5. Møller C. Conservation laws and absolute parallelism in general relativity // Mat.-Fys. Skr. K. Danske Vid. Selsk. – 1961. – 1(8). – P.1-50.
6. Самохвалов С.Є. Фундаментальна група простору Ейнштейна // Математичне моделювання. – 2008. - №2(19). – С.15-19.
7. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука. – 1974. – 184с.
8. Obukhov Y.N., Rubilar G.F. Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity // Phys.Rev. – 2006. – **D73.** – P.124017. arXiv:0605045.
9. Maluf J.W, Faria F.F., Ulhoa S.C. On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames // Class. Quant. Grav. – 2007. – **24**. – P.2743-2754. arXiv:0704.0986.

пост. 31.12.09

Застосування оптимального керування в диференціальній грі

ТИМЧЕНКО С.В., ТОЛСТИХ Ю.М., ПЕТЛЯ А.О.

Дніпродзержинський державний технічний університет

Розглядається диференціальна гра з двома гравцями, цілі яких альтернативні. Знайдена оптимальна стратегія одного з гравців, яка забезпечує йому виграш.

Рассматривается дифференциальная игра с двумя игроками альтернативных целей. Найдена оптимальная стратегия одного из игроков, обеспечивающая его выигрыш.

One problem of differential plays with two alternative player is observed. Optimational winning strategy of one player is presented.

Постановка задачі. Розглядається керований об'єкт

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{u} + \vec{v} \tag{1}$$

де $\vec{x} = \vec{x}(t) \in R^2$ – вектор фазових координат, які описують стан об'єкту, $\vec{u} = \vec{u}(t) \in P \subset R^2$ – перше керування, яке є дією першого гравця, $\vec{v} = \vec{v}(t) \in Q \subset R^2$ – друге керування, яке є дією другого гравця, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матриця динаміки об'єкту з постійними елементами.

В нашій задачі допустима множина P керувань першого гравця має вигляд (рис. 1)

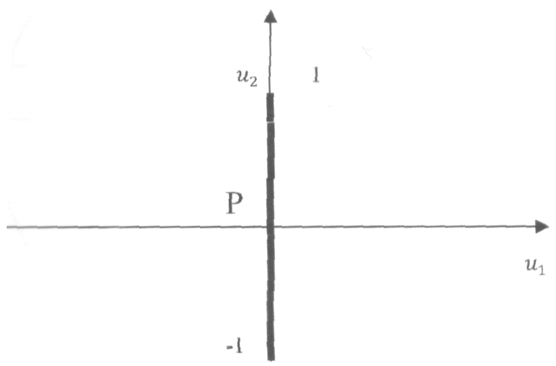

Рис. 1

$$P = \left\{\vec{u} \in R^2 \middle| u_1 = 0, \quad |u_2| \le 1\right\}, \tag{2}$$

допустима множина Q керувань другого гравця має вигляд (рис. 2)

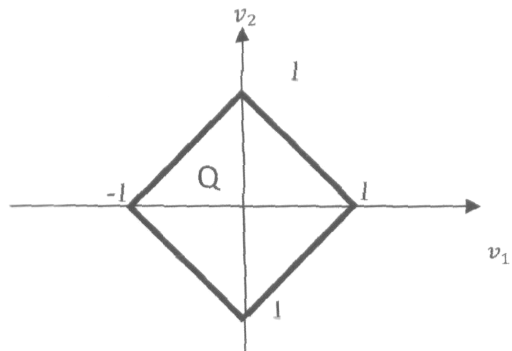

Рис. 2

$$Q = \left\{\vec{v} \in R^2 \middle| \quad |v_1| + |v_2| \le 1\right\} \tag{3}$$

Ціль першого гравця – найшвидше зближення фазової точки $\vec{x}(t)$ з заданою множиною $M \subset R^2$. Другий гравець намагається або виключити зустріч з M, або максимізувати час до зустрічі.

Функціоналом цілі, або ціною гри є час до наближення точки $\vec{x}(t)$ на цільову множину M.

Дослідження системи та знаходження оптимальної її поведінки. Множину M задамо за допомогою системи нерівностей (рис. 3)

$$x_1 \ge 2, \quad x_2 \ge 1$$

$$\rho^+(\vec{x}) \le 3\sqrt{2}; \quad \rho^-(\vec{x}) \ge \sqrt{2}, \tag{4}$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\rho^\pm(\vec{x}) = \sqrt{(x_1 \pm 1)^2 + (x_2 + 1)^2}$.

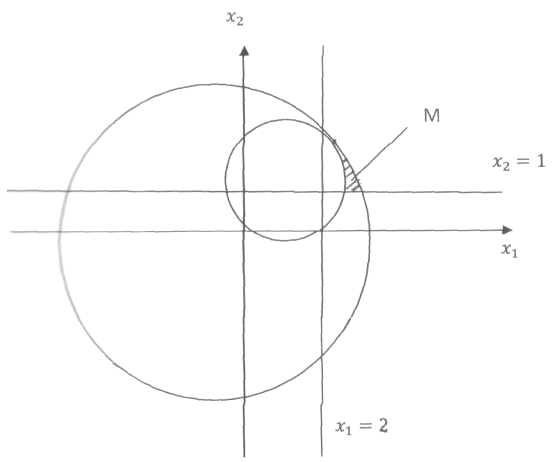

Рис. 3

Матриця динаміки об'єкту в нашій задачі має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{– матриця повороту} \tag{5}$$

Якщо керована дія гравців постійна, тобто

$$\vec{u}(t) = \vec{u}^*, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}^* , \tag{6}$$

то рух $\vec{x}(t)$ системи (1) являє собою обертання по годинниковій стрілці навколо точки $\vec{x}_c$, яка є нулем правої частини системи (1). Так як, у нашому випадку $A^{-1} = -A$, то

$$A\vec{x}_c + \vec{u}^* + \vec{v}^* = \vec{0} \tag{7}$$

звідки

$$\vec{x}_c = A(\vec{u}^* + \vec{v}^*) \tag{8}$$

Нехай

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

ℓ – менша дуга кола радіуса $3\sqrt{2}$ з центром на початку координат, яка з'єднує точки $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ (рис. 4)

Покажемо, що ціна гри $T(\vec{x}, M)$ буде

$$T(\vec{x}, M) = \infty , \; \vec{x} \in \ell \cup M \tag{10}$$

Нехай

$$Z_1 = \{\vec{x} | x_2 < x_1, x_1 > 0, x_2 \ge 0\}$$

$$Z_2 = \{\vec{x} | x_2 < -x_1, x_1 < 0, x_2 \ge 0\}$$

$$\ell_1 = \{\vec{x} | \rho^+(\vec{x}) = 3\sqrt{2}\} \tag{11}$$

$$\ell_2 = \left\{\vec{x} \left| (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2 \right.\right\} .$$

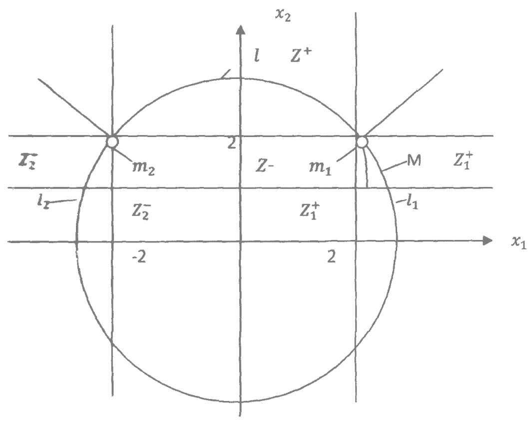

Рис. 4

Позначимо через Z_i^- $(i = 1,2)$ частину множини Z_i , яка складається з точок, які лежать строго нижче дуги ℓ_i .

Нехай

$$Z_i^+ = Z_i / Z_i^- ,$$

$$Z = \{\vec{x} | x_2 \ge |x_1|\}, \tag{12}$$

$Z^-(Z^+)$ – частина множини Z , яка лежить строго нижче (вище) дуги ℓ . Множини $Z^\pm$, $Z_1^\pm$, $Z_2^\pm$ показані на рис. 4.

Визначимо на множині $R^2 / (\ell \cup M)$ стратегію другого гравця у вигляді:

$$\vec{V}^\circ(\vec{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, & \vec{x} \in Z^\pm \\ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{x} \in Z_1^\pm \cup Z_2^\pm , \\ \vec{v} \in Q, & x_2 < 0 \end{cases} \tag{13}$$

яка забезпечує умови задачі.

Покажемо, що стратегія $\vec{V}^\circ(\vec{x})$ не допускає потрапляння траєкторії системи на множину $\ell \cup M$ з будь-якої початкової точки $\vec{x}_0 \in R^2 / (\ell \cup M)$.

Нехай $\vec{x}_0 \in Z^+$. Тоді до виходу з множини Z^+ другий гравець застосовує постійне керування $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Якщо перший гравець використовує керування $\vec{u}^* \in P$, то отримуємо умови, яким повинні задовольняти координати центра обертання

$$0 \le (x_c)_1 \le 2; \quad (x_c)_2 = 0 . \tag{14}$$

Тоді при будь-яких діях першого гравця траєкторія системи(1) буде лежати не нижче дуги кола радіуса $|\vec{x}_0|$ з центром на початку координат і при виході з Z^+ перетне пряму $x_1 = x_2$ вище точки $\vec{m}_1$. Аналогічно, для множини Z^- маємо:

$$-2 \le (x_c)_1 \le 0; \quad (x_c)_2 = 0 . \tag{15}$$

Тому траєкторія системи буде лежати не вище дуги кола радіуса $|\vec{x}_0|$ з центром на початку координат і при Z^- потрапить на лінію $x_1 = |x_2|$ нижче точок $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$.

Нехай $\vec{x}_0 \in Z_1^+ \cup Z_2^-$. Тоді до виходу з множини $Z_1^+ \cup Z_2^-$ другий гравець застосовує постійне керування $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. З рівності (8) отримаємо умови

$$-1 \le (x_c)_1 \le 1; \quad (x_c)_2 = -1 \tag{16}$$

Отже, при виході з Z_1^+ траєкторія системи перетинає пряму $x_2 = 0$ строго вище дуги ℓ_1, а при виході з Z_2^- прямі $x_2 = -x_1$ і $x_2 = 0$ строго нижче дуги ℓ_2 при будь-яких діях першого гравця.

Нехай $\vec{x}_0 \in Z_1^- \cup Z_2^+ / M$. Тоді до виходу з множини $Z_1^- \cup Z_2^+$ другий гравець використовує постійне керування $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. З рівності (8) отримуємо умови

$$-1 \le (x_c)_1 \le 1; \quad (x_c)_2 = 1 . \tag{17}$$

Тоді при виході з Z_2^+ траєкторія системи перетинає пряму $x_2 = -x_1$ вище точки $\vec{m}_2$, а при русі в Z_1^- не перетинає множину M і потрапляє або на пряму $x_2 = 0$ строго нижче дуги ℓ_1, або на пряму $x_2 = x_1$ строго нижче точки $\vec{m}_1$. Таким чином рівність (10) доведено.

Для отримання оптимальної фазової траєкторії складемо функцію Гамільтона

$$H(\vec{\Psi}, \vec{f}) = \Psi_1(x_2 + v_1) + \Psi_2(-x_1 + v_2 + u_2) \tag{18}$$

де $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2)$ – вектор допоміжних змінних.

Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна отримуємо

$$\begin{aligned} u_2^* &= sign\,\Psi_2 \\ v_1^* &= sign\,\Psi_1 \\ v_2^* &= sign\,\Psi_2 \end{aligned} \tag{19}$$

Допоміжна система рівнянь до (1) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= \Psi_2 \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= -\Psi_1 \end{aligned} \tag{20}$$

Тому

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= B\,sin(t + \varphi_0) \\ \Psi_2(t) &= B\,cos(t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Тоді для (1) отримуємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned} \tag{21}$$

і оптимальна фазова траєкторія має вигляд

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A\,sin(t + \varphi_0) \\ x_2(t) &= A\,cos(t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{22}$$

де константи A і φ_0 отримуємо з початкових умов для (1).

Висновки

В роботі розглянута одна з альтернативних диференціальних ігор. Знайдена оптимальна стратегія поведінки гравця, яка забезпечує йому виграш.

ЛІТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.– : Наука, 1983.– 403 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.– М.: Наука, 1969.– 408 с.
3. Айзекс Р. Диференційні ігри. М.: Мир, 1967.– 412 с.
4. Черноусько Ф.Л. Игровые задачи управления и поиска.–М.: Наука, 1978.– 270 с.

пост. 31.12.09