Про умови секторіальності лінійних відношень у гільбертовому просторі

ОЛІЙНИК Л. О.

Дніпродзержинський державний технічний університет

В роботі досліджуються властивості лінійних відношень у гільбертовому просторі, які породжуються парою обмежених лінійних операторів. Зокрема, доведено, що властивість секторіальності лінійного відношення визначається секторіальністю певної комбінації операторів, які породжують саме відношення. Інструментом дослідження є операторні матриці та їхні властивості у гільбертових просторах з індефінітною метрикою.

В работе исследуются свойства линейных отношений в гильбертовом пространстве, порожденные парой ограниченных операторов. операторів. Доказано, что секториальность линейного отношения определяется секториальностью определенной комбинации операторов, порождающих это линейное отношение. Методы исследования базаруються на свойствах операторных матриц, действующих в прямой сумне гильбертовых пространств с индефинитной метрикой.

This research analyses properties of line relation in Hilbert space generated by the pair of bounded operators. It is proved that the line relation sectoriality is determined by sectoriality of definite combination of operators generated this line relation. The research methods are based on properties of operator matrix acting in Hilbert space direct sum with the indefinite metric.

Нехай $\wp$ гільбертовий простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$.

Означення 1. ([1]) Лінійними відношенням в гільбертовому просторі $\wp$ називається довільна лінійна підмножина прямого добутку $\theta \subset \wp \oplus \wp$.

Якщо θ_1, θ_2 - лінійні відношення і $\theta_1 \subset \theta_2$, то θ_2 називається розширенням θ_1.

Означення 2. ([2]) Числовою областю значень лінійного відношення θ називається множина $W(\theta) \subset C$ значень скалярного добутку (y,x) при усіх $\{x,y\} \in \theta$ таких, що $\|x\| = 1$.

Нехай B, C - довільні обмежені оператори в гільбертовому просторі $\wp$.

Розглянемо лінійне відношення θ, що визначається умовою

$$x\theta y \Leftrightarrow Cy - Bx = 0, \ \ x \in D(B), y \in D(C). \qquad (1)$$

Означення 3. Лінійне відношення у сепарабельному гільбертовому просторі називається секторіальним, якщо його числова область належить до сектору $W(\theta) \subset \left\{ z : \left| \arg(z - z_0) \le \varphi < \frac{\pi}{2} \right| \right\}$ з вершиною в точці z_0. Лінійне відношення є максимально секторіальним, якщо воно не має власних секторіальних розширень θ_1, таких що $W(\theta_1) \subset \left\{ z : \left| \arg(z - z_0) \le \varphi < \frac{\pi}{2} \right| \right\}$.

Можна показати, що відношення є секторіальним з вершиною в початку координат, якщо при деякому $k > 0$ виконується нерівність $\mathrm{Re}(x\theta y) - k|\mathrm{Im}(x\theta y)| \ge 0$ для довільних $x, y \in \wp$. Нарешті, відношення є максимально секторіальним, якщо воно є секторіальним і максимально акретивним, тобто таким, що $\mathrm{Re}(y,x) \ge 0, \ \ \forall \{x,y\} \in \theta$, і не існує для θ власних акретивних розширень.

Розглянемо пряму суму $\wp \oplus \wp$ і лінійний оператор W на ній, що визначається операторною матрицею $W = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$. Спряжена операторна матриця матиме вигляд $W^* = \begin{pmatrix} B^* & C^* \\ C^* & B^* \end{pmatrix}$.

Нехай $J_\lambda = \frac{1}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\lambda} E \\ \lambda E & 0 \end{pmatrix}$ оператор-матриця в $\wp \oplus \wp$ (E – одиничний оператор в гільбертовому просторі $\wp$). Цей оператор задовольняє умовам $J_\lambda = J_\lambda^*$, $J_\lambda^2 = I$, де I - одиничний оператор в $\wp \oplus \wp$, а J_λ^* - оператор-матриця спряжена до матриці J_λ. Цей матричний оператор визначає в просторі $\wp \oplus \wp$ індефінітну метрику, що породжується індефінітним скалярним добутком $[X_1, X_2]_\lambda = (J_\lambda X_1, X_2)_{\wp \oplus \wp}$, де $X_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \in \wp \oplus \wp$ і $(\cdot,\cdot)_{\wp \oplus \wp}$ - скалярний добуток в $\wp \oplus \wp$ ([4]).

Означення 4. Оператор W називається J_λ- нерозтягуючим (J_λ-нестискуючим), якщо $[WX, WX]_\lambda \le [X, X]_\lambda$, $\forall X \in D(W)$ ($[WX, WX]_\lambda \ge [X, X]_\lambda$ $\forall X \in D(W)$) і подвійно-J_λ-нерозтягуючим (подвійно-J_λ-нестискуючим), якщо спряжений оператор W^* є також J_λ- нерозтягуючим (J_λ-нестискуючим) ([4]).

Теорема 1. Нехай B, C - довільні обмежені оператори в гільбертовому просторі $\wp$, для яких виконуються умови (1) і

$$B^* B \pm C^* C = E. \qquad (2)$$

Наступні твердження еквівалентні.

1. Оператор BC^* є максимальним *k*-секторіальним.

2. Оператор $W=\begin{pmatrix} B & C \\ C & B\end{pmatrix}$, що діє у прямій сумі $\wp \oplus \wp$ є J_λ- нестискуючим, де $\lambda = 1+ik$ і подвійно-J_1-нестискуючим.

3. Лінійне відношення θ, що визначається умовою $x\,\theta\, y \Leftrightarrow Cy - Bx = 0,\quad x \in D(B), y \in D(C)$, є максимально k-секторіальним.

Доведення. 2.→1. Нехай оператор $W=\begin{pmatrix} B & C \\ C & B\end{pmatrix}$ є J_λ- нестискуючим, де $\lambda = 1+ik$ і подвійно-J_1-нестискуючим. Це означає виконання наступних нерівностей $[WX, WX]_\lambda \geq [X,X]_\lambda$, $[WX,WX]_1 \geq [X,X]_1$, $[W^*X, W^*X]_1 \geq [X,X]_1$, $\forall X = \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix} \in D(W)$.

Розглянемо кожну з них окремо. При цьому враховуємо тотожність $J_i J_{\alpha+i\beta} J_i = J_{-\alpha+i\beta}$. Таким чином, маємо: $[WX,WX]_\lambda \geq [X,X]_\lambda$ або $(W^* J_\lambda WX, X) \geq (J_\lambda X, X)$. Ця нерівність набирає вигляд:

$$\left(\begin{pmatrix} B^* & C^* \\ C^* & B^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (1-ik)E \\ (1+ik)E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ C & B\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq$$

$$\geq \left(\begin{pmatrix} 0 & (1-ik)E \\ (1+ik)E & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right).$$

Після перетворень нерівності отримаємо:

$$\left(\begin{pmatrix} (B^*C + C^*B) - ik(B^*C - C^*B) & 0 \\ 0 & (B^*C + C^*B) + ik(B^*C - C^*B)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq 0$$

Звідки випливають нерівності:

$$\left(\left((B^*C + C^*B) - ik(B^*C - C^*B)\right)x, x\right) \geq 0$$
$$\left(\left((B^*C + C^*B) + ik(B^*C - C^*B)\right)x, x\right) \geq 0,$$

З яких отримаємо:

$k\,\mathrm{Im}(B^*Cx,x) \geq -\mathrm{Re}(B^*Cx,x)$ та $k\,\mathrm{Im}(B^*Cx,x) \leq \mathrm{Re}(B^*Cx,x)$.

Це означає, що $\mathrm{Re}(B^*Cx,x) \geq k\left|\mathrm{Im}(B^*Cx,x)\right|$, тобто k-секторіальність оператора B^*C.

Перейдемо до нерівності $[WX,WX]_1 \geq [X,X]_1$, яка після пертворень дає нерівність:

$$\left(\begin{pmatrix} (B^*C + C^*B) & 0 \\ 0 & (B^*C + C^*B)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq 0,$$ що означає

$\mathrm{Re}(SX, X) \geq 0$, де $S = \begin{pmatrix} B^*C & 0 \\ 0 & B^*C\end{pmatrix}$. Звідси отримуємо $\mathrm{Re}(B^*Cx,x) \geq 0$, тобто акретивність оператора B^*C.

Аналогічно розглянемо нерівність $[W^*X, W^*X]_1 \geq [X,X]_1$ і отримуємо $\mathrm{Re}(BC^*x,x) \geq 0$, що означає акретивність оператора BC^*. Отже, оператор B^*C є максимальним k-секторіальним.

1.→2. Нехай виконуються умови (1), (2) і оператор B^*C є максимальним k-секторіальним.

Використовуючи умови (1), (2), одержимо такі тотожності для довільних $u, v \in \wp$:

$$= \left[\left((B^*B + C^*C)u, v\right) + \left((B^*B + C^*C)v, u\right)\right] =$$
$$= \left[\left((B^*C + C^*B)v, v\right) + \left((B^*C + C^*B)u, u\right)\right] =$$
$$= \left(\begin{Bmatrix} (B^*C + C^*B)v \\ (B^*C + C^*B)u\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} v \\ u\end{Bmatrix}\right) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} B^*C + C^*B & 0 \\ 0 & B^*C + C^*B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}\right)$$

Враховуючи тотожності

$$(WJ_1W^*X, X) - (J_1X, X) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} B^*C + C^*B & 0 \\ 0 & B^*C + C^*B\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right)$$

і

$$(WJ_1W^*X, X) - (J_1X, X) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} BC^* + CB^* & 0 \\ 0 & CB^* + BC^*\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right)$$

отримаємо, що з максимальної акретивності оператора B^*C випливає: операторна матриця W є подвійно-J_1-нестискуючим оператором.

Нарешті, маємо тотожність:

$$= -i\left[\left((B^*B + C^*C)u, v\right) - \left((B^*B + C^*C)v, u\right)\right] =$$
$$= -i\left[\left((B^*C - C^*B)v, v\right) + \left((B^*C - C^*B)u, u\right)\right] =$$
$$= -i\left(\begin{Bmatrix} (B^*C - C^*B)v \\ (B^*C - C^*B)u\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} v \\ u\end{Bmatrix}\right) =$$
$$= -i\left(\begin{pmatrix} B^*C - C^*B & 0 \\ 0 & B^*C - C^*B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}\right) =$$

де $U = \begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}$.

Враховуючи отримані вище тотожності, з k-секторіальність оператора B^*C отримаємо:

$-\mathrm{Re}(B^*Cx,x) \leq k\,\mathrm{Im}(B^*Cx,x) \leq \mathrm{Re}(B^*Cx,x)$.

Права нерівність дає

$$\left(\begin{pmatrix} (B^*C + C^*B) - ik(B^*C - C^*B) & 0 \\ 0 & (B^*C + C^*B) - ik(B^*C - C^*B)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq 0$$

Ліва нерівність дає

$$\left(\begin{pmatrix} (B^*C + C^*B) + ik(B^*C - C^*B) & 0 \\ 0 & (B^*C + C^*B) + ik(B^*C - C^*B)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq 0$$

Об'єднуючи ці дві нерівності, отримаємо

$$\left(\begin{pmatrix} (B^*C + C^*B) - ik(B^*C - C^*B) & 0 \\ 0 & (B^*C + C^*B) + ik(B^*C - C^*B)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq 0$$

що є еквівалентним нерівності

$$\left(\begin{pmatrix} B^* & C^* \\ C^* & B^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (1-ik)E \\ (1+ik)E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ C & B\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right) \geq$$

$$\geq \left(\begin{pmatrix} 0 & (1-ik)E \\ (1+ik)E & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y\end{Bmatrix}\right),$$ тобто

$$(W^* J_\lambda WX, X) \geq (J_\lambda X, X)$$ або
$$[WX, WX]_\lambda \geq [X,X]_\lambda.$$

Остання тотожність показує, що з k-секторіальності оператора B^*C випливає: оператор $W=\begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ є J_{1-ik} - нестискуючим.

1. $\leftrightarrow$ 3. Нарешті, враховуючи, наступні тотожності при довільних $U=\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$

$$2\,\mathrm{Re}(u\theta\, v)=[(u,v)+(v,u)]=$$
$$=\left[\left(\left(B^*B+C^*C\right)u,v\right)+\left(\left(B^*B+C^*C\right)v,u\right)\right]=$$
$$=\left(\begin{pmatrix} B^*C+C^*B & 0 \\ 0 & B^*C+C^*B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\right)$$
$$2\,\mathrm{Im}(u\theta\, v)=-i[(u,v)-(v,u)]=$$
$$=-i\left[\left(\left(B^*B+C^*C\right)u,v\right)-\left(\left(B^*B+C^*C\right)v,u\right)\right]=$$
$$=-i\left(\begin{pmatrix} B^*C-C^*B & 0 \\ 0 & B^*C-C^*B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\right),$$

Отримаємо зв’язок між максимальною секторіальністю лінійного відношення θ і операт B^*C . Перша тотожність означає, що лінійне відношення є максимально акретивним тоді і тільки тоді коли лінійний оператор B^*C є максимально акретивним. k-секторільність відношення θ, за означенням приводить до нерівностей $-\mathrm{Re}(u\theta\, v)\le k\,\mathrm{Im}(u\theta\, v)\le \mathrm{Re}(u\theta\, v)$, які є еквівалентними нерівностям $-\mathrm{Re}\left(B^*Cx,x\right)\le k\,\mathrm{Im}\left(B^*Cx,x\right)\le \mathrm{Re}\left(B^*Cx,x\right)$, що означає одночасну k-секторіальність лінійного відношення θ і лінійного оператора B^*C .

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай виконуються умови теореми Лінійне відношення θ, що визначається умовою $x\theta\, y \Leftrightarrow Cy-Bx=0,\quad x\in D(B), y\in D(C),$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли оператор B^*C є самоспряженим.

Цей факт отримано іншим методом в роботі [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Arens R. Operational calculus of linear releations. - Pacif. J. Math., 1961. -11.- P.9-23.
2. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряжённых расширениях дифференциальных операторов в пространстве векторных функций // Теория функций. Функц.анализ и их приложения. Харьков: ХГУ, 1969.
3. Мытник Ю.В. Максимальные диссипативные линейные отношения и пары ограниченных операторов // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С.105-109.
4. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Математический анализ 17.-М.1979. С.113-205.- /Итоги науки и техники, ВИНИТИ/.

пост. 31.12.2009