Математическое моделирование движения крови в артериальных сосудах I и II порядка

ЕРЖАКОВ Г.В., ИЩЕНКО Р.В.,КАЛМЫКОВА А.В.**

Донецкий национальный университет
Донецкий национальный медицинский университет им. Горького*

Движение крови в сосуде представляется как движение вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечной тонкой изотропной цилиндрической оболочке. Движение крови описывается линеаризованным уравнением Навье-Стокса, уравнения движения стенок оболочки находится путем варьирования свободной энергии. Решения ищется в виде наложения гармонических волн. Проведен ряд численных исследований, результаты которых хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Рух крові у сосуді представляється як рух в'язкої нестискаємої рідини у напівнескінченній тонкій ізотропній цилиндрічній оболонці. Рух крові описується лінерізованим рівнянням Навьє-Стокса, рівняння руху стінок оболонки знаходится варіацією вільної енергії. Рішення шукається у вигляді накладання гармонічних хвиль. Проведено ряд чисельних досліджень, результати яких добре узгоджуються з експериментальними даними.

Blood flow in the vessel appears as a movement of a viscous incompressible fluid in a semi-infinite thin isotropic cylindrical shell. Blood flow described by the linearized Navier-Stokes equations of motion of the walls of the shell is found by varying the free energy. The solve is sought as an overlay of harmonic waves. A number of numerical studies are carry out, the results agree well with experimental data.

Введение. В работах [1-4] рассматриваются различные модели движения крови в крупных артериальных сосудах, в которых стенка сосуда считается изотропной или ортотропной. Для изотропных стенок построены решения в длинноволновом приближении, хотя и указывается принципиальная возможность нахождения решения без учета такого допущения. Целью данной статьи и является построение такого решения для задачи о движении крови в полу-бесконечном цилиндре постоянного сечения.

Постановка задачи. Будем считать, что кровь является ньютоновской (для мелких сосудов это не верно, т.к. размеры взвешенных в ней частиц становятся соизмеримы с диаметром сосуда) несжимаемой жидкостью и что ее движение происходит в полу-бесконечном сосуде, стенки которого будем считать однородными и изотропными. Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось Oz совпадала с осью цилиндра, а плоскость Oxy лежала в сечении, разделяющем сердце и сосуд. Кровь движется под действием давления, создаваемого работой сердца. Естественно считать, что оно не зависит от угловой координаты. В таком случае деформация стенок и течение крови будут осесимметричными.

Поскольку работа сердца является периодической, то возникнет упругая волна, распространяющаяся по стенке сосудов, и волна скорости крови. Изменение диаметра сосудов при прохождении волны составляет приблизительно 7% [1], поэтому для решения задачи можно применять уравнения линейной теории упругости. Кроме того, за счет естественной терморегуляции тела процесс можно считать изотермическим.

Уравнение движения крови. Движение вязкой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{\upsilon},$$

где η – динамическая вязкость, ρ – плотность жидкости, p – давление, $\vec{\upsilon}$ –скорость, кинематическую вязкость обозначим $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

В этом уравнении оказывается возможным пренебречь нелинейным членом $(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}$. Характерная длина изменения скорости при течении в основном русле – это длина волны. Тогда конвективное ускорение $(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}$ имеет порядок $\frac{u^2}{\lambda}$ (характерное значение скорости), а местное – порядок $\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{uc}{\lambda}$. Их отношение равно $\frac{u}{c}$, где c – скорость распространения волны. Ее можно оценить следующим образом: в нулевом приближении можно считать, что процесс распространения волны в системе стенка-кровь эквивалентен распространению упругих колебаний стержня, тогда скорость волны описывается известной формулой $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где в качестве E - модуль Юнга стенки, а ρ – плотность крови $\rho_{кр}$ По этой оценке скорость волны имеет значение ≈ 20 м/с и тогда отношение конвективных ускорений к местным равно $\frac{1}{20}$, что и позволяет пренебречь первыми.

Таким образом, течение крови описывается уравнением

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}, \tag{1}$$

К нему необходимо добавить уравнение непрерывности:

$$div(\vec{\upsilon}) = 0. \tag{2}$$

В цилиндрических координатах уравнение (1) в компонентах с учетом осевой симметрии выглядит следующим образом

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_к}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta\upsilon_r-\frac{\upsilon_r}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_к}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta\upsilon_z, \qquad (3)$$

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнение непрерывности (2) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}+\frac{\upsilon_r}{r}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0. \qquad (4)$$

Уравнение движения стенки сосуда. Отношение толщины стенки сосуда к его радиусу равно $1/10$, поэтому артерию можно считать тонкой цилиндрической оболочкой. Уравнения движения получаются варьированием свободной энергии, которую можно разбить на две части: изгибную и растяжения. Выражение для изгибной свободной энергии имеет вид [5]

$$\psi_1=\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy,$$

а для энергии растяжения

$$\psi_2=\frac{hu_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2},$$

где $u_{\alpha\beta}$ – двумерный тензор деформации. Если величина прогиба имеет порядок ξ, то изгибная часть $\psi_1=\frac{Eh^3\xi^2}{R^4}$, а энергия растяжения $\psi_2=\frac{Eh\xi^2}{R^2}$. Как видно, их отношение имеет порядок $\frac{R^2}{h^2}$. А т.к. даже при отсутствии избыточного давления, вызываемого работой сердца, артерии все равно находятся в натяжении, то понятно, что изгибной частью свободной энергии можно пренебречь.

В цилиндрической системе двумерный тензор деформации имеет компоненты $u_{\theta\theta},u_{zz},u_{z\theta}$, которые определяются выражениями:

$$u_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{R},\ u_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta},\ u_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (5)$$

Тогда компоненты двумерного тензора напряжений определяются формулами:

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{1-\sigma^2}(u_{\theta\theta}+\sigma u_{zz})=\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{R}+\sigma\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{zz}=\frac{E}{1-\sigma^2}(u_{zz}+\sigma u_{\theta\theta})=\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\sigma\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\sigma\frac{u}{R}\right). \qquad (6)$$

Ввиду осесимметричности задачи все величины не зависят от угла θ и угловое смещение $v=0$. Свободная энергия на единицу площади тогда переписывается в виде

$$\psi_2=\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)}\left(\frac{u^2}{R^2}+2\frac{\sigma u}{R}\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right).$$

Для получения уравнения движения в первую очередь найдем уравнения равновесия, а потом добавим к ним динамический член. Как известно, в состоянии равновесия свободная энергия имеет минимум, поэтому, приравнивая вариацию свободной энергии нулю, получим уравнения равновесия. В результате для уравнений движения получим выражения:

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{R^2}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\right)-K_r=-\rho h\ddot{u},$$

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-K_z=-\rho h\ddot{w}.$$

В данной задаче внешние силы описываются формулами:

$$K_r=p-2\rho_к\nu\frac{\partial^2\upsilon_r}{\partial r},\ \ K_z=-\rho_к\nu\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_r}{\partial z}\right).$$

Таким образом, окончательно уравнения движения стенки сосуда записываются в виде

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{R^2}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\right)-p+2\rho_к\nu\frac{\partial^2\upsilon_r}{\partial r}=\rho h\ddot{u},$$

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho_к\nu\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_r}{\partial z}\right)=\rho h\ddot{w}. \qquad (7)$$

Получение дисперсионного уравнения. Итак, имеем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{R^2}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\right)+p-2\rho_к\nu\frac{\partial^2\upsilon_r}{\partial r}=-\rho h\ddot{u},$$

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho_к\nu\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_r}{\partial z}\right)=-\rho h\ddot{w},$$

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_к}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta\upsilon_r-\frac{\upsilon_r}{r^2}\right), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_к}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta\upsilon_z,$$

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}+\frac{\upsilon_r}{r}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0.$$

Граничными условиями к этим уравнениям являются условия прилипания, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\upsilon_r\big|_{r=R},\ \frac{\partial w}{\partial t}=\upsilon_z\big|_{r=R}. \qquad (9)$$

Работа сердца является периодической, отсюда понятно, что и течение крови, как и перемещение стенок сосуда, будут также периодическим. Поэтому решение этой системы будем искать в виде волны, т.е.

$$u=u_0e^{i(kz-\omega t)},\ w=w_0e^{i(kz-\omega t)},$$

$$\upsilon_r=V_r(r)e^{i(kz-\omega t)},\ \upsilon_z=V_z(r)e^{i(kz-\omega t)},\ p=P_a(r)e^{i(kz-\omega t)},$$

где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ – волновой вектор, ω – частота.

Подставляя эти представления в уравнения Навье-Стокса получим:

$$-i\omega V_r=-\frac{1}{\rho_к}\frac{\partial P_a(r)}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}-\nu k^2V_r-\frac{V_r}{r^2}, \qquad (10.1)$$

$$-i\omega V_z=-\frac{i}{\rho_к}kP_a(r)+\frac{\nu}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}-\nu k^2V_z, \qquad (10.2)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}+ik\frac{\partial V_z}{\partial z}=0. \qquad (10.3)$$

Уравнения (10.1) и (10.2) приводятся к виду

$$r^2\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+r\frac{\partial V_r}{\partial r}-\left(\left(k^2-\frac{i\omega}{\nu}\right)r^2+1\right)V_r+\frac{r^2}{\rho_\kappa\nu}\frac{\partial P_a(r)}{\partial r}=0, \quad (11.1)$$

$$r^2\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+r\frac{\partial V_z}{\partial r}-\left(k^2-\frac{i\omega}{\nu}\right)r^2V_z+\frac{ikr^2}{\rho_\kappa\nu}P_a(r)=0. \quad (11.2)$$

Предположим, что давление не зависит от радиуса: $P_a(r)=P_a$, $\frac{\partial P_a(r)}{\partial r}=0$. В таком случае решениями уравнений (11.1) и (11.2),с учетом их ограниченности при $r=0$, являются функции:

$$V_z(r)=C_2J_0(\beta r)+C_1Y_0(\beta r)+i\frac{k}{\rho_\kappa\nu\beta^2}P_a,$$

$$V_r(r)=X_2J_1(\beta r).$$

При этом уравнение непрерывности не удовлетворяется, однако, имея решение $V_z(r)$, можно найти $V_r(r)$ из уравнения непрерывности, и показать, что для удовлетворения уравнения (11.1) должно быть $\frac{\partial P_a(r)}{\partial r}=\frac{k^2r}{2}P_a(r)$. Максимальное значение давления $P_a(r)\approx 6000$ (для собак) [1], при $\omega=4\pi, r=7\cdot 10^{-3}$ $k=\frac{\omega}{c}\sim\frac{2\pi}{20}\Rightarrow k^2\sim\frac{1}{10}$ и, следовательно, $\frac{\partial P_a(r)}{\partial r}\sim\frac{1}{20}\cdot 7\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{3}=2{,}1$. Т.е., изменение давления на расстоянии $r=7\cdot 10^{-3}$ от оси $\Delta P_a=2{,}1\cdot 7\cdot 10^{-3}==14{,}7\cdot 10^{-3}<<6\cdot 10^{3}=P_a(0)$. В таком случае ошибка будет не большой. Итак

$$V_z(r)=C_2J_0(\beta r)+C_1Y_0(\beta r)+i\frac{k}{\rho_\kappa\nu\beta^2}P_a. \quad (12)$$

Из (10.3), учитывая ограниченность скорости, имеем

$$V_r(r)=-i\frac{k}{\beta}C_2J_1(\beta r)+\frac{k^2}{2\beta^2}\frac{P_a}{\rho_\kappa\nu}. \quad (13)$$

Подставляя эти функции в уравнения движения стенок сосуда и граничные условия, получаем

$$D\left(\frac{u_0}{R^2}+i\frac{\sigma}{R}kw_0\right)-P_a+2\rho_\kappa\nu\left(\frac{k^2}{2\beta^2}\frac{P_a}{\rho_\kappa\nu}-\right.$$
$$\left.-ik\left[J_o(\beta r)-\frac{J_1(\beta r)}{\beta r}\right]C_2\right)=-\rho h\omega^2u_0,$$

$$D\left(-\frac{\sigma}{R}ku_0+k^2w_0\right)+\rho_\kappa\nu\left(-\beta J_1(\beta r)C_2+\right.$$
$$\left.+\frac{k^2}{\beta}J_1(\beta r)C_2+\frac{ik^3}{2\beta^2}\frac{P_a}{\rho_\kappa\nu}R\right)=-\rho h\omega^2w_0,$$

$$u_0=\frac{1}{\omega}\frac{k}{\beta}J_1(\beta r)C_2+\frac{i}{\omega}\frac{k^2}{2\beta^2}\frac{P_a}{\rho_\kappa\nu}R,$$

$$w_0=-\frac{1}{\omega}\frac{k}{\beta^2}\frac{P_a}{\rho_\kappa\nu}+\frac{i}{\omega}J_0(\beta r)C_2.$$

Чтобы эта система имела ненулевые решения u_0, w_0, P_a, C_2 необходимо, чтобы ее определитель обращался в нуль

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{R^2}+\rho h\omega^2 & i\frac{\sigma Dk}{R} & -i2\rho_\kappa\nu k\left(J_0(\beta R)-\frac{J_1(\beta R)}{\beta R}\right) & \left(\frac{k^2}{\beta^2}-1\right) \\ -i\frac{\sigma Dk}{R} & k^2D+\rho h\omega^2 & \rho_\kappa\nu\beta\left(\frac{k^2}{\beta^2}-1\right)J_1(\beta R) & i\frac{k^3}{2\beta^2}R \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\omega}\frac{k}{\beta}J_1(\beta R) & -\frac{i}{\omega}\frac{k^2}{2\beta^2}\frac{R}{\rho_\kappa\nu} \\ 0 & 1 & \frac{-i}{\omega}J_0(\beta R) & \frac{1}{\omega\rho_\kappa\nu}\frac{k}{\beta^2} \end{vmatrix}=0$$

Это уравнение решалось численно методом Ньютона при заданных значениях частоты ω. Численными исследованиями установлено, что в 1-ой четверти существует 2 комплексных корня $k_{1,2}$ таких, что $|k|\sim 1$ и некоторое ограниченное, в зависимости от частоты, количество корней k таких, что $\mathrm{Re}(k)\sim 10^3$, $\mathrm{Im}(k)\sim 10^3$, которые дают быстрое затухание, вследствие чего их можно отбросить.

Численное решение задачи. Будем считать, что давление на входе описывается законом [6]

$$P^0(t)=\begin{cases} P_0(\omega t)^2(\omega t-\omega\tau)^2, t\in(0,\tau), \\ 0, t\in(\tau,T), \end{cases}$$

здесь T - период работы сердца, τ - длительность систолы.

Решение задачи представим в виде наложения волн

$$\begin{aligned} &u=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}u_0^{(ij)}e^{i(k_{ij}z-\omega_i t)}, w=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}w_0^{(ij)}e^{i(k_{ij}z-\omega_i t)}, \\ &\upsilon_r=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}V_r^{(ij)}(r)e^{i(k_{ij}z-\omega_i t)}, \\ &\upsilon_z=\upsilon_z^c(r)+\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}V_z^{(ij)}(r)e^{i(k_{ij}z-\omega_i t)}, \\ &P(z,t)=P_0+P_1z+\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}P_a^{(ij)}e^{i(k_{ij}z-\omega_i t)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где члены $\upsilon_z^c(r)$ и P_0+P_1z соответствуют значению $\omega=0$ и представляют собой решения для пуазейлевского течения. Как известно, для него

$$\upsilon_z^c(r)=\frac{P_1}{4\rho_k\nu}(r^2-R^2),$$

где P_1 – постоянный градиент давления.

Пусть на входе ($z=0$) стенка не может испытывать продольного смещения, тогда имеем граничные условия

$$P(0,t)=P^0(t),\ \ w(0,t)=0. \quad (15)$$

Раскладывая $P^0(t)$ в ряд Фурье

$$P(t)=P_0+2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega_0 t}, \text{ где } c_n=\int_0^{\tau}P(t)e^{-in\omega_0 t}dt \quad (16)$$

и, оставляя N членов в разложении (16) и (14), из (15) определяем неизвестные постоянные $P_a^{(ij)}$ с необходимой точностью. Значение градиента P_1 определяется из того условия, что в начале цикла расход крови равен нулю, т.е.

$$\int_0^R\upsilon_z 2\pi r dr=\frac{P_1}{16\rho_\kappa\eta}R^4$$

На графиках рис.1 и рис.2 приведены соответственно распределение компоненты скорости υ_z по сечению сосуда и ее изменение по времени на расстоянии: 1– $z = 0$ м, 2– $z = 0{,}1$ м, 3– $z = 0{,}2$ м от входа.

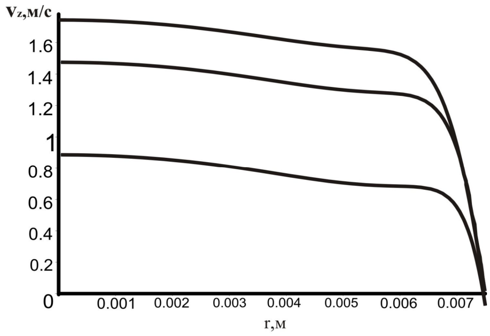

Рис. 1

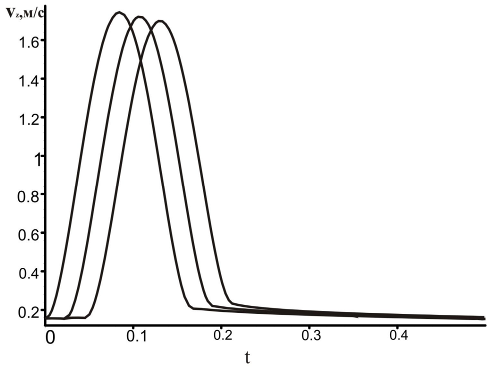

Рис. 2

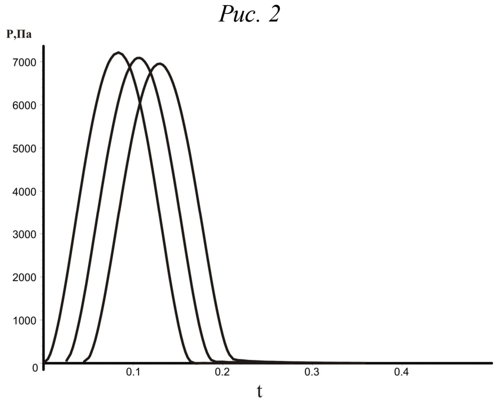

Рис. 3

На рис.3. приведены временные зависимости радиальной и продольной компонент смещения стенки.

В таблице 1 помещены максимальные смещения стенки в радиальном и продольном направлениях

Таблица 1

z, м	1	2	3
$u_{\max}$, 10^{-3}м	1,01	1	0,99
$w_{\max}$, 10^{-3}м	1	1,9	2,7

При расчетах принимались следующие значения величин:

$\rho = 1378\ \frac{кг}{м^3}$, $\rho_к = 1060\ \frac{кг}{м^3}$, $E = 4{,}8 \cdot 10^5\ Па$, $h = 0{,}065\ см$, $R = 0{,}75\ см$.

Выводы

Данная модель применима только для прямолинейных участков крупных сосудов, когда кровь можно считать однородной жидкостью, не учитываются эффекты сужения и отражения волн. Кроме этого, при таком подходе удается удовлетворить только двум граничным условиям на входе в сосуд: заданному давлению и одной из компонент перемещения стенки. Тем не менее, результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Их сравнение приведено в таблице 2.

Таблица 2

	$\upsilon_{z\max}$, $м/с$	$<\upsilon_z>$, $м/с$	$\Delta R/R$
Теория	0,40-2,9	0,1-0,4	0,07
Эксперимент	1,74	45	0,13

ЛИТЕРАТУРА

1. Каро К. Механика кровобращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. – М.: Мир, 1981. – 624 с.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
3. Гидродинамика кровообращения : [сб. переводов под ред. С.А. Регирера]. – М.: Мир, 1971. – 270 с.
4. Пуриня Б.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека / Б.А. Пуриня, В.А. Касьянов. – Рига: Зинатне – 1980. – 260 с.
5. ***Ландау*** Л. Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. –М.: Наука, 1987. – Т. VII, ***Теория упругости***. – 264 с.
6. Богаченко С.Е. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии / С.Е. Богаченко, Ю.А. Устинов // Российский журнал биомеханики. – 2009. – том 13. – № 1. – С. 29–42.

пост. 19.05.11