Теоретико-групове підґрунтя голографічного принципу

САМОХВАЛОВ С.Є.

Дніпродзержинський державний технічний університет

Доведено, що всі величини, які зберігаються внаслідок калібрувальних симетрій, є квазілокальними, тобто мають суперпотенціали. Надано алгоритм побудови суперпотенціалів за групою калібрувальної симетрії фізичної теорії. У якості прикладу одержано суперпотенціал енергії-імпульсу в загальній теорії відносності, існування якого обумовлене її калібрувальною трансляційною інваріантністю.

Доказано, что все величины, которые сохраняются вследствие калибровочных симметрий, являются квазилокальными, то есть имеют суперпотенциалы. Дано алгоритм построения суперпотенциалов по группе калибровочной симметрии физической теории. В качестве примера получен суперпотенциал энергии-импульса в общей теории относительности, существование которого обусловлено её калибровочной трансляционной инвариантностью.

It is proven, that all conserved quantities as result of gauge symmetries is quasi-local and has superpotentials. We give the algorithm of construction for superpotentials from the group of gauge symmetry of the physical theory. For example we obtain the superpotential for the energy-momentum in general relativity as result of it gauge translational invariance.

Багатообіцяючою ідеєю сучасної теоретичної фізики, яка виникла на шляху узгодження теорії гравітації з квантовою механікою, є голографічний принцип [1], основне положення якого полягає у тому, що фундаментальні фізичні процеси, які перебігають в тривимірному просторі (об’ємі), однозначно визначаються тим, що відбувається на його границі (двовимірній поверхні). Отже згідно з голографічним принципом інформації на границі цілком достатньо для відновлення інформації про фізичні процеси, які перебігають всередині, аналогічно тому як об’ємна голограма виникає при опроміненні лазерним променем відповідної інтерференційної картинки на пластині. Математичним підґрунтям даного феномену є квазілокальність [2] основних фізичних величин, що зберігаються, яка полягає у тому, що їх значення у фіксованому об’ємі цілком визначається значенням певних польових величин – суперпотенціалів, на границі об’єму. Історично першим прикладом квазілокальної величини, що зберігається, є електричний заряд, який, згідно теоремі Гауса, може бути підрахованим інтегруванням вектору напруженості електричного поля по поверхні, яка його охоплює. У цьому випадку вектор напруженості електричного поля виступає у ролі суперпотенціалу електричного заряду.

В даній роботі показано, що властивість квазілокальності є наслідком узагальненої калібрувальної симетрії [3] теорії, і за допомогою конструкцій, які використовуються при доведенні узагальненої другої теореми Е.Ньотер [4], надано алгоритм, який дозволяє за заданою калібрувальною симетрією будувати відповідний суперпотенціал. У якості прикладу за даним алгоритмом побудовано суперпотенціал енергії-імпульсу в загальній теорії відносності, який виявився суперпотенціалом Ф.Фреуда [5] комплекса енергії-імпульсу А.Ейнштейна [6].

1. Суперпотенціали величин, що зберігаються. Хай на гладкому многовиді M з координатами x^{μ} (для яких будемо використовувати грецькі індекси середини алфавіту) задана система полів $q^i(x)$ (з індексами середини латинського алфавіту). Хай, також, задана узагальнена калібрувальна група G_M^g, що параметризується функціями $g^a(x)$ (тут використовуватимемо латинські індекси початку алфавіту), інфінітезимальна дія якої

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \tag{1}$$

$$q'^{i}(x) = q^{i}(x) + \delta q^{i} \tag{2}$$

задається співвідношеннями:

$$\delta x^{\mu} = h_a^{\mu} g^a, \tag{3}$$

$$\delta q^i = a_a^i g^a + b_a^{i\mu} \partial_{\mu} g^a. \tag{4}$$

Тут h_a^{μ}, a_a^i та $b_a^{i\mu}$ - функції, які залежать від x явно, або неявно через поля $q^i(x)$ та їх похідні, а також прийнято позначення $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$.

Припустимо, що для полів $q^i(x)$ задано дію:

$$S = 1/c \int L(q, \partial q) d\Omega \tag{5}$$

де $d\Omega$ - елемент об’єму в просторі M. У загальному випадку при перетвореннях (1), (2) вона здобуває доданок:

$$\bar{\delta} S = 1/c \int \delta' L d\Omega, \tag{6}$$

де

$$\delta' L := L(q'(x'), \partial' q'(x')) J - L(q(x), \partial q(x)), \tag{7}$$

причому J є якобіаном переходу від x до x' і ∂' означає диференціювання по x'. Через те, що лагранжіан $L(q, \partial q)$ залежить максимум, що від перших похідних полів, величина $\delta' L$ може включати максимум, що другі похідні параметрів групи, отже може бути представлена у вигляді:

$$\delta' L = \xi_a g^a + \eta_a^{\mu} \partial_{\mu} g^a + \zeta_a^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 g^a, \tag{8}$$

де функції ξ_a, η_a^{μ} та $\zeta_a^{\mu\nu}$ визначаються як самою групою перетворень, так і видом лагранжіану теорії. Заздалегідь симетричності функцій $\zeta_a^{\mu\nu}$ за верхніми індексами не вимагатимемо і користуватимемося тими виразами для $\zeta_a^{\mu\nu}$, які будуть здобуватись при здійсненні заданих перетворень конкретних лагранжіанів.

Для G_M^g-симетричної теорії зміна лагранжіану $\delta' L$ зводиться до дивергенції

$$\delta' L = \partial_\sigma (c_a^\sigma g^a + d_a^{\mu\sigma} \partial_\mu g^a + f_a^{\mu\nu\sigma} \partial^2_{\mu\nu} g^a) \qquad (9)$$

з деякими функціями c_a^σ, $d_a^{\mu\sigma}$, $f_a^{\mu\nu\sigma}$. В цьому випадку маємо:

$$\xi_a = \partial_\sigma c_a^\sigma , \quad \eta_a^\mu = c_a^\mu + \partial_\sigma d_a^{\mu\sigma},$$
$$\zeta_a^{\mu\nu} = d_a^{\mu\nu} + \partial_\sigma f_a^{\mu\nu\sigma} . \qquad (10)$$

Відзначимо, що через те, що, як було вказано вище, варіація $\delta' L$ (8) не залежить від третіх похідних параметрів, мусить мати місце властивість:

$$f_a^{\mu\nu\sigma} = -f_a^{\mu\sigma\nu} , \qquad (11)$$

або $f_a^{\mu\nu\sigma} = -f_a^{\sigma\nu\mu}$. Домовимося вибирати таку послідовність перших двох верхніх індексів у $f_a^{\mu\nu\sigma}$, щоб виконувалася саме властивість (11).

З (7) безпосередньо слідує

$$\delta' L = \frac{\delta L}{\delta q^i} \delta q^i + \partial_\sigma \left(L\delta x^\sigma + P_i^\sigma \delta q^i \right), \qquad (12)$$

де

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} := Q_i - \partial_\sigma P_i^\sigma ,$$

- варіаційна похідна лагранжіану, причому

$$Q_i := \frac{\partial L}{\partial q^i} , \qquad P_i^\sigma := \frac{\partial L}{\partial \partial_\sigma q^i} .$$

Підстановка в формулу (12) виразів (3) та (4) і зіставлення одержаного з (8) приводить до наступних трьох виразів для коефіцієнтів з формули (8):

$$\xi_a = -\partial_\sigma J_a^\sigma + \frac{\delta L}{\delta q^i} a_a^i , \qquad (13)$$

$$\eta_a^\mu = -J_a^\mu - \partial_\sigma B_a^{\mu\sigma} + \frac{\delta L}{\delta q^i} b_a^{i\mu} , \qquad (14)$$

$$\zeta_a^{\mu\nu} + \zeta_a^{\nu\mu} = -B_a^{\mu\nu} - B_a^{\nu\mu} , \qquad (15)$$

де введено наступні позначення:

$$J_a^\mu := -P_i^\mu a_a^i - L h_a^\mu \qquad (16)$$

для Ньотерівського струму, а також

$$B_a^{\mu\nu} := -b_a^{i\mu} P_i^\nu \qquad (17)$$

для величини, яку ми називатимемо індукцією струму J_a^μ, і за допомогою якої означається суперпотенціал

$$S_a^{\mu\nu} := B_a^{\mu\nu} + \zeta_a^{\mu\nu} , \qquad (18)$$

антисиметричний за своїми верхніми індексами внаслідок тотожності (15):

$$S_a^{\mu\nu} = -S_a^{\nu\mu} . \qquad (19)$$

Для G_M^g-симетричної теорії, коли виконуються співвідношення (10), суперпотенціал приймає вигляд:

$$S_a^{\mu\nu} = B_a^{\mu\nu} + d_a^{\mu\nu} + \partial_\sigma f_a^{\mu\nu\sigma} , \qquad (20)$$

а формули (13), (14) записуються, як тотожності:

$$\partial_\sigma (J_a^\sigma + c_a^\sigma) = \frac{\delta L}{\delta q^i} a_a^i , \qquad (21)$$

$$J_a^\mu + c_a^\mu + \partial_\sigma (B_a^{\mu\sigma} + d_a^{\mu\sigma}) = \frac{\delta L}{\delta q^i} b_a^{i\mu} . \qquad (22)$$

Вводячи позначення для узагальненого Ньотерівського струму

$$I_a^\mu = J_a^\mu + c_a^\mu \qquad (23)$$

і враховуючи, що внаслідок властивості (11) $\partial^2_{\nu\sigma} f_a^{\mu\nu\sigma} = 0$, тотожності (21), (22) переписуються в елегантному вигляді:

$$\partial_\sigma I_a^\sigma = \frac{\delta L}{\delta q^i} a_a^i , \qquad (24)$$

$$I_a^\mu + \partial_\sigma S_a^{\mu\sigma} = \frac{\delta L}{\delta q^i} b_a^{i\mu} . \qquad (25)$$

Порівняння одержаних тотожностей з тотожностями (13), (14) дозволяє суперпотенціал $S_a^{\mu\sigma}$ інтерпретувати як індукцію узагальненого Ньотерівського струму I_a^μ, аналогічно тому, як величина $B_a^{\mu\sigma}$ є індукцією струму J_a^μ. У випадку не узагальненої, а звичайної симетрії теорії, коли $\delta' L = 0$, очевидно, $S_a^{\mu\sigma}$ збігається з $B_a^{\mu\sigma}$, а I_a^μ з J_a^μ.

Тотожності (24) і (25), як і властивість антисиметричності суперпотенціалу (19) – сильні, тобто виконуються скрізь, а не тільки на екстремалі (відповідно перша, друга і третя узагальнені тотожності Е.Ньотер [4]).

На екстремалі, при виконанні рівнянь руху $\frac{\delta L}{\delta q^i} = 0$, з них слідують слабі тотожності:

$$\partial_\sigma I_a^\sigma = 0 , \qquad (26)$$

$$I_a^\mu = -\partial_\sigma S_a^{\mu\sigma} , \qquad (27)$$

які свідчать про збереження узагальненого Ньотерівського струму і про той факт, що він має суперпотенціал, отже закон збереження (26), через антисиметричність суперпотенціалу (19), виконується автоматично внаслідок виразу (27).

Таким чином, ми довели наступне.

Твердження 1. *Величини, які зберігаються на екстремалі внаслідок узагальненої калібрувальної симетрії, – квазілокальні, тобто мають суперпотенціали.*

У випадку перетворень, при яких до варіації полів (4) не додається доданок, що залежить від похідних параметрів, тобто при $b_a^{i\mu} = 0$, як $B_a^{\mu\nu}$, так, очевидно, і $\zeta_a^{\mu\nu}$, не можуть бути відмінним від нуля, отже згідно з означенням (18) суперпотенціал буде дорівнювати нулю. У цьому разі виконується сильна тотожність $I_a^\mu = 0$, що слідує з формули (25).

Енергія-імпульс зберігається внаслідок інваріантності теорії відносно групи просторово-часових трансляцій T_M, калібрувальним варіантом яких є група T_M^g [7], ізоморфна групі дифеоморфізмів простору-часу M. Для забезпечення T_M^g-інваріантності теорії полів q^i необхідно крім них додатково використовувати метрику $g_{\mu\nu}(x)$ на M, або реперні поля $h_\mu^m(x)$, які самі перетворюються під дією групи T_M^g.

Для врахування такої ситуації звернемося до теорій з лагранжіанами $L(q,\partial q,\lambda)$, що залежать від параметрів $\lambda^{\alpha}(x)$ (для них використовуватимемо грецькі індекси початку алфавіту), які при перетвореннях (3), (4) з групи G_M^g й самі перетворюються:

$$\delta\lambda^{\alpha} = a_a^{\alpha} g^a + b^{\alpha\mu}_{a}\partial_{\mu} g^a\,, \tag{28}$$

забезпечуючи G_M^g-інваріантність польових рівнянь, що має місце при виконанні співвідношення (9). Параметри λ^{α} можна розглядати, як додаткові поля, з якими взаємодіють поля q^i, причому $P_{\alpha}^{\sigma} = 0$, отже внеску від них в вирази як для струму I_a^{μ} (16) і (23), так і суперпотенціалу $S_a^{\mu\sigma}$ (17) і (18) не буде, і тотожності (24), (25) приймуть вигляд:

$$\partial_{\sigma} I_a^{\sigma} = \frac{\partial L}{\partial\lambda^{\alpha}} a_a^{\alpha} + \frac{\delta L}{\delta q^i} a_a^i\,, \tag{29}$$

$$I_a^{\mu} + \partial_{\sigma} S_a^{\mu\sigma} = \frac{\partial L}{\partial\lambda^{\alpha}} b^{\alpha\mu}_{a} + \frac{\delta L}{\delta q^i} b^{i\mu}_{a}\,. \tag{30}$$

Розглянемо тепер теорію, де в якості параметрів, що забезпечують T_M^g-інваріантність, виступають метричні коефіцієнти $g_{\mu\nu}$, а групу T_M^g параметризуватимемо функціями $t^{\mu}(x) = x'^{\mu} - x^{\mu}$, отже

$$\delta x^{\mu} = t^{\mu}\,, \tag{31}$$

$$\delta q^i = -\partial_{\lambda} q^i\, t^{\lambda}\,, \tag{32}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} t^{\lambda} - (g_{\mu\lambda}\delta_{\nu}^{\rho} + g_{\nu\lambda}\delta_{\mu}^{\rho})\partial_{\rho} t^{\lambda}\,, \tag{33}$$

таким чином

$$h_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu}\,, \qquad a_{\lambda}^i = -\partial_{\lambda} q^i\,, \qquad b^{i}{}_{\lambda}^{\rho} = 0\,,$$

$$a_{\mu\nu,\lambda} = -\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\,, \quad b_{\mu\nu,\lambda}^{\ \ \rho} = -(g_{\mu\lambda}\delta_{\nu}^{\rho} + g_{\nu\lambda}\delta_{\mu}^{\rho})\,. \tag{34}$$

Ньотерівський струм в нашому випадку є тензорною густиною $T_{\lambda}^{\mu} = e\tau_{\lambda}^{\mu}$ канонічного тензору енергії-імпульсу τ_{λ}^{μ} системи полів q^i:

$$T_{\lambda}^{\mu} = P_i^{\mu}\partial_{\lambda} q^i - L\delta_{\lambda}^{\mu}\,, \tag{35}$$

де $e = (-\det g_{\mu\nu})^{1/2}$, а суперпотенціал $S_{\lambda}^{\mu\sigma} = 0$. В результаті сильна тотожність (30) набуває вигляду співвідношення:

$$T_{\lambda}^{\mu} = -2\frac{\partial L}{\partial g_{\sigma\mu}} g_{\sigma\lambda}\,, \tag{36}$$

з врахуванням якого тотожність (29) записується наступним чином:

$$\partial_{\sigma} T_{\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2} T_{\mu}^{\sigma} g^{\mu\nu}\partial_{\lambda} g_{\sigma\nu} - \frac{\delta L}{\delta q^i}\partial_{\lambda} q^i \tag{37}$$

і на екстремалі $\dfrac{\delta L}{\delta q^i} = 0$ стає рівнянням зміни енергії-імпульсу полів q^i:

$$\partial_{\sigma} T_{\lambda}^{\sigma} = T_{\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}\,, \tag{38}$$

тобто рівнянням руху макроматерії під дією гравітаційного поля і полів сил інерції, які задаються метричним тензором $g_{\mu\nu}$. При записі рівняння (38) враховано умову узгодженості зв'язності $\Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}$ з метрикою

$$\partial_{\lambda} g_{\sigma\nu} = \Gamma_{\sigma\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\sigma\lambda} \tag{39}$$

і симетричність контраваріантного струму $T^{\sigma\nu} = T_{\mu}^{\sigma} g^{\mu\nu}$ за своїми індексами. За відсутності гравітаційних та інерційних сил $\Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu} = 0$ з (38) слідує закон збереження енергії-імпульсу полів q^i:

$$\partial_{\sigma} T_{\lambda}^{\sigma} = 0\,. \tag{40}$$

2. Суперпотенціал енергії-імпульсу гравітаційного поля в ЗТВ. Для ілюстрації розвинутого вище формалізму розглянемо енергію-імпульс гравітаційного поля в загальній теорії відносності (ЗТВ). В якості польових змінних у ЗТВ виступають компоненти метричного тензора $q^i \sim g_{\mu\nu}$, а у якості лагранжіану – усічений лагранжіан Гілберта:

$$L_g = \frac{1}{2\kappa} e(\Gamma_{\sigma\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}) = \frac{1}{2\kappa} e\delta_{\mu\nu}^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\,, \tag{41}$$

де $\kappa = 8\pi G$ – гравітаційна стала, $\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}$ – символи Крістоффеля,

$$\delta_{\mu\nu}^{\sigma\rho} := \delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\rho} - \delta_{\nu}^{\sigma}\delta_{\mu}^{\rho} \tag{42}$$

– альтернатор, а підсумування індексів, які знаходяться на одному рівні, здійснюється за допомогою метричного тензору. Далі будемо користуватися системою одиниць, в якій $2\kappa = 1$.

Енергія-імпульс гравітаційного поля, як і будь-якого іншого, зберігається внаслідок інваріантності теорії відносно групи T_M^g, дія якої задається формулами (31), (33).

Для знаходження варіації $\delta' L_g$ лагранжіану (41) при перетвореннях (31), (33) скористаємося рівністю:

$$L_g = -eR + \partial_{\sigma}(eV^{\sigma})\,, \tag{43}$$

де R – скалярна кривизна і

$$V^{\sigma} = \delta_{\rho\nu}^{\sigma\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\,. \tag{44}$$

Через нетензорність символів Крістоффеля $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$ величина V^{σ} не є вектором, тобто

$$V'^{\sigma}(x) := \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} V'^{\rho}(x'(x)) \neq V^{\sigma}(x) \tag{45}$$

і варіація її форми при перетвореннях (31) відмінна від нуля:

$$\delta V^{\sigma} := V'^{\sigma}(x) - V^{\sigma}(x) \neq 0\,. \tag{46}$$

Використовуючи закон перетворення символів Крістоффеля при дифеоморфізмах (31) і формулу (44), одержуємо:

$$\delta V^{\sigma} = -\delta_{\rho\nu}^{\sigma\mu}\partial_{\mu\nu}^2 t^{\rho}\,. \tag{47}$$

Враховуючи, що

$$\delta'(eR) = 0\,,\ \delta'\partial_{\sigma}(eV^{\sigma}) = \partial_{\sigma}(e\delta V^{\sigma})\,,$$

а також формули (43) та (47), в решті решт здобуваємо:

$$\delta' L_g = \partial_{\sigma}(e\delta V^{\sigma}) = \partial_{\sigma}(-e\delta_{\rho\nu}^{\sigma\mu}\partial_{\mu\nu}^2 t^{\rho})\,. \tag{48}$$

Отже в нашому випадку

$$c_\rho^\sigma = 0\,,\quad d_\rho^{\mu\sigma} = 0\,,\quad f_\rho^{\mu\nu\sigma} = eg^{\mu\tau}\delta_{\rho\tau}^{\nu\sigma} \tag{49}$$

(тут, як і було обумовлено раніше, при виборі індексів для $f_a^{\mu\nu\sigma}$ ми простежили, щоб виконувалася властивість (11)).

Для лагранжіану (41)

$$P^{\mu\nu,\rho} := \frac{\partial L_g}{\partial\partial_\rho g_{\mu\nu}} = e[-\Gamma^{\rho}{}^{\mu\nu}_{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\sigma\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\rho}) +$$

$$+\frac{1}{2}(g^{\rho\mu}\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\nu} + g^{\rho\nu}\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\mu})]\,, \tag{50}$$

і з врахуванням виразу для $b_{\mu\nu,\sigma}^{\;\;\rho}$ з (34), знаходимо індукцію:

$$B_\lambda^{\tau\rho} := -b_{\mu\nu,\lambda}^{\;\;\tau}P^{\mu\nu,\rho} = e\,(-2\Gamma^{\rho\tau}{}_{\cdot\,\lambda} + \delta_\lambda^\tau\Gamma_{\sigma\sigma}^\rho -$$

$$-\delta_\lambda^\tau\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\rho} + \delta_\lambda^\rho\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\tau} + g^{\rho\tau}\Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma)\,. \tag{51}$$

В означення суперпотенціалу (20) входить дивергенція:

$$\partial_\sigma f_\lambda^{\tau\rho\sigma} = \delta_{\lambda\nu}^{\rho\sigma}\partial_\sigma(eg^{\tau\nu}) = e(-g^{\rho\tau}\Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma - \delta_\lambda^\rho\Gamma_{\sigma\sigma}^\tau +$$

$$+\Gamma^{\rho\tau}{}_{\cdot\,\lambda} + \Gamma^{\tau\rho}{}_{\cdot\,\lambda})\,, \tag{52}$$

при одержанні якої враховано умову узгодженості зв'язності з метрикою (39), а також співвідношення $\partial_\lambda e = e\Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma$. Після підстановки виразів (51) і (52) в формулу (20) одержуємо суперпотенціал Ньотерівського трансляційного струму в ЗТВ:

$$S_\lambda^{\tau\rho} = e\,(\Gamma^{\tau\rho}{}_{\cdot\,\lambda} - \Gamma^{\rho\tau}{}_{\cdot\,\lambda} + \delta_\lambda^\tau\Gamma_{\sigma\sigma}^\rho - \delta_\lambda^\rho\Gamma_{\sigma\sigma}^\tau -$$

$$-\delta_\lambda^\tau\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\rho} + \delta_\lambda^\rho\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\tau})\,, \tag{53}$$

який, як і варто було очікувати, антисиметричний за верхніми індексами. З використанням альтернатора (42) одержуємо:

$$S_\lambda^{\tau\rho} = e\,\delta_{\mu\nu}^{\tau\rho}[\Gamma^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\lambda} + \delta_\lambda^\mu(\Gamma_{\sigma\sigma}^\nu - \Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\nu})]\,, \tag{54}$$

або

$$S_\lambda^{\tau\rho} = \frac{1}{e}\delta_{\mu\nu}^{\tau\rho}g_{\lambda\kappa}\partial_\sigma(e^2g^{\mu\sigma}g^{\nu\kappa})\,, \tag{55}$$

що співпадає з виразом суперпотенціалу Ф.Фреуда [5] для комплексу А.Ейнштейна [6] енергії-імпульсу гравітаційного поля.

Узагальнений Ньотерівський струм, пов'язаний з трансляціями (31), через те, що згідно з (49) $c_\rho^\sigma = 0$, співпадає з канонічним Ньотерівським струмом:

$$I_\lambda^\tau = J_\lambda^\tau = P^{\mu\nu,\tau}\partial_\lambda g_{\mu\nu} - L_g\delta_\lambda^\tau \tag{56}$$

(при запису формули (56) враховано вираз для $a_{\mu\nu,\lambda}$ з (34)). Скориставшись виразами (41) та (50), а також умовою узгодженості зв'язності з метрикою (39), здобуваємо:

$$I_\lambda^\tau = e\{-2\Gamma_{\sigma\rho}^\tau\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho + (\Gamma_{\sigma\sigma}^\tau - \Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\tau})\,\Gamma_{\rho\lambda}^\rho +$$

$$+(\Gamma_{\rho\lambda}^\tau + \Gamma_{\rho\cdot\lambda}^{\;\;\tau})\,\Gamma_{\sigma\cdot}^{\sigma\rho} - (\Gamma_{\sigma\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho\Gamma_{\rho\nu}^\sigma)\delta_\lambda^\tau\}\,. \tag{57}$$

Випишемо тепер для нашого випадку калібрувальної трансляційної симетрії ЗТВ сильну тотожність (25):

$$I_\lambda^\tau + \partial_\sigma S_\lambda^{\tau\sigma} = -2\frac{\delta L_g}{\delta g_{\rho\tau}}g_{\rho\lambda}\,, \tag{58}$$

де враховано вираз для $b_{\mu\nu,\sigma}^{\;\;\rho}$ з (34). Припустимо, що крім гравітаційного поля присутнє ще й поле матерії з тензором енергії-імпульсу $\tau^{\rho\tau}$, а $T^{\rho\tau} = e\tau^{\rho\tau}$ – відповідна тензорна густина. Рівняння Ейнштейна у цьому випадку записується наступним чином:

$$2\frac{\delta L_g}{\delta g_{\rho\tau}} = T^{\rho\tau} \tag{59}$$

і тотожність (58) на гравітаційній екстремалі приймає вигляд:

$$\partial_\sigma S_\lambda^{\tau\sigma} = -I_\lambda^\tau - T_\lambda^\tau\,, \tag{60}$$

де $T_\lambda^\tau = g_{\lambda\rho}T^{\rho\tau}$. З іншого боку, з тотожності (58) слідує, що при виконанні рівняння (60) виконується рівняння Ейнштейна (59). Отже рівняння (59) і (60) еквівалентні, що дозволяє рівняння (60) також називати рівнянням гравітаційного поля. З нього слідує закон збереження суми:

$$\partial_\sigma(I_\lambda^\sigma + T_\lambda^\sigma) = 0\,,$$

що дає підстави комплекс I_λ^σ (57) (який не є тензорною густиною) вважати комплексом енергії-імпульсу гравітаційного поля, а суму $I_\lambda^\sigma + T_\lambda^\sigma$ – повним комплексом енергії-імпульсу гравітаційного поля і гравітуючої матерії, причому згідно з рівнянням (60) $S_\lambda^{\tau\sigma}$ при наявності матерії є суперпотенціалом саме для повного комплексу.

Запис (60) рівняння гравітаційного поля метричної теорії гравітації (ЗТВ) через суперпотенціал надає цьому рівнянню вигляд, подібний до вигляду динамічного рівняння Максвелла, як і у випадку реперної теорії гравітації [8, 9]. Отже можливість надати такої форми динамічним рівнянням є наслідком (узагальненої) калібрувальної симетрії теорії, а не конкретного вибору польових змінних, або лагранжіанів.

Сформулюємо доведене.

Твердження 2. *Внаслідок інваріантності загальної теорії відносності відносно узагальненої калібрувальної групи трансляцій T_M^g рівняння Ейнштейна можуть бути представлені у вигляді (60), подібному до вигляду динамічного рівняння Максвелла, з суперпотенціалом $S_\lambda^{\tau\sigma}$ (53) і комплексом енергії-імпульсу гравітаційного поля I_λ^σ (57).*

Висновки

1. Доведено, що при інваріантності фізичної теорії відносно (узагальненої) калібрувальної групи перетворень зберігається квазілокальна фізична величина, для якої існує суперпотенціал, і у загальному випадку надано алгоритм їх побудови за групою перетворень і лагранжіаном теорії.

2. У якості прикладу за даним алгоритмом побудовано комплекс енергії-імпульсу гравітаційного поля в загальній теорії відносності і суперпотенціал сумарного комплексу енергії-імпульсу гравітаційного поля і гравітуючої матерії, який зберігається внаслідок узагальненої калібрувальної трансляційної інваріантності теорії.

3. Показано, що знайдений комплекс енергії-імпульсу гравітаційного поля збігається з комплексом енергії-імпульсу, запропонованим А.Ейнштейном, а суперпотенціал – з суперпотенціалом Ф.Фреуда, причому рівняння, що виражає повний комплекс енергії-