# Деформирование пластин со сложной формой контуров

*ЧЕРНОМУРОВА Л.А., СЪЯНОВ А.А.*

Днепродзержинский государственный технический университет

В данной работе показана эффективность использования потенциальных представлений, ядра которых выражаются через функцию Грина-Лауричелла, при расчете напряженно-деформированного состояния пластин со сложной формой контуров.

У даній роботі показано ефективність використання потенціальних представлень, ядра яких виражені через функцію Гріна-Лаурічелла, при розрахунку напружено-деформованого стану пластин із складною формою контурів.

In the given work efficiency of use of the potential representations which kernels are expressed through Green-Laurichella function, at calculation of the intense-deformed condition of plates with the difficult form of contours is shown.

**Введение.** Известные аналитические выражения функций или матриц Грина прикладных граничных задач могут быть использованы для упрощения и повышения эффективности расчетных алгоритмов. В работе [1] учет усложняющих обстоятельств при решении граничных задач для многосвязных областей предлагается производить последовательно. Так, например, при определении напряженно-деформированного состояния в пластине с отверстием целесообразно сначала построить функцию Грина для соответствующей пластины без отверстия. Использование затем полученной функции Грина в качестве ядра соответствующего потенциального представления позволяет существенно упростить алгоритм решения первоначальной задачи о пластине с отверстием, так как имеется возможность сохранения однородных граничных условий на контуре пластины за счет функции Грина.

При решении задач об изгибе пластин сложной формы одним из важнейших является вопрос об оценке точности получаемого решения. В данной статье определены пределы эффективности расчетных алгоритмов, полученных посредством реализации упомянутого замысла.

**Постановка задачи.** Алгоритм решения граничных задач для многосвязных областей, основан на использовании потенциальных представлений, ядра которых выражаются через функцию Грина-Лауричелла:

$$G(x,\xi)=\frac{|x-\xi|^2}{16\pi}\times$$
$$\times\left\{ln\frac{R^2|x-\xi|^2}{R^4-2R^2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2}+\frac{\left(R^2-|x|^2\right)\left(R^2-|\xi|^2\right)}{R^2|x-\xi|^2}\right\},\quad(1)$$

где $x=x(t)=(x_1;x_2)$, $\xi=\xi(\tau)=(\xi_1;\xi_2)$ – точки области $\Omega$,

$$|x|^2=x_1^2+x_2^2,\ |\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2,$$

$$|x-\xi|^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2,\ (x,\xi)=x_1\xi_1+x_2\xi_2.$$

Эта функция позволяет явно выразить решение задачи

$$W\big|_{L_0}=\frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{L_0}=0,\quad L_0:|x|=R \qquad (2)$$

для бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta W=F(x) \qquad (3)$$

в виде потенциала

$$W(x)=\iint\limits_{|x|\le R}G(x,\xi)F(\xi)d_\xi\Omega\ .$$

Здесь $\Delta\Delta=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$ – бигармонический дифференциальный оператор, $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial}{\partial x_2}n_2$ – обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали $n=(n_1;n_2)$ к контуру $L_0$.

Пусть рассматриваемая область $\Omega$ (рис. 1) ограничена окружностью (либо другой окружности) $|x|=R$ (контур $L_0$) и контурами $L_i$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, на которых заданы условия, например, вида:

$$W\big|_{L_i}=\varphi_i\ ;\qquad \frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{L_i}=\psi_i\ . \qquad (4)$$

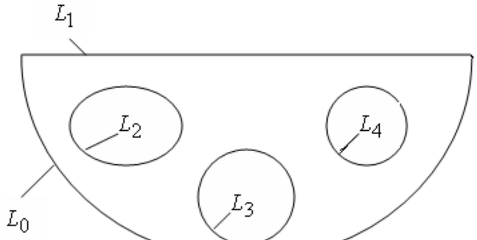


*Рис. 1*

Тогда решение задачи (2) может быть представлено в виде потенциала:

$$W(x)=W_0(x)+W_*(x), \qquad (5)$$

$$W_0(x)=\iint\limits_{\Omega}G(x,\xi)F(\xi)d_\xi\Omega\ ,$$

$$W_*(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\widetilde{L}_i}G(x,\xi)\mu_1^{(i)}(\xi)d_\xi L_i+\int_{\widetilde{L}_i}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu}\mu_2^{(i)}(\xi)d_\xi L_i\right]$$

где

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu}=\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_1}\nu_1+\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_2}\nu_2,$$

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu}=-\frac{1}{8\pi}\left\{(x-\xi,\nu)\left[ln\frac{R^2|x-\xi|^2}{R^4-2R^2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2}+1\right]+\right.$$
$$+\left(1+\frac{|x|^2}{R^2}\right)(\xi,\nu)+$$
$$\left.+|x-\xi|^2\frac{\left(|x|^2\xi_1-R^2x_1\right)\nu_1+\left(|x|^2\xi_2-R^2x_2\right)\nu_2}{R^4-2R^2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2}\right\}$$

– производная функции $G(x,\xi)$ по направлению внешней нормали $\nu=\nu(\xi)=(\nu_1;\nu_2)$ к контуру $\widetilde{L}$, $(x-\xi,\nu)=(x_1-\xi_1)\nu_1+(x_2-\xi_2)\nu_2$, $(\xi,\nu)=\xi_1\nu_1+\xi_2\nu_2$. Неизвестные функции-плотности $\mu_1^{(i)}$ и $\mu_2^{(i)}$ должны удовлетворять граничным условиям (4) в любой точке контура $L_i$. При этом условия на контуре $L_0$ сохраняются ввиду известных определяющих свойств функции Грина-Лауричелла.

Удовлетворяя с помощью потенциального представления (5) граничным условиям (4), получаем систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\varphi_i^*\left(\eta^{(i)}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\widetilde{L}_j}G\left(\eta^{(i)},\xi\right)\mu_1^{(j)}d_\xi\widetilde{L}_j+\\ \quad+\int\limits_{\widetilde{L}_j}\frac{\partial G\left(\eta^{(i)},\xi\right)}{\partial\nu}\mu_2^{(j)}d_\xi\widetilde{L}_j\\ \psi_i^*\left(\eta^{(i)}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\widetilde{L}_j}\frac{\partial G\left(\eta^{(i)},\xi\right)}{\partial n}\mu_1^{(j)}d_\xi\widetilde{L}_j+\\ \quad+\int\limits_{\widetilde{L}_j}\frac{\partial^2 G\left(\eta^{(i)},\xi\right)}{\partial n\partial\nu}\mu_2^{(j)}d_\xi\widetilde{L}_j\end{cases},\qquad(6)$$

где

$$\varphi_i^*\left(\eta^{(i)}\right)=\varphi_i(\eta)-\iint\limits_{\Omega}G\left(\eta^{(i)},\xi\right)F(\xi)d_\xi\Omega,$$
$$\psi_i^*\left(\eta^{(i)}\right)=\psi_i(\eta)-\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial G\left(\eta^{(i)},\xi\right)}{\partial n}F(\xi)d_\xi\Omega,$$

Численное решение системы (6) определяется приближенно аппроксимирующей системой линейных алгебраических уравнений, которая может быть получена с помощью известных квадратурных формул:

$$\begin{cases}\varphi_1^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(G_{1j}^{(lk)}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial G_{1j}^{(lk)}}{\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \varphi_i^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(G_{ij}^{(lk)}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial G_{ij}^{(lk)}}{\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \varphi_{m_l}^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(G_{m_lj}^{(lk)}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial G_{m_lj}^{(lk)}}{\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\\ \psi_1^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(\frac{\partial G_{1j}^{(lk)}}{\partial n}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial^2 G_{1j}^{(lk)}}{\partial n\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \psi_i^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(\frac{\partial G_{ij}^{(lk)}}{\partial n}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial^2 G_{ij}^{(lk)}}{\partial n\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \psi_{m_l}^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\left(\frac{\partial G_{m_lj}^{(lk)}}{\partial n}H_j^{(k)}\mu_{1j}^{(k)}+\frac{\partial^2 G_{m_lj}^{(lk)}}{\partial n\partial\nu}H_j^{(k)}\mu_{2j}^{(k)}\right),\end{cases}$$

$(l=1,2,...,n)$

Здесь $G_{ij}^{(lk)}=G\left(t_i^{(l)},\tau_j^{(k)}\right)$ – значение функции Грина-Лауричелла, вычисленное в $i$-ой точке $l$-го контура и $j$-ой $k$-го контура интегрирования, $H_j^{(k)}=\sqrt{\left(\frac{d\xi_{1j}^{(k)}}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{d\xi_{2j}^{(k)}}{d\tau}\right)^2}\cdot\frac{\tau_k^{кон.}-\tau_k^{нач.}}{m_k}$, $m_k$ – количество точек на $k$-ом контуре, $\tau_k^{кон.}$ и $\tau_k^{нач.}$ – конечное и начальное значение параметра $\tau$ на $k$-ом контуре. Размерность получаемой системы $N=2\sum\limits_{l=1}^{n}m_l$.

Задача (2)–(4) определяет прогиб $W=W(x)$ тонкой изотропной пластины, заполняющей область $\Omega$, под воздействием нормальной нагрузки $F=F(x)$. При этом контур $L_0$ жестко защемлен, а на контурах $L_i$ заданы прогиб $W$ и угол поворота нормали $\frac{\partial W}{\partial n}$.

Для достижения достоверности получаемых значений искомых величин с помощью потенциала (5) необходимо обеспечить требуемую точность удовлетворения заданным граничным условиям в любой точке контура $L_i$ Однако, как выяснилось в ранее выполненных работах, при вычислении значений потенциала (5) с помощью известных квадратурных формул возникают значительные погрешности в точках, близких к контурам $L_i$. В целях устранения указанных трудностей может быть использован прием, состоящий в смещении множеств интегрирования. Он заключается в том, что множество интегрирования располагается вне рассматриваемой области $\Omega$ на достаточном (в вычислительных целях) удалении от ее границы $L$.

Если уравнение контура $L_i$ представить в параметрическом виде:

$$x_1 = f_1^{(i)}(t), \quad x_2 = f_2^{(i)}(t),$$

то уравнение смещенного контура $\widetilde{L}_i$ можно определить так:

$$\xi_1 = \widetilde{f}_1^{(i)}(c_1, c_2, \ldots, c_m, \tau), \quad \xi_2 = \widetilde{f}_2^{(i)}(c_1, c_2, \ldots, c_m, \tau),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – параметры, характеризующие сдвиг контура.

Эти параметры выбирают из условия движения минимальных погрешностей приконтурных значений определяемых величин и удовлетворения граничным условиям в любой точке контура. Такой прием использован в работе [1] при решении граничных задач для двусвязных областей, ограниченных эллиптическим контуром $L$ и окружностью $L_0$.

В данной статье методика распространяется на многосвязные области сложной формы (рис. 1). Полученные расчетные данные показывают, что точность вычислений существенно зависит от величины (в некоторых случаях, например, при расчете пластины с прямоугольным отверстием) и от формы сдвига. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо определить такое положение смещенного контура, при котором погрешность удовлетворения граничным условиям минимальна.

Как известно, основные задачи плоской теории упругости и задачи об изгибе пластин в математической формулировке весьма сходны между собой [2]. Это дает возможность использовать описанный выше алгоритм решения задачи об изгибе пластины для определения характеристик плоского напряженного состояния.

Область эффективного применения функции Грина-Лауричелла может быть существенно расширена с помощью итерационных способов расчета. Например, необходимо решить задачу

$$W\big|_{L_i} = \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{L_i} = 0 \qquad (i = 0, 1)$$

для уравнения (3) в случае, когда область $\Omega$ ограничена эллиптическими контурами:

$$L_0 : x_1 = R_1 \cos t, \; x_2 = R \sin t;$$

$$L_1 : x_1 = x_{10} + \alpha \cos t, \; x_2 = x_{20} + b \sin t$$

Преобразование одного из контуров (например $L_0$) в круговой с помощью отображения

$$\bar{x}_1 = \lambda x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2 \left(\lambda = R / R_1\right)$$

дает возможность записать решение в виде потенциала (5). Уравнение (3) удобно представить в виде

$$\Delta\Delta W = \widetilde{F}(\bar{x}),$$

где

$$\widetilde{F}(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \left(1 + \lambda^4\right)\frac{\partial^4 W}{\partial \bar{x}_1^4} + 2\left(1 - \lambda^2\right)\frac{\partial^4 W}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2}.$$

Для решения этого уравнения в данной работе использована итерационная схема:

$$\Delta\Delta W^{(i+1)} = \widetilde{F}^{(i)}(\bar{x}).$$

## Выводы

Выполненные исследования позволяют сделать вывод о высокой эффективности использования потенциальных представлений, ядра которых выражаются через функцию Грина-Лауричелла, при решении широкого класса двумерных граничных задач теории упругости. Полученные результаты убеждают в том, что применение функций Грина, удовлетворяющих необходимым однородным условиям на части границ рассматриваемой области, позволяет существенным образом сократить объем вычислений. Возникающие специфические затруднения оказываются преодолимыми с помощью приема «сдвига контура интегрирования». Это имеет существенное значение для достижения достоверности результатов расчетных исследований реальных объектов и явлений.

Для расчета напряженно-деформированного состояния многосвязных пластин на основе представленных алгоритмов создан программный комплекс, позволяющий получать достоверные значения прогибов и напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гавеля С.П., Дихтяр В.Д. К вопросу о последовательном учете усложняющих элементов граничных задач математической физики. – Вычислительная и прикладная математика. – Киев, 1977, № 31, С. 3–9.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.


пост. 31.12.2009