

## Аналитические расчёты ограничений на технологические параметры при форсированных нагревах тел

ГОРБУНОВ А.Д. \*, ТЕМЛЯНЦЕВ М.В. \*\*

Днепродзержинский государственный технический университет\*  
Сибирский государственный индустриальный университет\*\*

Разработана инженерная методика аналитического расчета допустимой температуры греющей среды при тепловой обработке плоских, цилиндрических или шаровых тел с учетом разрушающих термических напряжений. Ключевые слова: аналитический расчет, нагрев, допустимая температура, термические напряжения, пластина, цилиндр, шар

Розроблено інженерну методику аналітичного розрахунку припустимої температури середовища, що гріє, при тепловій обробці плоских, циліндричних або сферичних тіл з обліком руйнуючих термічних напружень. Ключові слова: аналітичний розрахунок, нагрівання, припустима температура, термічне напруження, пластина, циліндр, куля

The article represents the developed engineering technique of analytical calculation of admissible temperature of heating during thermal processing of flat, cylindrical or spherical bodies, with destructive thermal pressure taken into account. Key Words: analytical calculations, heating, admissible temperature, thermal tension, flat, cylindrical, spherical

### Постановка проблемы и анализ публикаций.

В работах [1...4] приведены номограммы В.С. Старикова для определения допустимой температуры греющей среды при форсированном нагреве слоев в виде неограниченной пластины, цилиндра или шара. На рис. 1 в качестве примера приведена одна из таких номограмм для шаровых тел [4]. Номограмма многофункциональна т.к. позволяет определить время достижения максимального перепада температур по сечению тела и самое главное, наибольшую температуру печной среды при тепловой обработке тел с учётом допустимых и разрушающих термических напряжений.

Назначение на ЭВМ рациональных режимов нагрева тел затруднены необходимостью использования указанных графиков. Целью данной работы является аналитическое определение ограничений на технологические параметры.

### Изложение материалов исследования.

При выводе расчётных соотношений будем следовать методике, изложенной в работах [5,6]. Сначала подробно покажем ход расчёта нагрева плоских тел.

**Неограниченная пластина.** В случае конвективного нагрева пластины в печи с постоянной температурой греющей среды  $t_c$  относительные температуры определяются соотношениями:

$$\text{на поверхности } \theta_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (1)$$

$$\text{в центре } \theta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo} \quad (2)$$

$$\text{и среднемассовая } \theta_{cp}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (3)$$

где  $\theta(Fo) = (t(t) - t_c) / \Delta t_0$ ;  $\Delta t_0 = t_0 - t_c$ ;  $t_0$  – начальная температура тела, °С;  $Fo = at/R_0^2$ ;  $Bi = aR_0/\lambda$  – число Био;  $P_n(\mu_n) = 2Bi / [Bi(Bi + 1) + \mu_n^2]$  – тепловая амплитуда;  $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) / \cos \mu_n$ ;  $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot Bi / \mu_n^2$ ;  $\mu_n$  – собственные числа, определяемые уравнением:

$$\text{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi. \quad (4)$$

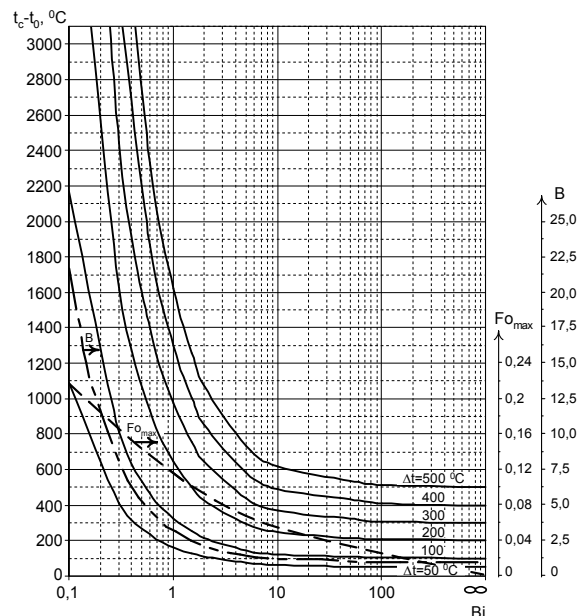


Рис. 1. Номограмма для определения температуры греющей среды при тепловой обработке стальных тел шарообразной формы с учетом максимальных перепадов температур по сечению

Вычитая из первого уравнения (1) второе, получим относительный перепад температур

$$\Delta\theta(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (5)$$

где  $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$ .

Зависимость перепада температур  $\Delta\theta$  от времени носит колоколообразный характер с максимумом в точке  $Fo = Fo_{max}$ . Дифференцируя уравнение (5) по времени, приравнявая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулу для расчёта максимального времени:

$$Fo_{max} = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{b}, \quad (6)$$

где  $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$ ;  $b = -\delta E_1(\mu_1)/E_2(\mu_2)$ ;  $\delta = (\mu_1/\mu_2)^2$ .

Подставляя  $Fo_{max}$  в уравнение (5), получим максимальный перепад температур с учётом двух членов ряда:

$$\Delta\theta_m = E_1 e^{-\mu_1^2 Fo_{max}} \left( 1 + E_1/E_2 \cdot e^{-a Fo_{max}} \right) = (1-\delta) E_1(\mu_1) e^{-\mu_1^2 Fo_{max}} \quad (7)$$

При выводе (7) было учтено, что согласно уравнению (6):  $\exp(-a Fo_{max}) = b$ .

Если из технологических соображений известна допустимая в процессе нагрева разность температур  $\Delta t_{доп}$  между поверхностью и центром тела, то из уравнения (7) можно найти сначала максимальную начальную разность температур

$$\Delta t_0 = \Delta t_{доп} / \Delta\theta_m, \quad (8)$$

а затем максимальную допустимую температуру греющей среды

$$t_{с,доп} = t_0 - \Delta t_0. \quad (9)$$

Наибольшую и основную трудность при практических расчётах по уравнениям (1)...(7) представляет определение по соотношению (4) бесчисленного множества корней. В работе [7] приведена общая формула для расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}, \quad (10)$$

где  $D = kBi/m$ ;  $m = 1 + Bi/(k+2)$  – коэффициент термической массивности;  $\gamma = (1 + \sqrt{1+4\rho})/2$ ;  $\rho = D^2/[k(k+2)^2(k+4)]$ ;  $k$  – коэффициент геометрической формы, равный 1 – для пластины, 2 – цилиндра и 3 – шара.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева – при больших и малых числах Био [8].

При малых числах Био ( $Bi < 3$ )

$$\mu_n = b_{n-1} + z_n, \quad (11)$$

где  $z_n = G_1/\gamma$ ;  $G_1 = Bi/b_n$ ;  $\rho_1 = G_1^2/D$ ;  $b_n = n \cdot \pi$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

При больших ( $Bi \geq 3$ )

$$\mu_n = a_n - G_2/\gamma \approx a_n(1 - \beta(1 - \beta)), \quad (12)$$

где  $G_2 = a_n/(1 + Bi)$ ;  $\rho_2 = G_2^2/3$ ;  $\gamma$  – см. уравнение (10);  $a_n = (2n-1)\pi/2$ ;  $\beta = 1/Bi$ .

При выводе (12) было учтено, что при малых аргументах  $1/(1+x) \approx 1-x$ .

**Неограниченный цилиндр.** Для расчета температур на поверхности, в центре и среднемассовой используются уравнения (1)...(3), в которых начальные тепловые амплитуды находятся по следующим формулам:

$$P_n(\mu_n) = 2Bi/[Bi(Bi+2-k) + \mu_n^2], \quad (13)$$

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n)/J_0(\mu_n), \quad (14)$$

$$M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot k Bi / \mu_n^2. \quad (15)$$

Вместо (4) характеристическое уравнение станет

$$J_0(\mu_n)/J_1(\mu_n) = \mu_n/Bi, \quad (16)$$

где  $J(x)$  – функция Бесселя первого рода.

Первый корень уравнения (16) в случае  $Bi < 10$  рассчитывается по уравнению (10) при коэффициенте формы  $k=2$ . Остальные корни согласно [9] при малых числах Био

$$\mu_n = b_n + z_n, \quad (17)$$

где  $z_n = G_3/\gamma$ ;  $G_3 = Bi/b_n$ ;  $\rho_3 = -Bi/2b_n^2$ ;  $b_n$  – корни уравнения (16) при  $Bi=0$ , т.е.  $J_1(x)=0$ , согласно справочным данным  $b_1=0$ ;  $b_2=3,831706$ ;  $b_3=7,015587$  и т.д.

При больших числах Био ( $Bi \geq 3$ ):

$$\mu_n = a_n - z_n \approx a_n(1 - \beta(1 - \beta/2)), \quad (18)$$

где  $z_n = G_4/\gamma$ ;  $G_4 = a_n/(1 + Bi)$ ;  $\rho_4 = -Bi/[2(1 + Bi)^2]$ ;  $a_n$  – корни уравнения (16) при  $Bi=\infty$ , т.е. нули функции  $J_0(x)=0$ , а именно:  $a_1=2,404826$ ;  $a_2=5,520078$  и т.д.

**Шар.** Величины  $P_n$ ,  $M_n$  вычисляются по уравнениям (13), (15) и первый корень по (10) при коэффициенте формы  $k=3$ .

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot \mu_n / \sin \mu_n. \quad (19)$$

Вместо (4) характеристическое уравнение будет  $\text{ctg} \mu_n = B/\mu_n$ , (20)

где  $B = 1 - Bi$ .

Согласно работе [10] корни уравнения (20) соответственно при малых числах Био по формуле (17) в которой  $z_n = G_5/\gamma$ ;  $G_5 = B/b_n$ ;  $\rho_5 = B(2 + Bi)/(3b_n^2)$ ;  $b_n = (2n-1) \cdot \pi/2$ .

При больших числах Био

$$\mu_n = a_n - z_n \approx a_n(1 - \beta(1 - \beta/3)), \quad (21)$$

где  $z_n = G_6/\gamma$ ;  $G_6 = a_n/Bi$ ;  $\rho_6 = G_6^2/3$ ;  $a_n = n \cdot \pi$ .

Рассмотрим численный пример, взятый из [4].

В печи необходимо ускоренно нагреть шары радиусом 0,05 м из стали со следующими теплофизическими свойствами:  $\lambda=25$  Вт/(м·К),  $a=0,55 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициент теплоотдачи в печи  $\alpha=500$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), максимально допустимый перепад по толщине шара из условий прочности для данной стали составляет  $\Delta t_{доп} = 300$  °С. Необходимо найти: время достижения максимального перепада температуры по сечению, допустимую температуру печи при посадке шаров с начальной температурой  $t_0 = 0$  °С. При перечисленных исходных данных число  $Bi=1$ , проводя линию перпендикулярную оси  $Bi$  до пересечения с кривой  $Fo_{max}$  из рис.1 находим его численное значение, которое составляет 0,116. При этом максимальный перепад температур сформируется через 53 с. Через точку пересечения перпендикуляра с кривой  $\Delta t=300$  °С проводим линию, параллельную оси  $Bi$  и находим разность  $t_c - t_0$ , которая будет соответствовать максимально допустимой температуре среды при нагреве с холодного посада, в нашем случае 976 °С.

Теперь приведём аналитическое решение. Согласно уравнению (10) при коэффициенте геометрической формы  $k=3$  для шара получим:  $m=1+1/5=1,2$ ;  $D=3/1,2=2,5$ ;  $\rho=D^2/525=2,5^2/525=0,019$ ;  $\gamma \approx 1+\rho=1,019$  и окончательно первый корень  $\mu_1 = \sqrt{2,5/1,019} = 1,5718$ .

Более точно первый корень можно также получить из (17)  $\mu_1=b_1=\pi/2=1,5708$ . Вторым корнем по формуле (17) при  $B=1-Bi=0$   $\mu_2=b_2=3\pi/2=3\cdot b_1$ . Отношение корней  $\delta=(\mu_1/\mu_2)^2=(1/3)^2=1/9$ . Величины  $a=\mu_2^2(1-\delta)=9\pi^2/4\cdot(1-1/9)=2\pi^2=19,739$ .  $P_1$  согласно (13)  $P_1=2/\mu_1^2=8/\pi^2$ ;  $P_2=2/\mu_2^2=\delta\cdot P_1$ ;  $E_1=P_1-A_1=P_1(1-\mu_1/\sin\mu_1)=P_1(1-\mu_1)$ ;  $E_2=P_2(1+\mu_2)$  — т.к.  $\sin\mu_1=1$ , а  $\sin\mu_2=-1$ . Величина  $b=-\delta E_1/E_2=-\delta P_1/(\delta P_1)(1-\pi/2)/(1+3\pi/2)=0,0999\approx 0,1$ . Окончательно время наступления максимального перепада температур в теле по формуле (6)

$Fo_{\max}=1/(2\pi^2)\ln(1/0,1)=0,1167$ . Максимальный перепад по соотношению (7)  $\Delta\theta_m=(1-1/9)(8/\pi^2)(1-\pi/2)\cdot\exp(-$

$-\pi^2Fo_{\max}/4)=-0,3084$ . Максимальная разность температур по уравнению (8)  $\Delta t_0=300/(-0,3084)=-972,8$  °С.

Окончательно допустимая температура греющей среды при нагреве шаровых тел  $t_{с,доп}=0-\Delta t_0=973$  °С.

Таким образом, аналитическое решение по расчету максимального времени и допустимой температуры печи практически совпало с графическим и его можно рекомендовать для назначения с помощью ПЭВМ рациональных режимов нагрева тел простой геометрической формы.

Для сравнения с процессами нагрева при  $Bi=1$  плоских и цилиндрических тел результаты аналитических расчетов приведены в табл.1

Таблица 1. Максимальное время, перепад температур и допустимая температура печи при  $Bi=1$  в зависимости от формы тела

Форма тела	$\mu_1$	$\mu_2$	$a$	$b$	$Fo_{\max}$	$-\Delta\theta_m$	$t_{с,доп},\text{°С}$
Пластина	0,8607	3,4257	10,995	0,08	0,2269	0,3084	973
Цилиндр	1,2484	4,0841	15,121	0,10	0,1520	0,3092	970
Шар	$\pi/2$	$3\pi/2$	19,739	0,10	0,1167	0,3084	973

### Выводы

Из анализа данных табл.1 вытекает, что при одном и том же числе Био время наступления максимального перепада уменьшается при переходе от плоских к шаровым телам примерно в 2 раза, а сам перепад температур и предельно допустимая температура греющей среды остаются на одном уровне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Стариков В.С. Совершенствование нагрева стальных заготовок в методических печах с шагающим подом / В.С. Стариков, В.В. Семахин, Н.В. Титов // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1997. – № 8. – С. 64–69.
2. Стариков В.С. Оптимально форсированная тепловая обработка стальных цилиндрических заготовок с ограничением температурной неравномерности по сечению // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1994. – № 8. – С. 50–53.
3. Браунштейн Е.Р. О горячих и холодных трещинах в сталях при механическом и тепловом нагружении / Е.Р. Браунштейн, В.С. Стариков, Т.П. Гуляева // Изв. вузов. Чер. металлургия. – 1996. – № 4. – С. 42–45.
4. Темлянец М.В. Расчеты ограничений на технологические и управляющие параметры при форсированном нагреве шарообразных стальных тел / М.В. Темлянец // Изв. вузов. Черная металлургия. – 2006. – № 2. – С. 52–53.

5. Горбунов А.Д., Шабельник О.М. К расчёту температурных полей и термических напряжений при нагреве плоских тел в движущемся слое / Сб.науч.трудов НМетАУ. – Том 7. – Днепропетровск: 2002. – С. 40–45.
6. Горбунов А.Д., Свинолобов Н.П. К расчёту коэффициентов усреднения температуры и тепловых потоков / Металлургическая теплотехника. Сб. научных трудов НМетАУ. – Днепропетровск: Пороги, 2004. – С. 195–206.
7. Гольдфарб Э.М., Горбунов А.Д. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел в прямой токе и противотоке // ИФЖ. – 1984. – Т.46. – № 5. – С. 870–871.
8. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э.М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности пластины при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 8. – С. 104–108.
9. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности цилиндра при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 12. – С. 94–97.
10. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности шара при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1984. – № 2. – С. 79–83.