МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Фазова симетрія теорії гравітації

САМОХВАЛОВ С.Є.

Дніпродзержинський державний технічний університет

Показано, що гравітація має однопараметричну компактну симетрію і ця симетрія аналогічна фазовій симетрії квантової механіки

Показано, что гравитация имеет однопараметрическую компактную симметрию и эта симметрия аналогична фазовой симметрии квантовой механики

We show, that gravitation has the one-parameter compact symmetry and this symmetry is analogous of the faze symmetry of quantum mechanics

Вступ. Дві основні загальні властивості матерії, які були виявлені при створенні квантової механіки, а саме, дискретність (квантованість) певних фізичних величин, а також хвильовий характер руху, пов’язані з існуванням фундаментальної компактної симетрії – фазової симетрії квантової механіки. З точки зору теорії симетрії можна сказати, що відкриття квантово-механічних закономірностей полягало у відкритті фундаментальної фазової симетрії, притаманної законам руху матерії.

Проте певна компактна симетрія є притаманною й іншим хвильовим явищам, зокрема електромагнітному полю в пустоті – так звана симетрія Райніча-Хевісайда [1]. Вивчення цієї симетрії (яку по аналогії з квантовою механікою ми також назвали фазовою) було виконане в роботі [2], де виявлено декілька цікавих її властивостей. Зокрема з використанням того, що дана симетрія є наслідком дискретної симетрії рівнянь Максвелла в пустоті при перетвореннях дуальності Ходжа для тензора електромагнітного поля, було побудовано явно фазово-симетричний так званий «векторний лагранжіан» електродинаміки, подібний до лагранжіану поля Дірака, який має ту цікаву властивість, що величиною, яка зберігається внаслідок фазової симетрії (при застосуванні до даного лагранжіану теореми Ньотер), є енергія-імпульс електромагнітного поля.

В даній роботі показано, що гравітаційному полю в пустоті також притаманна певна компактна однопараметрична симетрія, яка є узагальненням на випадок гравітаційного поля симетрії Райніча-Хевісайда електромагнітного поля і яку ми також будемо називати фазовою. Для виявлення цієї симетрії теорія гравітації розглядається в ортогональному репері, що відповідає природній інтерпретації гравітаційного поля як калібрувального поля групи трансляцій [3]. Показано, що тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля є фазово симетричним. Побудовано явно фазово симетричний «векторний лагранжіан» гравітації і показано, що аналогічно випадку електромагнітного поля, ньотеровський струм такого лагранжіана, пов’язаний з фазовою симетрією, є тензором енергії-імпульсу гравітаційного поля.

1. Фазова симетрія класичної електродинаміки. Наведемо спочатку основні положення стосовно фазової симетрії класичної електродинаміки [2], представивши їх у вигляді, зручному для наших цілей узагальнення на випадок теорії гравітації.

Тензор напруженості електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ виражається через потенціали A_μ наступним чином

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ,$$

де $\partial_\mu := \partial / \partial x^\mu$. Тотожність Якобі, записану для $F_{\mu\nu}$

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + cicle(\rho\mu\nu) = 0 , \tag{1}$$

можна переписати у вигляді:

$$\partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

де

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} F_{\rho\tau} \tag{3}$$

- тензор, дуальний по Ходжу до тензора $F_{\mu\nu}$ і $\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}$ - абсолютно антисиметричний тензор простору Мінковського. Рівняння (2) (або (1)), при тривимірній редукції розпадається на першу пару рівнянь Максвелла.

Друга пара рівнянь Максвелла в чотиривимірному вигляді (динамічні рівняння) за відсутністю джерел

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

здобувається з лагранжіану

$$L^M = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{5}$$

(тут покладено швидкість світла $c = 1$).

Інфінітезимальне перетворення з параметром $\delta\varphi$

$$\delta F^{\mu\nu} = \widetilde{F}^{\mu\nu} \delta\varphi \tag{6}$$

і похідне від нього з врахуванням формули (3) перетворення

$$\delta\widetilde{F}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}\delta\varphi \qquad (7)$$

зберігають систему рівнянь Максвелла в пустоті (2), (4) інваріантною, узагальнюють перетворення Райніча-Хевісайда і називаються фазовими перетвореннями класичної електродинаміки [2].

При фазовому перетворенні лагранжіан L^M (5) здобуває доданок:

$$\delta L^M = -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\delta\varphi =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\partial_\mu A_\nu\,\widetilde{F}^{\mu\nu}\delta\varphi =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\partial_\mu\left(A_\nu\widetilde{F}^{\mu\nu}\right) - A_\nu\partial_\mu\widetilde{F}^{\mu\nu}\right]\delta\varphi ,$$

який внаслідок тотожності (2) (першої пари рівнянь Максвелла) зводиться до дивергенції. Отже фазове перетворення (6) є узагальненою в смислі [4] симетрією електродинаміки і зберігає (внаслідок (2)) динамічні рівняння електродинаміки (4) (другу пару рівнянь Максвелла).

В роботі [2] показано, що існує так званий «векторний лагранжіан» електродинаміки

$$L_\rho^D = \frac{1}{8\pi}\left(\widetilde{F}_{\rho\nu}\partial_\mu F^{\nu\mu} - F_{\rho\nu}\partial_\mu\widetilde{F}^{\nu\mu}\right), \qquad (8)$$

подібний до діраківського, який має наступні властивості:
- він симетричний відносно перетворень дуальності Ходжа (3) і явно фазово симетричний (інваріантний відносно перетворень (6), (7));
- якщо в якості незалежних змінних в ньому прийняти тензори $F^{\mu\nu}$ і $\widetilde{F}^{\mu\nu}$, то при їх вар'їруванні у якості рівнянь Лагранжа здобуваються обидві пари рівнянь Максвелла (2) і (4);
- фазові перетворення (6), (7) призводять для лагранжіану L_ρ^D (8) до ньотерівського струму

$$J_\rho^\mu = -\frac{1}{8\pi}\left(F^{\sigma\mu}F_{\sigma\rho} + \widetilde{F}^{\sigma\mu}\widetilde{F}_{\sigma\rho}\right) = = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\sigma\mu}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\delta_\rho^\mu F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}\right), \qquad (9)$$

який збігається з тензором енергії-імпульсу електромагнітного поля. Відзначимо, також, інваріантність тензора J_ρ^μ відносно перетворень дуальності (3) і фазових перетворень (6), (7).

2. Теорія гравітації в ортогональному репері. Симетрія, аналогічна тій, що була розглянута вище, притаманна й теорії гравітації, якщо її представити у реперному вигляді [5,3]. У цьому випадку в якості потенціалів гравітаційного поля виступають компоненти (псевдо)ортонормованих реперних полів h_μ^m, а в якості тензора напруженості гравітаційного поля – коефіцієнти неголономності

$$F_{\mu\nu}^m = \partial_\nu h_\mu^m - \partial_\mu h_\nu^m .$$

В цьому розділі розглянуто основні співвідношення реперної теорії гравітації, які використовуються далі.

Через роторну структуру тензора $F_{\mu\nu}^m$ для нього також має місце тотожність Якобі

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}^m + cicle(\rho\mu\nu) = 0 , \qquad (10)$$

якій можна надати вигляду:

$$\nabla_\nu\widetilde{F}^{m\mu\nu} = \frac{1}{h}\partial_\nu(h\widetilde{F}^{m\mu\nu}) = 0 , \qquad (11)$$

де ∇_ν - коваріантна похідна у рімановому просторі з метрикою $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$, η_{mn} - метрика простору Мінковського, $h = det\, h_\mu^m$ і

$$\widetilde{F}^{m\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}F_{\rho\tau}^m \qquad (12)$$

- тензор, дуальний по Ходжу до тензора напруженості гравітаційного поля $F_{\mu\nu}^m$. Тут вже $\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}$ - абсолютно антисиметричний тензор чотиривимірного ріманового простору в криволінійних координатах. Тотожність (11) (або (10)) у рімановому просторі з метрикою $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$ є еквівалентною так званій циклічній тотожності:

$$R^m_{\ \rho\mu\nu} + cicle(\rho\mu\nu) = 0 ,$$

і в реперній теорії гравітації грає роль, аналогічну першій парі рівнянь електродинаміки Максвелла.

Динамічні рівняння гравітаційного поля (рівняння Ейнштейна) в пустоті

$$G_m^\mu := R_m^\mu - \tfrac{1}{2}h_m^\mu R = 0$$

здобуваються з лагранжіану Мьоллера (в нас прийнято, що гравітаційна стала Ейнштейна $\kappa = 1$):

$$L^H = \tfrac{1}{2}\delta_{mn}^{sp}\,\omega^m_{\ \ sl}\,\omega^l_{\ pn} = -\tfrac{1}{2}R - \nabla_\sigma R^\sigma . \qquad (13)$$

Тут G_m^μ - тензор Ейнштейна, R_m^μ - тензор Річчі і R - скалярна кривизна,

$$\delta_{mn}^{sp} = \delta_m^s\delta_n^p - \delta_n^s\delta_m^p$$

- альтернатор,

$$\omega^{\cdot}_{n\,lk} = \tfrac{1}{2}(F^{\cdot}_{l\,nk} + F^{\cdot}_{n\,lk} - F^{\cdot}_{k\,ln})$$

коефіцієнти обертання Річчі,

$$R_p := \nabla_\sigma h_p^\sigma = F^s_{\ sp} = \omega^s_{\ sp} .$$

З використанням тензору індукції гравітаційного поля (суперпотенціалу)

$$B_m^{\mu\nu} := \partial_{\partial_\nu h_\mu^m}L^H = \omega^{\mu\ \nu}_{\ m\cdot} - \delta_{mp}^{\mu\nu}R^p \qquad (14)$$

лагранжіан Мьоллера L^H (13) набуває вигляду, аналогічного максвелівському L^M (5):

$$L^H = \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}^m B_m^{\mu\nu} , \qquad (15)$$

а рівняння Ейнштейна – вигляду:

$$G_m^\mu = -\nabla_\nu B_m^{\mu\nu} - t_m^\mu = 0 , \qquad (16)$$

де

$$t_m^\mu = -\frac{1}{h}\partial_{h_\mu^m}(hL^H) = B_n^{\nu\mu}F_{\nu m}^n - h_m^\mu L_g^H \qquad (17)$$

- тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля в реперній теорії гравітації.

3. Дуальність і фазова симетрія реперної теорії гравітації. Рівняння Ейнштейна (16) нелінійні, є набагато складнішими за динамічні рівняння електродинаміки (4) і не інваріантні відносно перетворень

$$\delta F_m^{\mu\nu} = \widetilde{F}_m^{\mu\nu}\delta\varphi ,$$

аналогічних перетворенням (6) і побудованих на основі перетворень дуальності Ходжа (12) для тензора напруженості гравітаційного поля. Але, як буде показано в даному розділі, рівняння Ейнштейна (16) інваріантні відносно компактних однопараметричних перетворень, які ґрунтуються на більш вишуканих дискретних перетвореннях дуальності для тензора напруженості гравітаційного поля, ніж перетворення дуальності Ходжа (12).

З метою виявлення таких перетворень обернемо формулу (14), тобто виразимо тензор напруженості гравітаційного поля $F^m_{\mu\nu}$ через тензор його індукції $B^{\mu\nu}_m$.

Перш за все завважимо, що $B^{s\nu}_s = -2R^\nu$, звідки слідує

$$\omega^{\mu}{}_{m\cdot}{}^{\nu} = B^{\mu\nu}_m - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu\nu}_{mp} B^{sp}_s .$$

Таким чином, оскільки $F^m_{\mu\nu} = \delta^{kl}_{\mu\nu}\,\omega^m{}_{kl}$, в результаті одержуємо:

$$F^m_{\mu\nu} = \delta^{kl}_{\mu\nu}(B^{m\,\cdot}_{kl} - \tfrac{1}{2}\delta^{mn}_{kp}\eta_{nl}B^{sp}_s). \qquad (18)$$

З використанням цієї формули лагранжіан Мьоллера L^H (13) можна записати у вигляді квадратичної форми відносно тензора індукції гравітаційного поля:

$$L^H = \tfrac{1}{2} B^{m\,\cdot}_{ns} B^{ns}_m - \tfrac{1}{4} B^{m\,\cdot}_{ms} B^{ns}_n . \qquad (19)$$

Розглянемо тепер дискретне перетворення тензора індукції гравітаційного поля

$$B^{\mu\nu}_m \to \widehat{B}^{\mu\nu}_m = \widetilde{F}^{\mu\nu}_m , \qquad (20)$$

яке, згідно (18), породжує наступне перетворення тензора напруженості:

$$F^m_{\mu\nu} \to \widehat{F}^m_{\mu\nu} = \delta^{kl}_{\mu\nu}(\widetilde{F}^{m\,\cdot}_{kl} - \tfrac{1}{2}\delta^{mn}_{kp}\eta_{nl}\widetilde{F}^{sp}_s). \qquad (21)$$

Унікальною властивістю перетворення (21), яка перевіряється безпосередньо, є той факт, що для дуального по Ходжу тензора напруженості гравітаційного поля воно призводить до перетворення:

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}_m \to \widehat{\widetilde{F}}^{\mu\nu}_m = -B^{\mu\nu}_m , \qquad (22)$$

яке свідчить про те, що дане перетворення, як і перетворення дуальності Ходжа у чотиривимірному псевдорімановому просторі, має властивості уявної одиниці, тобто повторне його виконання призводить лише до множення на –1. Саме це забезпечує той факт, що неперервне інфінітезимальне перетворення з параметром $\delta\varphi$

$$\delta F^m_{\mu\nu} = \widehat{F}^m_{\mu\nu}\,\delta\varphi , \qquad (23)$$

побудоване на основі перетворення дуальності (21), є компактним, отже, як і фазове перетворення квантової механіки, пов’язане з певними хвильовими властивостями тепер уже гравітаційного поля в пустоті. Інфінітезимальне перетворення (23) в термінах дуальних тензорів $B^{\mu\nu}_m$ і $\widetilde{F}_m{}^{\mu\nu}$ записується наступним чином:

$$\delta B^{\mu\nu}_m = \widetilde{F}^{\mu\nu}_m\,\delta\varphi , \qquad (24)$$

$$\delta \widetilde{F}_m{}^{\mu\nu} = -B^{\mu\nu}_m\,\delta\varphi \qquad (25)$$

і у скінченому варіанті приймає вигляд:

$$B'^{\mu\nu}_m = B^{\mu\nu}_m \cos\varphi + \widetilde{F}^{\mu\nu}_m \sin\varphi ,$$

$$\widetilde{F}'_m{}^{\mu\nu} = \widetilde{F}^{\mu\nu}_m \cos\varphi - B^{\mu\nu}_m \sin\varphi .$$

Властивість (22) має місце саме через те, що тензор індукції гравітаційного поля задається виразом (14), який слідує з лагранжіану Мьоллера L^H (13). Це дає підстави назвати величини $F^m_{\mu\nu}$ та $\widehat{F}^m_{\mu\nu}$ (як і $B^{\mu\nu}_m$ та $\widetilde{F}_m{}^{\mu\nu}$) дуальними по Мьоллеру, а перетворення (21) (і узгоджені з ним перетворення (20) і (22)) – перетвореннями дуальності Мьоллера.

Покажемо, що перетворення (24), (25), в силу тотожності (11), зберігають рівняння Ейнштейна в реперних змінних (16), отже є симетрією теорії гравітації Ейнштейна в (псевдо)ортонормованому репері, яку будемо називати фазовою симетрією теорії гравітації.

Дійсно, внаслідок квадратичності лагранжіану L^H відносно $B^{\mu\nu}_m$ (див. формулу (19)) і з використанням формули (24) знаходимо, що при фазовому перетворенні лагранжіан L^H (15) здобуває доданок:

$$\delta L^H = \tfrac{1}{2} F^m_{\mu\nu}\delta B^{\mu\nu}_m = \tfrac{1}{2} F^m_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}_m\delta\varphi = -\partial_\mu h^m_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}_m\delta\varphi =$$

$$= -\frac{1}{h}\left[\partial_\mu\left(h\widetilde{F}^{\mu m}{}_m\right) - h^m_\nu\,\partial_\mu\left(h\widetilde{F}^{\mu\nu}{}_m\right)\right]\delta\varphi =$$

$$= -\left[\nabla_\mu \widetilde{F}^{\mu m}{}_m - h^m_\nu \nabla_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu}{}_m\right]\delta\varphi ,$$

який при виконанні тотожності (11) зводиться до коваріантної дивергенції, що і забезпечує інваріантність динамічних рівнянь (16), які слідують з лагранжіану L^H (рівнянь Ейнштейна в ортогональному репері), відносно фазових перетворень (24) (або (23)).

Спосіб наведеного вище доведення фазової симетрії рівнянь Ейнштейна показує, що й довільна квадратична по тензору напруженості $F^m_{\mu\nu}$ реперна теорія гравітації є інваріантною відносно перетворень (24) зі своїм тензором індукції $B^{\mu\nu}_m := \partial_{\partial_\nu h^m_\mu} L$, який визначається лагранжіаном теорії $L = \tfrac{1}{4} F^m_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_m$, котрий фіксує зв’язок між тензорами індукції $B^{\mu\nu}_m$ і напруженості $F^m_{\mu\nu}$ гравітаційного поля. Компактність перетворень (24), яка забезпечується властивістю (22) і тому відповідає певному хвильовому процесу та дозволяє перетворення (24) називати фазовими, демонструє саме ейнштейнівська теорія гравітації з лагранжіаном Мьоллера (13), чим вона і виділяється серед інших[1]. Але ейнштейнівська реперна теорія гравітації однозначно фіксується серед квадратичних по $F^m_{\mu\nu}$ теорій також і вимогою локальної лоренц інваріантності Λ^g. Той факт, що Λ^g інваріантна теорія виявляється і фазово симетричною має, напевно, глибоке підґрунтя, яке, можливо, пов’язане з властивістю відсутності девіації об’ємів в просторі Ейнштейна при геодезичному перенесенні [6] і потребує додаткових досліджень.

4. Властивості фазової симетрії теорії гравітації і «векторний лагранжіан». Доведена вище інваріантність рівнянь Ейнштейна відносно фазових перетворень (24) за умови (11) при безпосередньому застосуванні до рівняння (16) дає

$$\delta G^\mu_m = -\nabla_\nu \delta B^{\mu\nu}_m - \delta t^\mu_m = -\nabla_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}_m\delta\varphi - \delta t^\mu_m = -\delta t^\mu_m = 0 ,$$

отже тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля t^μ_m (17) є фазово інваріантним. В цьому легко пересвідчи-

[1] Таку ж властивість має й теорія з лагранжіаном $L = \tfrac{1}{4} F^m_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_m$, для якої у якості перетворення дуальності буде виступати перетворення (12), проте така теорія, як відомо, експериментально не підтверджується.

тися безпосередньо, якщо тензор t_m^μ представити у вигляді:

$$t_m^\mu = \tfrac{1}{2}\left(B_s^{n\mu} F_{nm}^s + \widetilde{F}_s^{\cdot n\mu} \widetilde{B}_{\cdot nm}^s\right), \qquad (26)$$

або в змінних $\widetilde{F}_m^{\mu\nu}$ і $B_m^{\mu\nu}$ у вигляді:

$$t_m^\mu = \tfrac{1}{4}\varepsilon_{mnkl}\left(B_s^{n\mu} \widetilde{F}^{s\,kl} - \widetilde{F}_s^{\cdot n\mu} B_{\cdot}^{s\,kl}\right), \qquad (27)$$

і застосувати перетворення (24), (25). Дійсно,

$$\delta t_m^\mu = \tfrac{1}{4}\varepsilon_{mnkl}\left(\delta B_s^{n\mu} \widetilde{F}^{s\,kl} + B_s^{n\mu} \delta \widetilde{F}^{s\,kl} - \delta \widetilde{F}_s^{n\mu} B^{s\,kl} - \widetilde{F}_s^{n\mu} \delta B^{s\,kl}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4}\varepsilon_{mnkl}\left(\widetilde{F}_s^{n\mu} \widetilde{F}^{s\,kl} - B_s^{n\mu} \delta B^{s\,kl} + B_s^{n\mu} B^{s\,kl} - \widetilde{F}_s^{n\mu} \widetilde{F}^{s\,kl}\right)\delta\varphi = 0$$

Рівняння (11) в реперній теорії гравітації грають роль першої пари рівнянь Максвелла в електродинаміці, але у загальному випадку не зберігаються при фазових перетвореннях. Дійсно,

$$\nabla_\nu \delta \widetilde{F}_m^{\mu\nu} = -\nabla_\nu B_m^{\mu\nu} \delta\varphi = t_m^\mu \delta\varphi\,. \qquad (28)$$

Остання рівність в (28) одержана за умови виконання рівнянь Ейнштейна (16). Отже фазова симетрія повної системи рівнянь гравітаційного поля (11) і (16) має місце лише за умови

$$t_m^\mu = 0\,. \qquad (29)$$

В цьому випадку рівняння гравітаційного поля стають лінійними відносно змінних $\widetilde{F}_m^{\mu\nu}$ і $B_m^{\mu\nu}$:

$$\nabla_\nu \widetilde{F}_m^{\mu\nu} = 0\,, \qquad \nabla_\nu B_m^{\mu\nu} = 0\,, \qquad (30)$$

причому перетворення дуальності Мьоллера (20), (22) переводять ці рівняння одне в інше, отже стають симетрією повної системи гравітаційних рівнянь (30). Відмітимо, що тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля також симетричний відносно перетворень дуальності (20), (22):

$$\hat{t}_m^\mu = t_m^\mu\,,$$

що негайно слідує з виразу (27). Таким чином, умова (29) є дуально і фазово симетричною.

Тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля t_m^μ є лише координатним тензором (вектором), а при Λ^g перетвореннях, які пов'язуються зі зміною системи відліку [7], перетворюється за нетензорним законом [8]. Отже виникає питання, в яких умовах, зважаючи на Λ^g інваріантність теорії гравітації Ейнштейна, можна знайти таке Λ^g калібрування - таку систему відліку, для яких $t_m^\mu = 0$ і, таким чином, має місце фазова симетрія. Так, наприклад, в [9] показано, що умова (29) виконується у вільно падаючій в полі Шварцшильда системі відліку і висловлено припущення, що в довільному гравітаційному полі у вільно падаючій системі відліку тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля повинний дорівнювати нулю внаслідок принципу еквівалентності. Якщо це так, то вимога фазової симетрії теорії гравітації еквівалентна вимозі вибору вільно падаючих систем відліку. Це питання, безумовно, вимагає подальшого вивчення.

В реперній теорії гравітації, як і в електродинаміці, можна сконструювати «векторний лагранжіан» на зразок діраківського:

$$L_\rho^V = \frac{1}{2}\left(\widetilde{B}_{\rho\nu}^m \nabla_\mu B_m^{\nu\mu} - F_{\rho\nu}^m \nabla_\mu \widetilde{F}_m^{\nu\mu}\right), \qquad (31)$$

який, подібно лагранжіану (8), має властивості:

- він симетричний відносно перетворень дуальності Мьоллера (21) і явно фазово симетричний (інваріантний відносно перетворень (24), (25));
- якщо в якості незалежних змінних в ньому прийняти тензорні густини $\beta_m^{\nu\mu} = hB_m^{\nu\mu}$ і $\widetilde{f}_m^{\nu\mu} = h\widetilde{F}_m^{\nu\mu}$, то при їх вар'їруванні у якості рівнянь Лагранжа з лагранжіану L_ρ^V (31) здобуваються обидва тензорні рівняння гравітаційного поля (30) – циклічна тотожність та рівняння Ейнштейна за умови (29);
- фазові перетворення (24), (25) призводять для лагранжіану L_ρ^V (31) до ньотерівського струму

$$J_\rho^\mu = \tfrac{1}{2}\left(B_s^{n\mu} F_{n\rho}^s + \widetilde{F}_s^{\cdot n\mu} \widetilde{B}_{\cdot n\rho}^s\right) = t_m^\mu h_\rho^m\,, \qquad (32)$$

який збігається з тензором енергії-імпульсу гравітаційного поля (17), записаним в координатному базисі.

Висновки

В роботі встановлено, що теорія гравітації Ейнштейна в ортогональному репері, як і електродинаміка, подібно до квантової механіки демонструє наявність компактної фазової симетрії, і знайдено перетворення дуальності, яке забезпечує цей феномен.

Розглянуто умови фазової симетрії рівнянь гравітаційного поля і вказано на можливий зв'язок фазової симетрії гравітації з принципом еквівалентності.

Побудовано фазово симетричний «векторний лагранжіан» гравітаційного поля і показано, що наслідком його фазової симетрії є закон збереження енергії-імпульсу гравітаційного поля.

Проте ряд питань стосовно фазової симетрії в гравітації залишаються нез'ясованими. Це, перш за все, геометрична природа фазової симетрії і її зв'язок з локальною лорецевою інваріантністю теорії, а також принципом еквівалентності.

Крім того, як і в електродинаміці, неясним залишається смисл так званого «векторного лагранжіану» в теорії гравітації і тієї його загадкової властивості, що наслідком фазової симетрії «векторного лагранжіану» є закон збереження енергії-імпульсу гравітаційного поля, в той час, як для лагранжіану Мьоллера енергія-імпульс зберігається внаслідок узагальненої трансляційної інваріантності теорії [4], як завжди.

Всі ці питання потребують подальшого вивчення, що може пролити світло на зв'язок теорії гравітації з квантовою механікою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – К.: Наукова думка. – 1983. – 200с.
2. Самохвалов С.Є. Фазова симетрія класичної електродинаміки // Математичне моделювання. – 1997. - №2. – С.44-49.
3. Samokhvalov S.E., Vanyashin V.S. Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interaction // Class. Quant. Grav. - 1991. - **8**. – P.2277-2282.
4. Самохвалов С.Є. Наслідки симетрії калібрувальної теорії гравітації // Математичне моделювання. – 2001. - №1(5). – С.23-29.