Построение разностной схемы повышенной точности для обыкновенных дифференциальных уравнений

ЛИГУН А.А., *ШУМЕЙКО А.А.*

Днепродзержинский государственный технический университет

Работа посвящена численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами. Построена разностная схема четвертого порядка точности без повышения вычислительной сложности.

Робота присвячена чисельному вирішенню звичайних диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. Побудована різницева схема четвертого порядку точності без підвищення обчислювальної складності.

Work is dedicated to numerical decision of the ordinary differential equations with smoothing coefficients. It is built difference scheme of the fourth order to accuracy without increasing of the computing complexity.

Введение. Математические модели многих физических процессов и явлений описываются дифференциальными уравнениями, при этом, для подавляющего большинства такого рода задач, нет возможности получить точное решение. Этот факт делает актуальным развитие и анализ методов приближенного решения дифференциальных уравнений. Методы построения и исследования приближенного решения дифференциальных уравнений с разного рода граничными и краевыми условиями имеют давнюю историю. Получены и достаточно эффективно используются в теоретических исследованиях и для решения различных технических проблем пошаговые методы (типа Рунге-Кутта), методы основанные на разностных схемах, использующие аппроксимацию рядами и др. Однако, наиболее эффективными оказались конечно-разностные методы, в исследование которых большой вклад внесли А.А.Самарский, А.Н.Тихонов, В.С.Рябенький и др. (см., например, [1],[2]).

Данная работа посвящена дальнейшему развитию конечно-разностных схем.

Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим граничную задачу

$$\begin{aligned} &y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\\ &y(0)=y_0\\ &y(x_n)=y_n \end{aligned} \tag{1}$$

Следуя ([1]) , получаем

$$y''(x)\approx\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x)+O\left(h^4\right) \tag{2}$$

и

$$y'(x)\approx\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}+\frac{h^2}{6}y^{(3)}(x)+O\left(h^4\right) \tag{3}$$

Тогда отсюда и из (1) получаем разностную схему

$$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_i)+$$
$$p(x_i)\left(\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h}+\frac{h^2}{6}y^{(3)}(x_i)\right)+q(x_i)y(x_i)=f(x_i)$$

Полагая $\varphi(x_i)=\varphi_i$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} &y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{p_i}{2h}\right)+y_i\left(q_i-\frac{2}{h^2}\right)+\\ &+y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p_i}{2h}\right)+\frac{h^2}{12}\left(y_i^{(4)}+2p_iy_i^{(3)}\right)=f_i \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, получаем разностную схему, опирающуюся на обращение трехдиагональной матрицы и гарантирующую получение решения дифференциального уравнения (1) с точностью $O\left(h^2\right)$.

Для получения решения с более высокой точностью используют более сложные конструкции, приводящие к пяти диагональным матрицам или берут меньше шаг разностной схемы. В любом случае вырастает вычислительная сложность используемого алгоритма, что для задач, решаемых в реальном режиме времени не всегда приемлемо.

В работах [3], [4] рассматривались сплайн-коллакационные методы, которые путем изменения исходной задачи, позволяли получить сплайн решение более высокого порядка точности.

В работе предлагается конструкция разностной схемы, которая основывается на трехдиагональной матрице, как и классическая схема (4), но при этом позволяет получить решение с точностью до $O\left(h^4\right)$.

Теорема 1. *Пусть функции* $p,q,f\in C^2_{[0,hn]}$ *и для i=0,1,...,n*

$$\alpha_i=q_i-\frac{2}{h^2}+\left(2\left(q_i+2p_i'+p_i^2\right)-y_i\left(q_i''+q_i'p_i\right)h^2\right),$$

$$\beta_i=\frac{1}{h^2}+\frac{p_i}{2h}+\frac{1}{24}\left(-2\left(q_i+2p_i'+p_i^2\right)-\left(2q_i'+p_i''+q_i'+p_i'\right)h\right),$$

$$\gamma_i=\frac{1}{h^2}-\frac{p_i}{2h}+\frac{1}{24}\left(-2\left(q_i+2p_i'+p_i^2\right)-\left(2q_i'+p_i''+q_i'+p_i'\right)h\right)$$

и

$$\sigma_i=f_i-\frac{h^2}{12}\left(f_i''+f_i'p_i\right).$$

Тогда при $h\to 0$ *разностная схема*

$$y_{i+1}\beta_i+y_i\alpha_i+y_{i-1}\gamma_i=\sigma_i$$

позволяет получить решение задачи (1) с точностью $O\left(h^4\right)$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1)

$$y''' + p'(x)y' + p(x)y'' + q'(x)y + q(x)y' = f'(x),$$

и сгруппируем слагаемые

$$y''' + p(x)y'' + y'(q(x) + p'(x)) + q'(x)y = f'(x), \qquad (5)$$

после чего еще раз возьмем производную

$$y^{(4)} + p(x)y''' + p'(x)y'' + y''(q(x) + p'(x)) +$$
$$+ y'(q'(x) + p''(x)) + q''(x)y + q'(x)y' = f''(x),$$

или, что то же

$$y^{(4)} + p(x)y''' = f''(x) - y''(q(x) + 2p'(x)) -$$
$$- y'(2q'(x) + p''(x)) - q''(x)y.$$

Кроме того, перепишем (5)

$$y''' = f'(x) - p(x)y'' - y'(q(x) + p'(x)) - q'(x)y.$$

Умножая последнее равенство на $p(x)$ и суммируя с предыдущим, получаем

$$y^{(4)} + 2p(x)y''' = f''(x) - y''(q(x) + 2p'(x)) -$$
$$- y'(2q'(x) + p''(x)) - q''(x)y + f'(x)p(x) -$$
$$- p^2(x)y'' - y'(q(x) + p'(x))p(x) - q'(x)p(x)y =$$
$$f''(x) + f'(x)p(x) - y''\left(q(x) + 2p'(x) + p^2(x)\right) -$$
$$- y'(2q'(x) + p''(x) + q(x) + p'(x)) - y(q''(x) + q'(x)p(x)).$$

Отсюда и из (3) и (2) получаем

$$y^{(4)} + 2p_i y_i''' = f_i'' - f_i' p_i. -$$
$$-\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right)\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12}y_i^{(4)} + O\left(h^4\right)\right) -$$
$$-\left(2q_i' + p_i'' + q_i + p_i'\right)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{h^2}{6}y_i^{(3)} + O\left(h^4\right)\right) -$$
$$- y_i(q_i'' + q_i' p_i) =$$
$$= \frac{1}{2h^2}y_{i+1}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}y_i\left(2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - y_i(q_i'' + q_i' p_i)h^2\right) +$$
$$\frac{1}{2h^2}y_{i-1}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right) +$$
$$+ f_i'' + f_i' p_i +$$
$$\frac{h^2}{12}\left(-\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right)y_i^{(4)} - 2(2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')y_i^{(3)}\right) + O\left(h^4\right).$$

Подставим полученное соотношение в (4)

$$y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right) + y_i\left(q_i - \frac{2}{h^2}\right) + y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right) +$$
$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{2h^2}y_{i+1}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right) +\right.$$
$$+ \frac{1}{h^2}y_i\left(2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - y_i(q_i'' + q_i' p_i)h^2\right) +$$
$$\frac{1}{2h^2}y_{i-1}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right) +$$
$$\left. f_i'' + f_i' p_i + \frac{h^2}{12}\left(-\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right)y_i^{(4)} - 2(2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')y_i^{(3)}\right)\right) =$$
$$= f_i \qquad (6)$$

Раскроем скобки и приведем подобные

$$y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} + \frac{1}{24}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right)\right) +$$
$$y_i\left(q_i - \frac{2}{h^2} + \left(2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - y_i(q_i'' + q_i' p_i)h^2\right)\right) +$$
$$y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} + \frac{1}{24}\left(-2\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right) - (2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')h\right)\right) +$$
$$\frac{h^4}{144}\left(-\left(q_i + 2p_i' + p_i^2\right)y_i^{(4)} - 2(2q_i' + p_i'' + q_i + p_i')y_i^{(3)}\right) =$$
$$= f_i - \frac{h^2}{12}(f_i'' + f_i' p_i) \qquad (7)$$

Полученная разностная схема (при том же шаблоне, что и (4) дает ошибку четвертого порядка точности. Теорема доказана.

Выводы

Полученная конечно-разностная схема позволяет без существенного изменения используемых алгоритмов обращения матриц, получить решение граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с повышенной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы.- М.; "Наука", 1977, 439 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.- М.; "Наука", 1977, 656 с.
3. *Дронов С.Г.* О приближении сплайнами решения краевой задачи/ Дронов С.Г.// Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. -Д., 1987. - С. 30-37.
4. *Дронов С.Г. ,Худая Ж.В.* О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши// Приближение функций и суммирование рядов. -Д., 1992. - С. 29-38.

пост. 27.12.08