5. Мацуга, О.М. Система VerMed для автоматизації робочого місця кардіолога // Тези доповідей XIII Міжнародної науково-технічної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006), м. Вінниця, 25–28 вересня 2006 р. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – С. 331.

пост. 08.09.08

Фундаментальна група простору Ейнштейна

САМОХВАЛОВ С.Є.

Побудовано нескінченну деформовану групу дифеморфізмів многовиду, а також відповідну групу автоморфізмів його дотичного розшарування, дія яких залишає многовид Річчі-плоским, що відповідає відсутності девіації об'ємів при геодезичних перенесеннях.

Построена бесконечная деформированная группа диффеоморфизмов многообразия, а также соответствующая группа автоморфизмов его касательного расслоения, действие которых оставляет многообразие Риччи-плоским, что соответствует отсутствию девиации объемов при геодезических переносах.

We construct the infinite deformed group of manifold diffeomorphisms and corresponding group of tangent bundle automorphisms so that actions of these groups remain manifold Ricci-flat. In this case volume deviation in geodesic transports is vanish.

В роботі [1] було показано, що деформована група дифеоморфізмів T_M^{gH} задає на многовиді M , де вона діє, структуру простору афінної зв'язності без скруту шляхом завдання своїм законом множення правила паралельного перенесення векторів. Додаткова умова узгодженості зв'язності з метрикою, що обмежує функції деформації H , за допомогою яких будується група T_M^{gH} , призводить до груп, які задають своєю дією на M структуруріманового простору. Умова канонічності деформацій [2] фіксує такі групи для заданої ріманової структури однозначно. Множина паралельних перенесень, які задаються групою T_M^{gH} , об'єднуються в групу DT [3], яка діє в дотичному розшаруванні простору M , однозначно фіксується групою T_M^{gH} і може розглядатись як група її спеціальних автоморфізмів. Саме група DT виступає в ролі фундаментальної групи (за термінологією Ф.Клейна [4]) простору афінної зв'язності (ріманового простору), оскільки має своїми генераторами трансляцій коваріантні похідні, а серед структурних функцій – тензор кривизни Рімана-Крістоффеля, причому структурне рівняння ріманового простору [5] є однією з умов існування групи DT [3].

Під простором Ейнштейна в даній роботі розумітимемо простір, в якому виконується рівняння Ейнштейна в пустоті без космологічного члену, а саме простір, де тензор Річчі дорівнює нулю. Тензор Річчі описує девіацію об'ємів при перенесенні вздовж геодезичних, отже в просторі Ейнштейна девіація об'ємів не відбувається.

В даній роботі вивчаються умови, які треба накласти на групу T_M^{gH} і відповідну їй групу DT для забезпечення відсутності девіації об'ємів при перенесенні вздовж геодезичних. Саме за цих умов одержана група T_M^{gH} є групою трансляцій в просторі Ейнштейна, а група DT - фундаментальною групою простору Ейнштейна.

При розгляді питань девіації в даній роботі виправлено некоректність умови на функції деформації, що накладається для забезпечення опису групами T_M^{gH} ріманових просторів, яка мала місце в публікаціях [1,6] і на яку вказував ще в 1990 р. проф. В.А.Франке.

1. Теоретико-груповий опис девіації геодезичних

Розглянемо, перш за все, рівняння девіації геодезичних, яке здобуває особливо прозорий вигляд при використанні канонічних деформованих груп дифеоморфізмів [2], оскільки умова канонічності безпосередньо пов'язана з геодезичними перенесеннями. Будемо використовувати поняття і позначення, прийняті в роботі [2].

Хай задано пучок геодезичних $x^{\mu} = x^{\mu}(s,\theta)$, де x^{μ} - координата точки на геодезичній (координатну систему будемо вважати фіксованою), s - натуральний (або афінний) параметр вздовж геодезичної, а θ - параметр, за допомогою якого фіксуються геодезичні в пучку (розглядатимемо, поки що, одновимірний пучок). Різницю точок вздовж геодезичної та між різними геодезичними позначимо як

$$\tilde{t}_1^{\mu}(x) = x^{\mu}(s+\Delta s,\theta) - x^{\mu}(s,\theta)\ ,$$

$$\tilde{t}_2^{\mu}(x) = x^{\mu}(s,\theta+\Delta\theta) - x^{\mu}(s,\theta)\ ,$$

а також введемо вектори $\xi^{\mu}(x) := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\theta}$, $\tau^{\mu}(x) := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial s}$.

Хай $t_1^m(x)$ і $t_2^m(x)$ - відповідні параметри деформованої групи дифеоморфізмів T_M^{gH} , яка задає на M геометричну структуру (афінної зв'язності без скруту, або ріманову). Елементи t_1 та t_2 , за побудовою, комутують:

$$\varphi^m(x,t_1(x),t_2(x')) = \varphi^m(x,t_2(x),t_1(\bar{x}))\ , \qquad (1)$$

де $x' = x(s+\Delta s,\theta)$, $\bar{x} = x(s,\theta+\Delta\theta)$, а функції φ^m задають закон множення в групі T_M^{gH}. Групу T_M^{gH} вважатимемо канонічною, тому $t_1(x) = \Delta s\,\tau(x)$. За цих умов диференціювання рівняння (1) по θ дозволяє записати умову комутативності (1) в термінах векторних полів ξ і τ:

$$\lambda(x,\Delta s\,\tau(x))^m{}_n\,\xi^n(x') = \\ = \Delta s\frac{\partial\tau^m(x)}{\partial\theta} + \mu(x,\Delta s\,\tau(x))^m{}_n\,\xi^n(x), \quad (2)$$

де

$$\lambda(x,t)^m{}_n := \frac{\partial}{\partial t'^n}\varphi^m(x,t,t')\Big|_{t'=0},$$

$$\mu(x,t)^m{}_n := \frac{\partial}{\partial t'^n}\varphi^m(x,t',t)\Big|_{t'=0} \quad (3)$$

- допоміжні функції групи T_M^{gH}, а компоненти векторів ξ і τ з латинськими індексами відносяться до афінного репера і можуть бути визначеними за формулою $\xi^m(x) = h(x)^m_\mu\,\xi^\mu(x)$ (аналогічно і $\tau^m(x)$), де $h(x)^m_\mu$ - допоміжні функції деформації. За допомогою допоміжних функцій групи T_M^{gH} коваріантні похідні визначаються досить елегантно:

$$\frac{D\xi^m}{ds}(x) := \frac{d}{d\Delta s}\lambda(x,\Delta s\,\tau(x))^m{}_n\,\xi^n(x')\Big|_{\Delta s=0} = \\ = \tau^n\nabla_n\xi^m(x), \quad (4)$$

де

$$\nabla_n\xi^m(x) = h(x)^\nu_n\,\partial_\nu\xi^m(x) + \gamma(x)^m_{nl}\xi^l(x), \quad (5)$$

$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, і коефіцієнти афінної зв'язності в афінному репері визначаються законом множення групи T_M^{gH}:

$$\gamma(x)^m_{nl} = \frac{\partial^2}{\partial t^n\partial t'^l}\varphi^m(x,t,t')\Big|_{t=t'=0}. \quad (6)$$

Диференціювання рівності (2), з врахуванням вищенаведених співвідношень, призводить до рівності:

$$\frac{D\xi^m}{ds}(x) = \tau^n\nabla_n\xi^m(x) = \xi^n\nabla_n\tau^m(x) = \frac{D\tau^m}{d\theta}(x). \quad (7)$$

Знайдемо другу коваріантну похідну векторного поля ξ в точці x. Оскільки, згідно формулі (4), вона визначається через похідну по зрушенню в нулі натурального параметра перенесеного вздовж геодезичної векторного поля ξ, для її знаходження необхідно двічі подіяти матрицею λ:

$$\frac{D^2\xi^m}{ds^2}(x) = \\ = \frac{d^2}{d\Delta s\,d\delta s}\lambda(x,\Delta s\,\tau(x))^m{}_k\,\lambda(x',\delta s\,\tau(x'))^k{}_n\,\xi^n(x'')\Big|_{\Delta s=\delta s=0} \quad (8)$$

де $x'' = x(s+\Delta s+\delta s,\theta)$. Присутній в формулі (8) добуток матриць λ можна виразити через лінійну частину добутку елементів $\{\Delta s\,\tau(x),1\}$ та $\{\delta s\,\tau(x),1\}$ групи DT, яка відповідає групі T_M^{gH} [3]:

$$\{\Delta s\,\tau(x),1\}\times\{\delta s\,\tau(x),1\} = \\ = \{(\Delta s+\delta s)\tau(x), L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))\} \quad (9)$$

(тут враховано канонічність групи T_M^{gH}, яку ми припускаємо). Згідно закону множення в групі DT маємо:

$$\lambda(x,\Delta s\,\tau(x))^m{}_k\,\lambda(x',\delta s\,\tau(x'))^k{}_n = \\ = L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^m{}_k\,\lambda(x,(\Delta s+\delta s)\tau(x))^k{}_n. \quad (10)$$

Підставляючи це співвідношення в формулу (8) і враховуючи умову комутативності (2), одержуємо:

$$\frac{D^2\xi^m}{ds^2}(x) = \frac{d^2}{d\Delta s\,d\delta s}L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^m{}_k\cdot \\ \left[(\Delta s+\delta s)\frac{\partial\tau^k(x)}{\partial\theta} + \mu(x,(\Delta s+\delta s)\tau(x))^k{}_n\,\xi^n(x)\right]\Big|_{\Delta s=\delta s=0}. \quad (11)$$

З використанням співвідношення (10), та рівняння (15) з роботи [1], можна знайти:

$$\frac{d}{d\Delta s}L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^m{}_k\Big|_{\Delta s=0} = \\ = [\gamma(x)^m_{lk} - \partial_k\mu(x,\delta s\,\tau(x))^m{}_l]\,\tau^l(x), \quad (12)$$

де позначено $\partial_k\mu(x,t)^m{}_l = \frac{\partial}{\partial t^k}\mu(x,t)^m{}_l$. Це дозволяє вираз (11) записати у вигляді:

$$\frac{D^2\xi^m}{ds^2}(x) = \frac{d}{d\delta s}\Big\{\left[\gamma(x)^m_{lk} - \partial_k\mu(x,\delta s\,\tau(x))^m{}_l\right]\tau^l(x)\cdot \\ \left[\delta s\frac{\partial\tau^k(x)}{\partial\theta} + \mu(x,\delta s\,\tau(x))^k{}_n\,\xi^n(x)\right] + \\ \frac{\partial\tau^m(x)}{\partial\theta} + \partial_l\mu(x,\delta s\tau(x))^m{}_n\,\tau^l(x)\xi^n(x)\Big\}\Big|_{\delta s=0} = \\ \partial_p\left\{\partial_l\mu(x,t)^m{}_n - \partial_n\mu(x,t)^m{}_l\right\}\Big|_{t=0}\tau^p(x)\tau^l(x)\xi^n(x). \quad (13)$$

Враховуючи теоретико-групове означення тензора кривизни [1] $R^m{}_{pln} = \rho^m{}_{pln} - \rho^m{}_{pnl}$, де $\rho^m{}_{pln} = \partial^2_{pl}\mu(x,t)^m{}_n\big|_{t=0}$, остаточно одержуємо рівняння девіації геодезичних:

$$\frac{D^2\xi^m}{ds^2} + R^m{}_{pnl}\,\tau^p\xi^n\tau^l = 0. \quad (14)$$

Наведений в цьому розділі теоретико-груповий вивід відомого рівняння (14) безпосередньо ілюструє, яким чином некомутативність закону множення групи DT (10) призводить до девіації геодезичних.

2. Девіація довжини при трансляціях групи DT

При трансляціях t з групи DT довільне векторне поле перетворюється за формулою:

$$\xi^m_t(x) = \lambda(x,t(x))^m{}_n\,\xi^n(x'), \quad (15)$$

де $x' = x + \tilde{t}$, яка при інфінітезимальному $\tilde{t}$ задає паралельне перенесення вектора ξ з точки x' в точку x, що і дало підстави групу DT назвати групою паралельних перенесень [3]. Однією з еквівалентних умов канонічності деформації є умова [2]:

$$\tau_t^m(x) = \lambda(x,t)^m{}_k \tau^k(x') = \tau^m(x), \qquad (16)$$

де τ - дотичний вектор до геодезичної, що з'єднує точки x та x', в натуральній параметризації. Отже для канонічних груп DT-трансляції дотичних векторів вздовж геодезичної переводять їх самих в себе.

В рімановому просторі довжина векторів τ залишається одиничною для всіх точок геодезичної, отже перенесення (16) зберігає довжину вектора τ. Для довільного вектора ξ перенесення (15) при інфінітезимальному t є паралельним перенесенням, отже також зберігає довжину при умові узгодженості зв'язності з метрикою $\gamma^{\cdot}_{mln} + \gamma^{\cdot}_{nlm} = 0$, де $\gamma^{\cdot}_{mln} = \eta_{mk}\gamma^k_{lm}$ і η_{mk} - метрика плоского дотичного простору. Проте у кривому просторі, внаслідок девіації, при конечних трансляціях $t \in DT$ перетворення (15) довжину не зберігає. Більше того, справедливе наступне.

Твердження 1. *Збереження довжини довільного (а не тільки дотичного до геодезичної) вектора при перенесенні (15) є умовою плоского простору.*

Дійсно, запишемо умову збереження довжини довільного вектора при перенесенні (15) в координатному базисі [2]:

$$\lambda(x,\tilde{t})^\rho{}_\mu \lambda(x,\tilde{t})^\sigma{}_\nu\, g(x)_{\rho\sigma} = g(x')_{\mu\nu}, \qquad (17)$$

де

$$\lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\nu = h(x)^\mu_m \lambda(x, H(x,\tilde{t}))^m{}_n h(x')^n_\nu, \qquad (18)$$

$H(x,\tilde{t})$ - функція деформації, за допомогою якої одержано групу T_M^{gH}, яка, в свою чергу, породила групу DT. Для матриць $\lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\nu$ рівняння Маурера-Картана групи T_M^{gH} [1] зводяться до умови симетричності:

$$\partial_{\tilde{\rho}} \lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\nu = \partial_{\tilde{\nu}} \lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\rho, \qquad (19)$$

де $\partial_{\tilde{\rho}} = \partial / \partial \tilde{t}^\rho$.

Диференціювання рівняння (17) по $\tilde{t}$ в нулі призводить до умови узгодженості зв'язності, заданої в координатному базисі, з метрикою $\Gamma^{\cdot}_{\mu\nu\sigma} + \Gamma^{\cdot}_{\nu\mu\sigma} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}$, що з умовою відсутності скруту, як відомо, дає вираз для символів Крістоффеля:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{{}^{\rho}_{\mu\nu}\} = \tfrac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \qquad (20)$$

Обчислимо їх в точці x', знаходячи похідні від метрики в цій точці з рівняння (17). Врахування умови симетричності (19) дозволяє знайти рівняння:

$$\partial_{\tilde{\rho}} \lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\sigma = \Gamma(x')^\nu_{\rho\sigma} \lambda(x,\tilde{t})^\mu{}_\nu, \qquad (21)$$

умовою інтегрованості якого є рівність нулю тензора кривизни $R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} = 0$, що і завершує доведення твердження.

Отже виконання рівняння (17) (або рівняння (49) з роботи [6], або (42) з [1]) в кривому рімановому просторі слід вимагати лише інфінітезимально по $\tilde{t}$ (що забезпечує узгодженість зв'язності з метрикою), а не глобально.

Таким чином, мірою кривизни в рімановому просторі може служити відмінність тензора

$$\begin{aligned} &G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn} = \\ &= \lambda^{-1}(x,\Delta s\,\tau(x))^k{}_m \lambda^{-1}(x,\Delta s\,\tau(x))^l{}_n \eta_{kl} \end{aligned} \qquad (22)$$

від метричного тензора плоского простору η_{mn}. Зазначимо, що тут використовуються матриці λ^{-1} замість λ з причини більшої корисності саме виразу (22) в подальших геометричних розглядах.

За умови узгодженості зв'язності з метрикою

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\Delta s} G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn}\Big|_{\Delta s=0} = \\ &= -[\gamma(x)^{\cdot}_{mln} + \gamma(x)^{\cdot}_{nlm}]\,\tau^l(x) = 0 \end{aligned}, \qquad (23)$$

отже відмінність тензора $G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn}$ від η_{mn} виявляється лише в другому порядку по Δs. Для його знаходження скористаємося співвідношенням (10), записаним для обернених матриць:

$$\begin{aligned} &\lambda^{-1}(x,(\Delta s + \delta s)\tau(x))^k{}_n = \\ &\lambda^{-1}(x',\delta s\,\tau(x'))^k{}_n \lambda^{-1}(x,\Delta s\,\tau(x))^n{}_k L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^k{}_n \end{aligned} \qquad (24)$$

що дозволяє знайти

$$\begin{aligned} &G(x,(\Delta s + \delta s)\tau(x))_{mn} = \\ &= L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^k{}_m L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^l{}_n \cdot \\ &\lambda^{-1}(x,\Delta s\,\tau(x))^p{}_k \lambda^{-1}(x,\Delta s\,\tau(x))^r{}_l G(x,\delta s\,\tau(x))_{pr}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Нам ще знадобиться співвідношення

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\Delta s\, d\delta s} L(x,\Delta s\,\tau(x),\delta s\,\tau(x'))^m{}_n\Big|_{\Delta s=\delta s=0} = \\ &= -\rho(x)^m{}_{kln}\,\tau^k(x)\tau^l(x) \end{aligned}, \qquad (26)$$

яке слідує з формули (12). Отже, диференціюючи формулу (25), з врахуванням (23) та (26), одержуємо:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\Delta s^2} G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn}\Big|_{\Delta s=0} = \\ &= \frac{d^2}{d\Delta s\, d\Delta s} G(x,(\Delta s + \delta s)\tau(x))_{mn}\Big|_{\Delta s=\delta s=0} = \\ &- [\rho(x)^{\cdot}_{mnkl} + \rho(x)^{\cdot}_{nmkl}]\,\tau^k(x)\tau^l(x). \end{aligned} \qquad (27)$$

У випадку канонічних груп T_M^{gH}, що ми припускаємо, коефіцієнти $\rho^{\cdot}_{mnkl}$ виражаються через тензор кривизни наступним чином [2]: $\rho^{\cdot}_{mnkl} = \frac{1}{3}(R^{\cdot}_{mnkl} + R^{\cdot}_{nmkl})$. Це дозволяє вираз (27) записати в остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\Delta s^2} G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn}\Big|_{\Delta s=0} = \\ &= -\tfrac{2}{3} R(x)^{\cdot}_{mknl}\,\tau^k(x)\tau^l(x) \end{aligned}. \qquad (28)$$

Отже, з точністю до другого порядку по Δs включно маємо розклад:

$$G(x,\Delta s\,\tau(x))_{mn}=\eta_{mn}-\frac{\Delta s^2}{3}R(x)^{\cdot}_{m\,k\,n\,l}\tau(x)^k\tau(x)^l\,,\quad (29)$$

що з іншого боку ілюструє доведене твердження.

Незбереження довжини вектора при конечних перенесеннях (15), не зважаючи на те, що в інфінітезимальному випадку вони збігаються з паралельними перенесеннями, робить термін "паралельні перенесення" для трансляцій (15) з групи DT, як і термін "група паралельних перенесень", який застосовувався для групи DT в роботі [3], дещо умовним і тут не використовується. Відмітимо тільки, що паралельні перенесення векторів вздовж геодезичних, які зберігають їх довжину, об'єднуються в іншу групу, яка розглядалася в роботі [7], і через збереження довжин векторів при трансляціях має більше підстав називатися групою паралельних перенесень, ніж DT. Перевагою групи DT в нашому контексті є більш природне описання нею явища девіації при русі вздовж геодезичних, яке розглядається в даній роботі і яке є визначальним при побудові фундаментальної групи простору Ейнштейна.

3. Девіація об'ємів і простір Ейнштейна

Розглянемо спряжену форму (коваріантний вектор) гіпероб'єму, натягнутого на векторах $\xi_1,\ldots,\xi_{D-1}$, заданих в точці x' (залежність від x' для скорочення запису не показуємо):

$$v_m=\varepsilon_{m\,m_1\ldots m_{D-1}}\xi_1^{m_1}\ldots\xi_{D-1}^{m_{D-1}}\,.\quad (30)$$

Тут D - розмірність простору, а компоненти векторів ξ вважаються заданими в ортонормованому репері. При DT-перенесенні векторів ξ в точку x, яке задається формулою (15), ковектор v_m перетворюється за законом:

$$v^t_m(x)=\lambda\,\lambda^{-1}(x,t(x))^n{}_m\,v_n(x')\,,\quad (31)$$

де $\lambda:=det\{\lambda(x,t(x))^n{}_m\}$.

Повний D-вимірний об'єм, натягнутий на векторах $\tau,\xi_1,\ldots,\xi_{D-1}$, може бути визначеним наступним чином $\Omega=\tau^m v_m$ і при DT-перенесенні вздовж геодезичної, яка визначається вектором τ, перетворюється за формулою:

$$\Omega^t(x)=\lambda\,\Omega(x')\,,\quad (32)$$

в якій при визначенні λ покладено $t(x)=\Delta s\,\tau(x)$. Отже при DT-перенесеннях як гіпероб'ємів v_m, так і об'ємів Ω, визначальним є фактор λ.

Знайдемо його розклад по Δs, виходячи з рівняння

$$\lambda^2=\eta\,G^{-1}\,,\quad (33)$$

яке слідує з формули (22), де η і G є визначниками матриць метричного тензору плоского простору та тензору G_{mn} відповідно. Користуючись розкладом (29), з точністю до Δs^2 одержуємо:

$$\lambda=1+\frac{\Delta s^2}{6}R_{kl}\tau^k\tau^l\,,\quad (34)$$

де R_{kl} - тензор Річчі. В просторі Ейнштейна

$$R_{kl}=0\,,\quad (35)$$

отже, з врахуванням формули (32), справедливе наступне.

Твердження 2. *В просторі Ейнштейна DT-перенесення вздовж геодезичних зберігають об'єм Ω з точністю до другого порядку по зрушенням Δs включно.*

І навпаки, вимога збереження з тією ж точністю об'єму Ω при DT-перенесеннях вздовж геодезичних забезпечує виконання рівняння Ейнштейна в пустоті (35).

Розглянемо ще одне геометричне тлумачення простору Ейнштейна, ґрунтуючись на результатах роботи [8].

Хай задано центральний пучок геодезичних , що виходять з точки x_0 і θ^i ($i=1,\ldots,D-1$) – кутові параметри, які визначають початковий напрямок геодезичної $\tau_0(\theta)$. За цих умов з рівняння (2) слідує:

$$\xi_i^m(x)=s\,\lambda^{-1}(x_0,s\tau_0)^m{}_n\sigma_i^n\,,\quad (36)$$

де $\xi_i^m(x):=h(x)^m_\mu\frac{\partial x^\mu}{\partial\theta^i}$ і $\sigma_i^m:=\frac{\partial\tau_0^m}{\partial\theta^i}$, оскільки для центрального пучка $\xi_i^m(x_0)=0$. Розглянемо довжину вектора гіпероб'єму v_m (30), натягнуторо на вектори ξ_i^m. З врахуванням співвідношення (36) та означення (22) можна знайти:

$$|v|=s^{D-1}det\{G(x_0,s\tau_0)_{mn}\sigma_i^m\sigma_j^n\}^{1/2}\,.\quad (37)$$

Введемо коваріантний вектор тілесного кута, що спирається на площу $|v|$ на геодезичній гіперсфері з центром в точці x_0:

$$\omega_m:=v_m/s^{D-1}\,,\quad (38)$$

величина якого $|\omega|$, згідно (37), дорівнює $det\{G_{mn}\sigma_i^m\sigma_j^n\}^{1/2}$ (строго кажучи, елементом площі є $|v|\;d\theta_1\ldots,d\theta_{D-1}$, але постійний фактор добутку диференціалів кутових змінних ми опускаємо). Для обчислення цього детермінанту доповнимо систему векторів σ_i ортогональним їм вектором τ_0, поклавши $\sigma_0=\tau_0$ і зауваживши, що

$$G_{mn}\sigma_0^m\sigma_0^n=|\tau(x)|^2=1\,,$$

$$G_{mn}\sigma_0^m\sigma_i^n=\eta_{mn}\tau^m(x)\xi_i^n/s=0\,.$$

В результаті, вводячи єдині D-значні індекси $a=(0,i)$ (для яких застосовуватимемо початкові літери латинського алфавіту), одержуємо:

$$det\{G_{mn}\sigma_i^m\sigma_j^n\}=det\{G_{mn}\sigma_a^m\sigma_b^n\}=G\,\sigma^2\,.\quad (39)$$

Хай $g_{ab}:=\eta_{mn}\sigma_a^m\sigma_b^n$, і з міркувань, аналогічних тим, що привели до формули (39), маємо:

$$det\{g_{ab}\}=det\{g_{ij}\}=:g=\eta\sigma^2\,,\quad (40)$$

де g_{ij} - метричний тензор на одиничній гіперсфері плоского простору в кутових координатах θ^i . Об'єднуючи тепер формули (33), (39), (40), знаходимо:

$$|\omega| = g^{1/2}\lambda^{-1}, \qquad (41)$$

або, враховуючи (34), з точністю до s^2 :

$$|\omega| = g^{1/2}\left[1 - \frac{s^2}{6}R(x_0)_{kl}\tau_0^k\tau_0^l\right], \qquad (42)$$

де $g = det\{g_{ij}\}$. Очевидно, в плоскому випадку $|\omega| = g^{1/2}$, і довжина вектора тілесного кута не залежить від радіуса s геодезичної гіперсфери. Але й в просторі Ейнштейна, як слідує з (42), принаймні з точністю s^2 , зберігається ця ж властивість.

Твердження 3. *В просторі Ейнштейна тілесні кути, які визначаються по геодезичним гіперсферам, з точністю до другого порядку включно не залежать від радіусів гіперсфер* s .

І навпаки, вимога незалежності з тією ж точністю тілесних кутів від радіусу геодезичних гіперсфер забезпечує виконання рівняння Ейнштейна в пустоті (35).

Дане твердження, як і твердження 2, грунтується на тому, що в просторі Ейнштейна, як слідує з формули (34),

$$\lambda = 1 + O(\Delta s^3), \qquad (43)$$

оскільки рівняння Ейнштейна, зважаючи на довільність векторів τ , еквівалентне вимозі:

$$\left.\frac{d^2}{d\Delta s^2}\lambda\right|_{\Delta s=0} = 0, \qquad (44)$$

а $\left.\frac{d}{d\Delta s}\lambda\right|_{\Delta s=0} = 0$ виконується внаслідок умови узгодженості зв'язності з метрикою (23). Таким чином, можна дати наступне.

Означення. *Деформовану групу дифеоморфізмів* T_M^{gH} *, допоміжні матриці* $\lambda(x,t)^n{}_m$ *якої задовольняють умову (43), будемо називати* ***групою трансляцій в просторі Ейнштейна*** M *, а відповідну їй групу* DT *, яка діє в дотичному розшаруванні* TM *простору Ейнштейна -* ***фундаментальною групою простору Ейнштейна****.*

Дія груп T_M^{gH} на M і DT на TM задає на M та в його дотичному розшаруванні структуру простору Ейнштейна і дотичного розшарування простору Ейнштейна відповідно, чим і обгрунтовується дане означення.

Тут виникає питання, а чи дає додаткові обмеження підсилення вимоги (43) до зовні більш завершеної конечної вимоги

$$\lambda = 1,$$

яка забезпечує збереження об'єму при конечних DT -перенесеннях (і яка дозволила би позбавити твердження 2 і 3 обумовлень «з точністю до другого порядку включно»), чи така вимога занадто сильна і може привести лише до вузького класу просторів Ейнштейна, аналогічно тому, як умова збереження довжини довільного вектора при конечних DT -перенесеннях є умовою плоского простору (твердження 1)? З'ясування цього питання залишається відкритим.

Наостанок відмітимо ще одну проблему, позитивне вирішення якої могло би прояснити питання, які тут розглядаються: знайти рівняння, умовою інтегрованості якого була би рівність нулю тензора Річчі, аналогічно тому, як умовою інтегрованості рівняння (21) є рівність нулю тензора кривизни. Претендентом на таке рівняння є рівняння, яке слідує з вимоги збереження довжини вектору гіпероб'єму v при конечних DT -трансляціях у випадку ортогональності векторів ξ_i , за допомогою яких будується вектор v (30), вектору τ , дотичному до геодезичної, вздовж якої відбувається перенесення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самохвалов С.Є.* Теоретико-груповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №9. – С. 1238 - 1248. – arXiv:0704.2967 [math.DG].
2. *Самохвалов С.Є.* Канонічні деформовані групи дифеоморфізмів та скінченні паралельні перенесення і ріманових просторах // Математичне моделювання. – 2007.–№1(16).– С. 22–27. – arXiv:0704.2980 [math.DG].
3. *Самохвалов С.Є.* Група паралельних перенесень в рімановому просторі // Математичне моделювання. –2007.–№ 2(17).–С. 50–54. arXiv:math.DG/ 0605006.
4. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 399–434.
5. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – Издат. МГУ, 1960. – 302 с.
6. *Самохвалов С.Е.* Теоретико-групповое описание калибровочных полей //ТМФ.–1988.–76, № 1.– С. 66–77.
7. *Samokhvalov S.E., Reznyk K.O.* Cartan equation as the condition of the existence of an infinite group // Lie theory and its applications in physics VI. Proceedings of the international workshop. Varna, Bulgaria, 15–21 August 2005. – Heron Press Ltd., 2006. – P. 309 – 314.
8. *Loveridge Lee C.* Physical and geometric interpretations of the Riemann tensor, Ricci tensor and scalar curvature. – arXiv:gr-qc/0401099.

пост. 25.12.08