пространственно распределенных источников во всей области магнетиков, а не только источников на границе. Уравнения в таком случае формулируются либо непосредственно относительно физических векторов поля, либо расчетных векторов, по которым можно просто определить физические вектора поля. Наиболее распространены уравнения относительно вектора намагниченности \vec{M} , напряженности поля \vec{H} или индукции магнитного поля \vec{B} . Такой метод расчета называют методом пространственных интегральных уравнений (ПРИУ) [4]. Он является наиболее общим и естественным методом расчета магнитных систем, однако требует больше ресурсов, чем метод вторичных источников. Тем не менее, он имеет существенные преимущества перед методом фиктивных источников: универсальность и физическую наглядность.

Что касается исследования итерационного процесса, то подавляющее большинство авторов предлагают либо опираться на основные теоремы анализа, и прежде всего принцип сжатых отображений, либо не упоминают об этой проблеме вовсе. Недостаточно исследованы процессы итерационного решения нелинейного дискретизированного уравнения магнитостатики, влияния дискретизации на характер и быстроту сходимости итерационного процесса. Не до конца выясненными остаются и критерии окончания итерационного процесса в общем случае.

Цель работы. На первом этапе развития ПРИУ из-за недостаточного быстродействия вычислительных систем наиболее актуальной проблемой было эффективное формирование системы нелинейных уравнений (СНУ) для заданной дискретизации. Затем решение СНУ сводилось к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) за счет ее линеаризации. На этом этапе развития ПРИУ число элементов дискретизации было относительно невелико, форма их различалась незначительно, поэтому СЛАУ таких магнитных систем были относительно хорошо обусловленными. На современном этапе развития ПРИУ одной из наиболее актуальных проблем становится именно решение СНУ и СЛАУ в силу большого числа элементов дискретизации и их значительной вариации в размерах и формах. Это ведет к тому, что итоговая СЛАУ таких магнитных систем становится плохо обусловленной. Следует заметить, что этап формирования СНУ и СЛАУ требует гораздо больших ресурсов, чем их итерационное решение. Поэтому даже значительное увеличение времени решения СНУ за счет более сложных, но эффективных алгоритмов не приведет к существенному увеличению времени расчета магнитной системы, однако это может решающим образом сказаться на качестве расчета.

В статье рассматриваются особенности численной реализации алгоритма расчета магнитостатических полей методом ПРИУ и влияние процесса дискретизации на процесс итерационного решения. Практика решения задач магнитостатики показывает, что в большинстве случаев процесс итераций сходится, но иногда очевидно, что результаты решения задачи физически не верны. Например, при случайной дискретизации области магнетиков, в ряде случаев процесс явно расходится, несмотря на то, что согласно теории, итерационный процесс обязан сходиться к физически осмысленному решению. В общем случае непонятно, сошелся ли итерационный процесс, насколько полученное решение отличается от точного, каким образом дискретизация влияет на характер сходимости итерационного процесса. Отсутствует также детальное исследование влияния вида кривой намагниченности на скорость и характер сходимости итерационного процесса.

Задача предлагаемой работы состоит в том, чтобы исследовать основные аспекты численной реализации процесса итераций для нелинейного уравнения магнитостатики в случае изотропной среды, которая является наиболее важным частным случаем ферромагнитных сред.

Необходимо определить, как влияет качество и характер дискретизации на процесс сходимости итераций, требуется выяснить влияние количества итераций на погрешность решения. Необходимо исследовать влияние ферромагнитного материала на характер и ско-

рость сходимости. Для этого предложен алгоритм, который для заданной магнитной системы и ее конкретной дискретизации позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости итерационного процесса. Особенно важно то, что в большинстве случаев это не требует существенного усложнения алгоритма и не снижает его эффективности.

Изложение основных результатов. В статье рассматривается пространственное интегральное уравнение поля относительно расчетного вектора $\bar{U} = \bar{B} / \mu_0 + \bar{H} = 2 \cdot \bar{H} + \bar{M}$ [3], где \bar{B} – вектор индукции, \bar{H} – вектор напряженности поля, \bar{M} – вектор намагниченности. В свою очередь, это соотношение можно записать так: $\bar{U} = 2 \cdot \bar{H}_0 + 2 \cdot \bar{H}_M + \bar{M}$. Здесь \bar{H}_M – напряженность поля, созданная намагниченностью среды, а $\bar{H}_0(\bar{x})$ – напряженность внешнего поля, созданная первичными источниками поля – токовыми обмотками и постоянными магнитами, то есть ферромагнетиками с заранее заданным и известным, практически не зависящим от внешнего поля вектором намагниченности. В этом случае справедливо модифицированное интегральное уравнение [3]:

$$\bar{U}(x) = 2 \cdot \bar{H}_0(x) + \Pi \bar{M}, \quad (1)$$

где $\Pi \bar{M} = 2 \cdot \int_G [K(x, y) \cdot \bar{M}(y) \cdot dv_y - N_\sigma \cdot \bar{M}] + \bar{M}$; $K(x, y)$ – симметричный тензор второго ранга с компонентами $K_{ij} = (\alpha_i \cdot \alpha_j - \delta_{ij}) / r^m$; $m = 2, 3$ – размерность пространства, α_i – направляющие косинусы радиус-вектора r ; δ_{ij} – символ Кронекера; переменные x, y – точки в двумерном или трехмерном пространстве.

Можно показать, что для случая кусочно-постоянной изотропной среды следует положить $N_\sigma = 0$. Именно такая среда будет рассматриваться в дальнейшем. Поэтому окончательно:

$$\Pi \bar{M} = 2 \cdot \int_G K(x, y) \cdot \bar{M}(y) \cdot dv_y + \bar{M}.$$

Интегрирование ведется по всей области магнетиков G . Далее мы будем рассматривать для простоты расчет плоских двумерных систем. Случай осесимметричных и трехмерных систем применительно к исследуемым вопросам аналогичен двумерным. Уравнение (1) должно быть дополнено кривой намагничивания материала $B = B(H)$, с помощью которой можно получить нелинейную зависимость $M = M(U)$ длины вектора M от длины вектора U и связать эти две величины в одном нелинейном интегральном уравнении.

В этих условиях необходимо найти распределение расчетного вектора $\bar{U}(x)$, а затем с помощью кривой намагничивания можно получить также распределение вектора намагниченности $\bar{M}(x)$. Далее напряженность поля в любой точке можно получить с помощью интегрирования по известным источникам поля [3, 4].

Наиболее универсальным методом решения нелинейных уравнений является метод итераций. Он применим, если норма оператора Π из уравнения (1), удовлетворяет условию Липшица с константой q меньше единицы [5]:

$$\|\Pi \bar{M}_1 - \Pi \bar{M}_2\| \leq q \|\bar{M}_1 - \bar{M}_2\|.$$

Для оператора ПМ из уравнения (1) доказано [3], что его норма в пространстве $L_2(G)$ меньше единицы. Таким образом, теоретически гарантирована сходимость метода итераций для уравнения [1] с любого начального приближения.

Для получения численного решения область магнетиков G разбивается на совокупность элементарных областей G_i таким образом, чтобы $G = \cup G_i$ и $G_i \cap G_j$ при $i \neq j$. Удобно выбирать области G_i треугольниками или прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, а также произвольными четырехугольниками. В пределах элементарной области G_i свойства среды можно считать постоянными, в частности, имеющими одну и ту же намагниченность. Таким образом, уравнение (1) аппроксимируется с помощью кусочно-постоянного приближения вектора $\bar{M}(\bar{x})$ сколь угодно точно.

Рассмотрим дискретный аналог уравнения (1) в случае изотропной нелинейной среды. В результате получается нелинейное векторное уравнение относительно значений вектора $\bar{U}(\bar{x})$, рассматриваемых в центрах тяжести x_i элементов G_i :

$$\bar{U}(x_i) = 2\bar{H}_0(x_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot \bar{M}(x_j) + \bar{M}(x_i). \quad (2)$$

Здесь A_{ij} – тензор второго ранга. Он получен путем интегрирования по области G_j функции $K(x, y)$ и имеет

$$\text{вид } A_{ij} = \begin{pmatrix} T_{xx}, T_{xy} \\ T_{yx}, T_{yy} \end{pmatrix}, \text{ его компоненты вычисляются чис-$$

ленно или аналитически при интегрировании по области G_j . Компоненты тензора A_{ij} определяют составляющие напряженности поля в точке x_i от элемента дискретизации с номером j . Для изотропной среды расчетный вектор \bar{U} можно представить в виде:

$$\bar{U} = (\mu + 1)/(\mu - 1)\bar{M} = [1 + 2/(\mu - 1)] \cdot \bar{M} = (1 + 2/\chi) \cdot \bar{M},$$

где \bar{M} – это намагниченность среды, μ – магнитная проницаемость среды, χ – магнитная восприимчивость среды в одной и той же точке пространства (напомним, что $\chi = \mu - 1$). Среду назовем линейной, если $\chi = const$ во всех точках области магнетиков, и идеальной, если $\chi = \infty$ во всех точках области магнетиков. Точнее, $\chi = const \gg 1$. Идеальная среда является хорошим приближением для линейных сред при умеренных полях первичных источников. Эти среды являются самыми простыми ферромагнитными средами.

Запишем (2) в эквивалентной векторно-матричной форме:

$$(E + 2 \cdot D) \cdot \bar{M} = 2\bar{H}_0 + 2 \cdot A \cdot \bar{M} + \bar{M}, \quad (3)$$

где A – клеточная матрица, состоящая из клеток-тензоров A_{ij} , E – единичная матрица. Размерность всех матриц A , D и E равна $2n$, где n – число элементов дискретизации, так как составной вектор \bar{M} состоит из n элементарных векторов намагниченности, вычисленных в центрах тяжести элементов. В свою очередь, элементарный вектор намагниченности в двумерном случае имеет две компоненты. Здесь D – диагональная матрица с элементами $1/\chi_i$ на главной диагонали, причем:

$$D_{11} = 1/\chi_1, D_{22} = 1/\chi_2, \dots, D_{2n-1, 2n-1} = 1/\chi_n, D_{2n, 2n} = 1/\chi_n.$$

Упрощая (3), получим

$$\bar{M} = 2 \cdot \bar{H}_0 + (E + 2 \cdot A - 2 \cdot D)\bar{M} = 2 \cdot \bar{H}_0 + S \cdot \bar{M}, \quad (4)$$

здесь $S = E + 2 \cdot A - 2 \cdot D$. Такая форма записи уравнения (4) нужна для организации итерационного процесса. Обозначим через $S' = E + 2 \cdot A$, где матрица S' описывает влияние дискретизации на итерационный процесс при идеальной среде, то есть $\chi = \infty$. Очевидно, что $S = S' - 2 \cdot D$ и при заданной кривой намагничивания $B = B(H)$ матрица D будет вполне определена в силу существования и единственности решения уравнения (1).

Итерационный процесс для уравнения (4) может быть записан следующим образом:

$$\bar{M}_{n+1} = 2\bar{H}_0 + (E + 2A - 2D_n)\bar{M}_n = 2\bar{H}_0 + S_n\bar{M}_n. \quad (5)$$

Здесь фактически присутствуют два итерационных процесса: относительно вектора \bar{M}_n и диагональной матрицы D_n , которая характеризует свойства ферромагнитного материала. Величина диагональных элементов D_n пересчитывается по кривой намагничивания материала после каждой итерации. Для линейной среды матрица D_n постоянна, для идеальной среды матрица D_n нулевая. Изменение матрицы D_n превращает итерационный процесс (5) в нестационарный, что существенно осложняет исследование сходимости такого процесса. Однако эти итерационные процессы неравноценны: основную трудность представляет итерационный процесс по вектору \bar{M}_n , матрица D_n , как показывает вычислительный эксперимент, стабилизируется всего за несколько итераций и ее величина практически в дальнейшем не меняется. После этого итерационный процесс (5) становится стационарным, к нему применимы все теоремы о сходимости стационарных итерационных процессов [10]. Поэтому итерационный процесс (5) можно назвать квазистационарным или почти стационарным. Также важно заметить, что абсолютная величина элементов матрицы D_n для реальных ферромагнетиков мала. Так, например, для реальной кривой намагничивания электротехнической стали возможные значения элементов меняются в пределах $0,689 \cdot 10^{-3} - 4,735 \cdot 10^{-3}$, тогда как диагональные элементы матрицы A имеют значения порядка 0,5 и при изменении формы меняются не очень существенно. Если $\|S_n\| < q < 1$ для всех n , то итерационный процесс (5) сходится, это следует из принципа сжатых отображений [11]. Если известны верхние оценки для норм матриц $\|S'\| < r$ и $\|D\| < p$, причем $r + 2 \cdot p < q < 1$, то справедливо $\|S\| < q < 1$ для уравнения (4) или $\|S_n\| < q < 1$ для (5). Это соотношение можно проверить для реального ферромагнитного материала, если известна оценка для $\|S'\|$. Для диагональной матрицы D норма – это модуль максимального по модулю элемента матрицы. Тогда в силу $\|S\| = \|S' - 2 \cdot D\| \leq \|S'\| + 2\|D\|$ получаем требуемое неравенство. Для примера 1 (см. ниже) соотношение $\|S_n\| < q < 1$ гарантировано выполняется. Впрочем, эта оценка достаточно грубая, реальный итерационный процесс сходится и при более мягких ограничениях.

Так как норма оператора $\overline{P\overline{M}}$ меньше единицы, уравнение (1) должно иметь единственное решение, процесс итераций для такого уравнения должен сходиться. Если бы вычисления велись с бесконечным числом разрядов, то матрица S являлась бы дискретным аналогом оператора $\overline{P\overline{M}}$, и теоретически от уравнения (4) следует ожидать таких же свойств как и от непрерывного уравнения (1). Однако свойства дискретного и непрерывного оператора могут качественно различаться за счет погрешностей округления в процессе расчета, поэтому требуется предложить алгоритм решения дискретного уравнения (2), который бы учитывал возможность нарушения части свойств, присущих непрерывному оператору $\overline{P\overline{M}}$. Нормы матриц S и S' могут быть больше единицы, эти матрицы могут быть вырождены. Подобный пример приведен в конце статьи. Это связано с тем, что вычисления ведутся с конечным числом разрядов, а матрицы S и S' в общем случае несимметричны. Известно [7], что собственные числа таких матриц могут быть очень чувствительны к погрешностям вычислительного процесса. Ответ о действительном характере сходимости итерационного процесса для уравнения (5) сводится к численной оценке спектральных радиусов матриц S' и S . Обозначим через $\rho(S') = \max|\lambda'_i|$, $1 \leq i \leq n$ - максимальное по модулю собственное число матрицы S' . Очевидно, что в случае $\rho(S') > 1$ имеет место расходимость итерационного процесса [10], дискретизация неудачна. Это происходит, как правило, если величины дискретных элементов значительно различаются и/или один размер существенно преобладает, дискретные элементы являются вытянутыми в одном из направлений. В таком случае следует прекратить выполнение алгоритма и произвести более правильную дискретизацию. Важно заметить, что первичным является именно влияние дискретизации, а не среды. Действительно, если $1 + C = \rho(S') > 1$, $C > 0$, то существует целое множество физически корректных линейных сред, для которых итерационный процесс уравнения (4) будет расходящимся. Итерационный процесс с линейной изотропной средой с матрицей $D = V < C/2$ будет расходящимся, так как $S = S' - 2D$, $\lambda_i(S) = \lambda'_i(S') - 2 \cdot V$, $\max|\lambda_i(S)| > 1, 1 \leq i \leq n$. Очевидно, что алгоритм решения уравнения (4) должен обеспечивать получение решения для любых физически корректных сред, в том числе и описанных выше.

Предположим, что спектральный радиус идеальной матрицы S' меньше единицы. В этом случае итерационный процесс (4) для идеальной среды должен сходиться с любого начального приближения, однако нельзя гарантировать единственности решения. Следующий вопрос, который можно поставить в связи с итерационным решением уравнения (4) сводится к уточнению влияния материала ферромагнетика. Упрощая, уравнение (4) можно записать в эквивалентном виде так:

$$(A - D)\overline{M} = -\overline{H}_0. \quad (6)$$

Перепишем векторное уравнение (5) в следующем виде:

$$(A - D_t)\overline{M}_t = -\overline{H}_0, \quad (7)$$

где A - матрица A_{ij} тензоров, \overline{D}_t - вектор точных значений $1/\chi_i$ в центре i -го элемента, таких, какие они

должны быть по дискретному уравнению (6). То есть, будем считать, что вычисления ведутся с бесконечным числом разрядов, без погрешностей округлений. Как указывалось выше, в случае, когда норма дискретного оператора $\overline{P\overline{M}}$ меньше единицы, то решение (7) существует и единственно, оно является частным случаем уравнения (1) [3]. Для матрицы $A - D_t$ должна существовать обратная. Очевидно, что для матрицы $A - D_t$ эти условия выполнены в силу теоремы существования решения уравнения (1). Рассмотрим также уравнение

$$(A - D_p)\overline{M}_p = -\overline{H}_0, \quad (8)$$

где A - та же матрица тензоров, что и в уравнении (7), \overline{D}_p - некоторая диагональная матрица приближенных значений $1/\chi_i$ в центре i -го элемента, полученных в результате расчета. Таким образом, уравнения (7) и (8) отличаются только диагональными элементами, которые отражают влияние ферромагнитной среды. Если допущена некоторая погрешность в вычислениях D_p , то матрица $A - D_p$ может быть вырожденной, для нулевого собственного значения будет существовать хотя бы один не нулевой собственный вектор \vec{y} . В этом случае итерационный процесс (4) будет иметь не единственное решение. Эти решения могут различаться на любой вектор $k \cdot \vec{y}$ [10]. Именно в результате этого можно получить нефизическое решение. Чтобы избавиться от этого, следует применить либо регуляризацию по Тихонову, либо найти нормальное псевдорешение системы (4) или эквивалентной ей системе (8) [8].

Однако, если $\|D_t - D_p\|$ мало и существует $(A - D_t)^{-1}$, то существует и $(A - D_p)^{-1}$. Известно [8], что если матрица B невырождена, а для нормы матрицы ΔB справедливо неравенство $\|\Delta B\| < 1 \|B^{-1}\|$, то матрица $B + \Delta B$ также невырождена. Так как $B = (A - D_t)^{-1}$ существует, то обратная матрица для $(B + \Delta B)^{-1} = (A - D_p)^{-1} = (A - D_t + D_t - D_p)^{-1}$ тоже существует, если только выполняется $\|(D_t - D_p)\| < 1 \|(A - D_t)^{-1}\|$. Другими словами, если матрицы D_t и D_p близки по норме, то обратная матрица для $B = (A - D_p)$ существует и уравнение (8) однозначно разрешимо. Предположим, что указанное неравенство выполнено. Тогда можно оценить норму разности решений уравнений (7) и (8).

Так как $(A - D_t)\overline{M}_t = -\overline{H}_0$ и $(A - D_p)\overline{M}_p = -\overline{H}_0$, то $(A - D_p)\overline{M}_p = (A - D_t)\overline{M}_t$,

$$(A - D_p)(\overline{M}_p - \overline{M}_t) + (A - D_p)\overline{M}_t = (A - D_t)\overline{M}_t,$$

$$(A - D_p)(\overline{M}_p - \overline{M}_t) = (D_p - D_t)\overline{M}_t,$$

$$(A - D_p)(\overline{M}_p - \overline{M}_t) = (D_p - D_t)(\overline{M}_t - \overline{M}_p) + (D_p - D_t)\overline{M}_p.$$

Отсюда

$$(\overline{M}_p - \overline{M}_t) =$$

$$= (A - D_p)^{-1}[(D_p - D_t)(\overline{M}_t - \overline{M}_p) + (D_p - D_t)\overline{M}_p].$$

Переходим теперь к нормам матриц:

$\|\bar{M}_p - \bar{M}_t\| \leq \|(A - D_p)^{-1}\| \cdot \|D_p - D_t\| (\|\bar{M}_t - \bar{M}_p\| + \|\bar{M}_p\|)$.
 Обозначим через $q = \|(A - D_p)^{-1}\| \cdot \|D_p - D_t\|$, причем будем считать разность $\|D_t - D_p\|$ столь малой, что справедливо неравенство $q < 1$. Тогда $\|\bar{M}_p - \bar{M}_t\| \leq q(\|\bar{M}_t - \bar{M}_p\| + \|\bar{M}_p\|)$, $(1 - q)\|\bar{M}_p - \bar{M}_t\| \leq q\|\bar{M}_p\|$, или с учетом обозначений: $\|\bar{M}_p - \bar{M}_t\| \leq q/(1 - q)\|\bar{M}_p\|$.
 Обозначим: $V = \|D_p - D_t\|$. Окончательно получим:

$$\|\bar{M}_p - \bar{M}_t\| \leq \|(A - D_p)^{-1}\| \cdot V \cdot \|\bar{M}_p\| / (1 - \|(A - D_p)^{-1}\| \cdot V). \quad (9)$$

Проанализируем формулу (9): норма $\|\bar{M}_p\|$ вычисляется в процессе решения, величину $\|(A - D_p)^{-1}\|$ также можно найти в процессе итераций. Если удалось бы каким-то образом оценить норму $\|D_t - D_p\|$, то можно было бы получить оценку для погрешности итерационного решения. Но это можно сделать, вычислив величину D_p после k итераций ($k=15-30$) уравнения (4) и зафиксировав ее. Затем вычислим ее же после еще $3k$ итераций. Эту матрицу можно принять за D_t , она практически уже не меняется с увеличением числа итераций.

Таким образом, решение нелинейного дискретизированного уравнения (2) сводится к двум зависящим друг от друга процессам:

- 1) приближенного нахождения величины $1/\chi_i$ в центре каждого ферромагнитного элемента;
- 2) определения вектора намагниченности в центре каждого ферромагнитного элемента.

Предлагаемый алгоритм решения уравнения (2) упрощенно состоит из следующих шагов:

- 1) Расчет матриц A и S' .
- 2) Оценка нормы матрицы S' . Для этого можно использовать степенной метод.
- 3) Вычисление матрицы D_p методом итераций с использованием уравнения (2).

Шаги 2 и 3 можно осуществлять одновременно. Даже если матрица S' не помещается в оперативную память, наличие шага 2 не увеличивает время выполнения алгоритма. Для оценки нормы матрицы S' практически всегда достаточно $k_n=50$ итераций. Для вычисления D_p достаточно $k=15-30$ итераций.

4) Если $\|S'\| > 1$, то это означает, что для идеальной среды и линейных сред с достаточно большой величиной χ процесс итераций будет расходиться. Как правило, такие ситуации возникают из-за неудачной дискретизации. В этом случае следует прекратить выполнение программы, изменить дискретизацию магнитной системы и вернуться к шагу 1.

5) Аналогично пункту 2 оценим норму матрицы $S = S' - 2 \cdot D_p$. Если $\|S\| > 1$, то аналогично пункту 4, в противном случае можно выполнять итерационный процесс для уравнения (2).

6) Решение системы (4) итерационными методами с фиксированной величиной χ_i , найденной на шаге 3. Если предполагается применение формулы (9) для

оценки погрешности решения, то следует выполнить и шаг 7.

7) Решение системы (4) итерационными методами с нефиксированными величинами χ_i . Этим способом проверяем, установилась ли величина χ_i после k итераций.

Для проверки эффективности предлагаемых методов выполнялось решение системы (7) прямыми методами с фиксированной величиной χ_i , найденной после шага 3. Это дает возможность применить формулу погрешности (9), то есть вычислить $\|\bar{M}_T - \bar{M}_I\|$, для чего находим норму разности решения \bar{M}_I системы (4), полученного итерационными методами решения \bar{M}_T эквивалентной системы (8), которое получено прямыми методами. При этом полагаем, что магнитная восприимчивость уже определена практически точно на шаге 3.

Следует заметить, что рассматриваемые прямые методы позволяют решать как хорошо обусловленные, так и плохо обусловленные и вырожденные системы. В случае плохо обусловленных или вырожденных систем определяется решение (8) с минимальной нормой, которое называется нормальным псевдорешением [7]. Для этого в данной работе в качестве прямых методов были использованы:

- а) метод Гаусса с регуляризацией по Тихонову;
- б) метод сопряженных градиентов с регуляризацией по Тихонову;
- в) получение нормального псевдорешения.

Попытаемся выявить влияние дискретизации и характер итерационного процесса метода итераций, с помощью которого мы будем решать эквивалентные системы (4) и (8). Для примера рассмотрим расчет магнитного поля плоской двумерной системы, изображенной ниже. В качестве первичного поля выбран магнитотвердый материал, намагниченность которого практически не зависит от внешнего поля, с вертикальной намагниченностью в 0.7Тл. Материал магнитопровода – электротехническая сталь. Стрелками на рисунке изображены величина и направление векторов намагниченности. В дальнейшем выберем количество итераций $k=30$.

Будем контролировать следующие параметры расчета:

- 1) $R_p^q = \sqrt{\sum_{i=1}^n (1/\chi_i^{(p+1)} - 1/\chi_i^{(q)})^2}$, для расчета выберем $p=30, q=p-1$.
- 2) Собственные числа идеальной матрицы Max , Min . Идеальной матрицей будем называть матрицу $S' = E + 2 \cdot A$.
- 3) Собственные числа реальной матрицы Max , Min . Реальной матрицей будем называть матрицу $S = E + 2 \cdot A - 2 \cdot D_p$.
- 4) Спектральную норму обратной реальной матрицы $\|(A - D_p)^{-1}\|$.
- 5) Норму разности $\|\bar{M}_T - \bar{M}_I\|$ итерационного \bar{M}_I и точного решения \bar{M}_T , полученного прямыми методами.

6) Сходимость итерационного метода,

$$T_n = \|\bar{U}_{n-1} - \bar{U}_n\| / \|U_n\|.$$

В примере 1 количество элементов дискретизации 187. Для этого примера были получены следующие результаты:

1) После 30 итераций $R_{k-1}^k = 1.550602E-0010$.

2) Собственные числа идеальной матрицы

$$S' = E + 2 \cdot A :$$

$$\text{Max}=0.99080949537933471,$$

$$\text{Min}=5.1098542261944851e-005.$$

3) Собственные числа реальной матрицы

$$S = E + 2 \cdot A - 2 \cdot D_p :$$

$$\text{Max}=0.99149858619966702,$$

$$\text{Min}=0.00033426071882701014.$$

4) Спектральная норма обратной реальной матрицы

$$\|(A - D_p)^{-1}\| = 348.01655.$$

5) Норма разности итерационного и точного решения, полученного прямыми методами $s=2.516203E-0001$.

6) При итерации 120 достигнута точность

$$T_n = 4.585809E-0004.$$

Процесс сходится к качественно (физически) верному решению, уклонение между прямыми и итерационными методами относительно мало. Максимальное по модулю собственное число реальной и идеальной матрицы меньше единицы, минимальные собственные числа отличны от нуля. Процесс сходится (рис. 1).

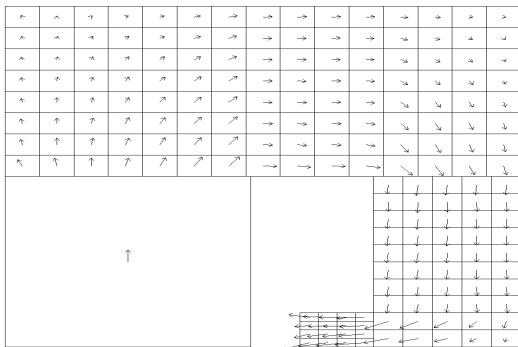


Рис. 1. Иллюстрация распределения поля в примере 1

В примере 2 количество элементов дискретизации 131.

1) После 29 итерации $R_{k-1}^k = 5.550892E-0011$.

2) Собственные числа идеальной матрицы

$$S' = E + 2 \cdot A :$$

$$\text{Max}=1.0000341300631297, \text{Min}=0.0092667453096.$$

3) Собственные числа реальной матрицы

$$S = E + 2 \cdot A - 2 \cdot D_p :$$

$$\text{Max}=1.0007271902516457,$$

$$\text{Min}=0.0085765573470012631.$$

4) Спектральная норма обратной реальной матрицы

$$\|(A - D_p)^{-1}\| = 105.0936.$$

5) Норма разности итерационного и точного решения, полученного прямыми методами $s=2.594965E+0000$.

6) При итерации 120 достигнута точность

$$T_n = 5.182182E-0003.$$

Процесс сходится к качественно (физически) неверному решению, уклонение между прямыми и итерационными методами велико. Максимальное по модулю собственное число реальной и идеальной матрицы больше единицы. Вследствие этого процесс расходится (рис. 2).

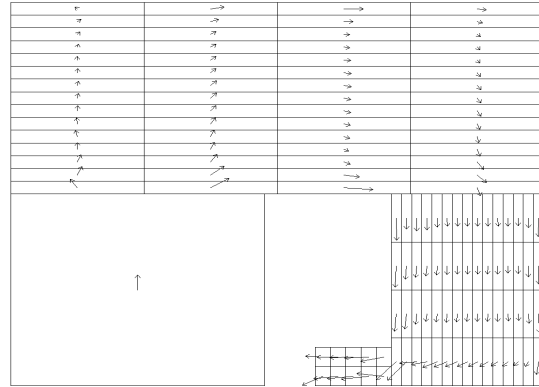


Рис. 2. Иллюстрация распределения поля в примере 2

Выводы

- 1) Получены критерии для контроля и анализа итерационного процесса дискретизированного уравнения магнитостатики.
- 2) Получена формула (9), которая связывает погрешность решения нелинейного уравнения магнитостатики со свойствами СЛАУ дискретизированного уравнения.
- 3) Предложен эффективный алгоритм анализа качества дискретизации на основании формулы (9).
- 4) Показано, что процесс решения нелинейного уравнения магнитостатики сводится к двум практически независимым вычислительным процессам:
 - a) итерационному процессу определения значения магнитной восприимчивости в каждом элементе дискретизации;
 - b) решению СЛАУ, определяющему векторы намагниченности.
- 5) Главную роль в успешной сходимости метода итераций для нелинейного уравнения магнитостатики играет дискретизация, а не ферромагнитный материал магнитопровода, причем очень важна форма элементов.
- 6) В результате численных экспериментов показано, что модуль максимального собственного числа может превышать единицу в результате даже не очень существенного искажения формы элементов. В этом случае следует изменить дискретизацию или применить для решения методы регуляризации по Тихонову.
- 7) Другим источником получения расходимости может быть вырожденность реальной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.

-
2. *Маергойз И.Д.* Итерационные методы расчета статистических полей в неоднородных анизотропных и нелинейных средах. – К.: Наукова думка, 1979. – 210 с.
 3. *Толмачев С.Т.* Специальные методы решения задач магнитостатики. – К.: Вища школа, 1983. – 166 с.