методa формуючих фільтрів. На її основі показана можливість рішення задач ідентифікації нелінійних СДС. В подальшому планується розширити застосування цієї методології для вирішення інших задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 560 с.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2000. – 1000 с.
3. Приходько С.Б. Применение преобразования компонент стохастических дифференциальных уравнений для защиты от несанкционированного прослушивания информации в звуковых файлах // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв: НУК, 2004. – № 5 (398). – С. 117-125.
4. Приходько С.Б. Интервальная оценка параметров стохастических дифференциальных систем на основе преобразований Джонсона. – Автоматика-2004: Матеріали 11-ї міжн. конф. по автоматичному управлінню, м. Київ, 27-30 вересня 2004 р. – Київ, Вид-во НУХТ, 2004. – Т.1. – С. 93.
5. Приходько С.Б. Оцінка параметрів стохастичних диференціальних рівнянь узагальненим методом моментів з попереднім перетворенням їх компонентів // Тези доповідей міждерж. науково-методич. конф. "Проблеми математич-ного моделювання" (23-25 травня 2007 р., м. Дніпро-дзержинськ). – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. – С. 43-44.
6. Бессонов А.А., Загашвили Ю.В., Маркелов А.С. Методы и средства идентификации динамических объектов – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1989. – 280 с.
7. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 359 с.
8. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

пост. 28.05.08

Дослідження стійкості граничних циклів в одній моделі екосистеми типу «хижак-жертва»

КОВАЛЕНКО Г.П., БАТАЛОВА А.Б.

Сумський аграрний університет

Розглядається математична модель екосистеми, що містить 6 параметрів: коефіцієнти народжуваності і смертності від внутрівидової боротьби серед жертв, коефіцієнт народжуваності хижаків, число жертв, необхідних для підтримки життя одного хижака і два параметри дробово-раціональної функції, що описує реакцію хижака на жертву.

Рассматривается математическая модель экосистемы, которая содержит 6 параметров: коэффициенты рождаемости и смертности от внутривидовой борьбы среди жертв, коэффициент рождаемости хищников, число жертв, необходимых для поддержки жизни одного хищника и два параметра дробно-рациональной функции, которая описывает реакцию хищника на жертву.

It is study the mathematical model of ecosystem which contain six parameters: coefficients of birth rate and death rate from an intraspecific fight among victims, coefficient of birth-rate of predators, number of victims, necessary for support of life of one predator and two parameters of shot-rational function which describes the of predator on a victim.

Постановка задачі. Хоча в екосистемах «хижак-жертва» спостереження виявили коливання мас хижаків і жертв, однак певний час обмежувались якісними методами аналізу відповідних математичних моделей, бо не існувало ефективного методу їх наближеного інтегрування аналітичними засобами. Цей етап розвитку математичної екології ілюструє змістовна монографія [1].

В кінці семидесятих років минулого століття був розроблений найпотужніший метод аналізу періодичних режимів динамічних систем [2]. Одночасно було усвідомлено, що модель, яка претендує на адекватний опис динаміки екосистеми повинна бути структурно стійкою і мати граничний цикл, чого не було в моделях В. Вольтерри і Лоткі.

Одна з моделей, що володіє згаданими властивостями, була запропонована Дж. Теннером [3]. Вона описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r\left(1-\frac{x}{k}\right)x - yF(x) \equiv \psi_1(x, y) \\ \dot{y} &= s\left(1-G\frac{y}{x}\right)y \equiv \psi_2(x, y); \quad F(x)=\frac{ax}{d+x} \end{aligned} \tag{1}$$

де x, y – щільність маси жертв і хижаків відповідно, r– коефіцієнт народжуваності жертв у відсутності хижаків, r/k – коефіцієнт смертності жертв від внутрівидової конкуренції, функція $F(x)$ описує швидкість виїдання жертв хижаками в залежності від щільності жертв, s – коефіцієнт народжуваності хижаків, G – кількість жертв, необхідна для підтримання життя одного хижака. Модель побудована так, щоб кількість хижаків не перевищувала величини x/G. Функція $F(x)$ прямує до a, коли $x \to \infty$. Отже a – це гранична швидкість виїдання жертв хижаками.

В моделях Вольтерри ця величина була необмеженою, що суперечить спостереженням.

Відношення a/d визначає тангенс кута нахилу дотичної до кривої $F(x)$ в початку координат.

В роботі [4] наведені перші кроки якісного аналізу моделі (1), однак в ній відсутні наближений періодичний розв'язок, критерій його стійкості та його аналіз. Саме ці питання розглядаються в пропонованій роботі.

В системі (1) фазові коефіцієнти x, y і всі параметри безрозмірні і додатні.

Методологічна частина.

1. Умови виникнення періодичних коливань в моделі (1) в звуженому параметричному просторі.

Модель(1) містить 6 параметрів, які вважаються незалежними. Щоб полегшити аналіз розв'язку, що залежить від багатьох параметрів, виникає необхідність зменшити їх кількість.

Існують і інші причини для такого зменшення. Наприклад, стаціонарний розв'язок може знаходитись в надто громіздкому вигляді. Параметричний простір можна звузити різними способами. Тут використано метод заміни незалежного параметра на залежний від інших. Для цього підбираються такі сталі значення фазових координат, які задовольняють одне з рівнянь. Підстановка вибраних значень в інше рівняння дає одну залежність між ними. З неї можна виразити один параметр через інші в прийнятній формі. Наприклад, якщо прийняти в (1) $x_e = 1,\quad y_e = 1/G$, що друге рівняння стає тотожністю, підстановка цих значень в перше дає таку залежність:

$$\frac{r}{k}(k-1) - \frac{a}{G(d+1)} = 0 \qquad (2)$$

Звідси можна виразити, наприклад, a

$$a = G\frac{r}{k}(k-1)(d+1); \quad k > 1$$

Далі виконуються основні пункти алгоритму методу біфуркації народження циклу [БНЦ]. Праві частини системи (1) виражаються рядами Тейлора в околі стаціонарної точки x_c, y_c по степенях нових змінних $\xi = x - x_c$, $\eta = y - y_c$ до кубічних доданків включно. В результаті одержується наближена система:

$$\begin{matrix}\dot{\xi} \\ \dot{\eta}\end{matrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1 \\ F_2\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} r\left(\frac{k-2}{k}\right) - \frac{ad}{GD^2} & -\frac{a}{D} \\ \frac{s}{G} & -s \end{pmatrix}, \quad D = d+1$$

$$F_1 = \frac{ad}{D^2}\left(\frac{\xi^2}{GD} - \xi\eta - \frac{\xi^3}{GD^2} + \frac{\xi^2\eta}{D}\right);$$

$$F_2 = s\left(\frac{\xi^2}{D} - 2\xi\eta - \frac{\eta^3}{G} + \frac{\xi^3}{G} - 2\xi^2\eta + G\xi\eta^2\right).$$

Відповідно до теореми Хопса [2] система рівнянь (3) може мати періодичний розв'язок, якщо власні значення матриці М:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Spur\mathrm{M} \pm \sqrt{(Spur\mathrm{M})^2 - 4dlt\mathrm{M}}}{2} \qquad (4)$$

є суто уявними, що вимагає виконання двох умов: слід матриці $Spur$М повинен обернутись в 0

$$Spur\mathrm{M} = r\frac{k-2}{k} - \frac{ad}{GD^2} - s = 0\,, \qquad (5)$$

а визначник матриці

$$\det\mathrm{M} = s\left(\frac{a}{GD}\left(1+\frac{d}{D}\right) - r\left(\frac{k-2}{k}\right)\right)$$

повинен бути додатнім.

З рівняння (5) знаходиться біфуркаційне значення одного з параметрів. Наприклад:

$$s = s_á = r\frac{k-2}{k} - \frac{ad}{GD^2}\,.$$

При заміні a його значенням одержується:

$$s_á = \frac{r}{kD}(k-2-d); \quad k > 2+d$$

Для додатності $s_á$ слід вимагати виконання нерівності $k > 2+d$.

Аналогічно спрощується detM:

$$\det\mathrm{M} = s_á\,\frac{r}{k}(kd+1) \equiv \omega_0^2\,.$$

Фізичний зміст визначника detM в разі його додатності і суто уявних власних значень матриці М – це квадрат частоти можливих коливань щільності мас. Тому далі ця величина позначається через ω_0^2. Як випливає з попереднього, для додатності двох величин $s_á$ і detM вимагається виконання однієї нерівності: $k > 2+d$.

Наступним кроком алгоритму є зведення системи (3) до канонічного виду. Для цього матрицю М записують при біфуркаційному значенні параметра s

$$\mathrm{M}_á = \begin{pmatrix} s_á & -\frac{a}{D} \\ \frac{s_á}{G} & -s_á \end{pmatrix}.$$

Далі знаходять її власний вектор $\vec{R}$, що відповідає її власному значенню $i\omega_0$, де i-уявна одиниця:

$$\vec{R} = \left(1; \frac{s_á - i\omega_0 D}{a}\right)^{\tau},$$

де "τ" – оператор транспортування. З вектора $\vec{R}$ утворюється матриця перетворення П

$$\text{Ï} = \left(\mathrm{Re}\vec{R}, -\mathrm{Im}\vec{R}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Ds_á}{a} & \frac{D\omega_0}{a} \end{pmatrix}.$$

Далі виконується заміна змінних

$$\text{Ï}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{D}{a}(s_á\xi + \omega_0\eta) \end{pmatrix}.$$

І перетворення нелінійних частин:

$$\text{Ï}^{-1}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1\\ \dfrac{1}{\omega_0}\left(-s_{\acute a}F_1+\dfrac{a}{D}F_2\right)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\hat{O}_1\\ \hat{O}_2\end{pmatrix}.$$

Після заміни змінних праві частини F_1, F_2 набувають вигляду:

$$F_1=\mathrm{A}_1\xi^2-\mathrm{B}_1\xi\eta+\mathrm{T}_1\xi^3+Q_1\xi\eta;$$

$$F_2=-\mathrm{A}_2\xi^2+\mathrm{B}_2\xi\eta+C_2\eta^2+\mathrm{T}_2\xi^3+Q_2\xi^2\eta+\mathrm{H}_2\xi\eta^2,$$

де

$$\mathrm{A}_1=\frac{d}{D}\left(s_{\acute a}-\frac{a}{GD^2}\right);\quad \mathrm{B}_1=\frac{d\omega_0}{D};$$

$$\mathrm{T}_1=\frac{d}{D^2}\left(s_{\acute a}-\frac{a}{D^2G}\right);\quad Q_1=\frac{d\omega_0}{D^2};$$

$$\mathrm{A}_2=S_{\acute a}\left(1+\frac{s_{\acute a}^2D^2}{a^2}-\frac{2s_{\acute a}D}{a}\right);$$

$$\mathrm{B}_2=2s_{\acute a}\frac{D}{a}\omega_0(1-s_{\acute a});\quad C_2=\frac{s_{\acute a}}{G}\left(\frac{D\omega_0}{a}\right)^2;$$

$$\mathrm{T}_2=\frac{s_{\acute a}}{G}\left(1+\frac{(s_{\acute a}GD)^2}{a^2}\right)-2s_{\acute a}^2\frac{D}{a};\tag{6}$$

$$Q_2=2\frac{D}{a}\omega_0s_{\acute a}\left(-1+s_{\acute a}G\frac{D}{a}\right);\quad \mathrm{H}_2=s_{\acute a}G\left(\frac{D}{a}\right)^2\omega_0.$$

Далі формуються вирази $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$:

$$\hat{O}_1\equiv F_1;\quad \hat{O}_2=\frac{1}{\omega_0}\left(-s_{\acute a}F_1+\frac{a}{D}F_2\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_0}\left\{\left(s_{\acute a}\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2\frac{a}{D}\right)\xi^2+\left(\mathrm{B}_1s_{\acute a}+\mathrm{B}_2\frac{a}{D}\right)\xi\eta-\right.$$

$$-C_2\frac{a}{D}\eta^2+\left(-\mathrm{T}_1s_{\acute a}+\frac{a}{D}\mathrm{T}_2\right)\xi^3+$$

$$\left.+\left(-Q_1s_{\acute a}+Q_2\frac{a}{D}\right)\xi^2\eta+\mathrm{H}_2\frac{a}{D}\xi\eta^2\right\}.$$

На цьому закінчується добування інформації з системи (3) і починається перетворення одержаних даних в елементи розв'язку і критерій його стійкості.

2. Запис розв'язків і критерію стійкості.

З виразів $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ формується критерій стійкості, елементи періодичного розв'язку, а також малий функціональний параметр γ, по степенях якого він записується.

Спочатку знаходяться комплекси:

$$q_{11}=\frac{1}{2}\left[-A_1+\frac{i}{\omega_0}\left(s_{\acute a}A_1-\frac{a}{D}A_2-C_2\frac{a}{D}\right)\right];$$

$$\begin{Bmatrix}q_{01}\\q_{20}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left[-A_1\mp\frac{1}{\omega_0}\left(B_1\delta+B_2\frac{a}{D}\right)+\right.$$

$$\left.+i\left(s_{\acute a}A_1-\frac{a}{D}A_2+C_2\frac{a}{D}\mp B_1\right)\right];$$

$$q_{21}=\frac{1}{4}\left[3\mathrm{T}_1+\frac{1}{\omega_0}\left(-Q_1s_{\acute a}+Q_2\frac{a}{D}\right)+\right.$$

$$\left.+i\left(\left(\frac{a}{D}\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_1S\right)\frac{3}{\omega_0}+\frac{a}{D\omega_0}H_2-Q_1\right)\right].$$

З одержаних виразів формується величина ψ

$$\psi=\frac{i}{\omega_0}\left(q_{20}q_{11}-2|q_{11}|^2-\frac{1}{3}|q_{02}|^2\right)+q_{21},$$ де $|\mathrm{E}|$ означає модуль комплексного числа Е. Дійсна частина ψ дає шуканий критерій стійкості:

$$Re\psi=\psi_1+\psi_2, \text{ де}$$

$$\psi_1=-\frac{1}{4\omega_0}\left[-\frac{2A_1}{\omega_0}\underline{\left(A_1s_{\acute a}-G\frac{r}{k}(k-1)A_2\right)}-\right.$$

$$-A_1B_1+\frac{1}{\omega_0}\left(A_1s_{\acute a}-G\frac{r}{k}(k-1)(A_2+C_2)\right)\times\tag{7}$$

$$\left.\times\underline{\underline{\left(\frac{dr}{kD^2}(k-2-d)-2(1-s_{\acute a})s_{\acute a}\right)}}\right];$$

$$\psi_2=\frac{1}{4}\left(3\mathrm{T}_1+\frac{1}{\omega_0}\left(-Q_1s_{\acute a}+Q_2\frac{a}{D}\right)\right)\tag{8}$$

Для стійкості вимагається, щоб сума $\psi_1+\psi_2$ була від'ємною. Це значить, що вираз в квадратних дужках першого доданку ψ_1 був додатний, бо саме цей доданок робить головний внесок в стійкість коливань. Можна показати, що для більшості практично важливих значень параметрів раз підкреслений вираз менший нуля, $-\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1>0$, а перший множник наступного виразу також менший нуля. Отже вибирати слід з тих значень параметрів, при яких другий множник, підкреслений двічі, від'ємний.

В таблицях 1, 2, 3 подані приклади розрахунків критерію стійкості $\mathrm{Re}\psi=\psi_1+\psi_2$.

Таблиця 1. **Значення критерію стійкості ψ в залежності від параметра *d* при сталих інших параметрах (*G*=1; *k*=8; *r*=0,4)**

d / ψ_k	1	2	3
ψ_1	-0,2902	-0,1696	$1{,}5822\cdot10^{-3}$
ψ_2	-0,0574	-0,0390	-0,0255
Reψ	-0,3476	-0,2086	-0,0239

Таблиця 2. **Значення критерію стійкості ψ в залежності від параметра *G* при сталих інших параметрах (*d*=1; *k*=8; *r*=0,4)**

G / ψ_k	9	10	11	12
ψ_1	-0,3495	-0,3914	0,4493	0,4733
ψ_2	-0,0574	-0,0574	-0,0574	0,0574
Reψ	-0,4069	-0,4488	-0,5067	-0,5307

Таблиця 3. **Значення критерію стійкості ψ в залежності від двох параметрів *d* і *G* при сталих інших параметрах (*k*=6; *r*=0,4)**

G	10	11	12
d	ψ_1		
1	-0,2193	-0,2418	-0,2645
2	0,0324	0,0380	0,050
3	0,1219	0,1347	0,1451
d	ψ_2		
1	-0,0787	-0,0787	-0,0787
2	-0,0285	-0,0285	-0,0285
3	-0,0462	-0,0462	-0,0462
d	$\psi_1+\psi_2$		
1	-0,2980	-0,3205	-0,3432
2	0,0039	0,0095	0,0215
3	0,0757	0,0885	0,0989

Для запису розв'язків слід провірити умову трансверсальності

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda}{\partial s}\right|_{s=s_{\acute{a}}} \neq 0 .$$

Як випливає з (4), шукана похідна = –1/2. Це дає можливість записати малий функціональний параметр, по степенях якого записується розв'язок:

$$\gamma^2 = \frac{(s-s_{\acute{a}})}{-\mathrm{Re}\psi}\cdot\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda}{\partial s} = \frac{s_{\acute{a}}-s}{2(-\mathrm{Re}\psi)},$$

де $-\ \mathrm{Re}\psi > 0$. Вище одержано всі елементи, необхідні для запису наближеного періодичного розв'язку системи (3).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \text{Ï} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}Z \\ \mathrm{Im}Z \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$Z = \gamma\exp(\varphi t i) + \frac{i\gamma^2}{6\omega_0}(q_{02}\exp(-2\varphi t i) -$$

$$3q_{20}\exp(2\varphi t i) + 6q_{11}) + 0(\gamma^3), \tag{9}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + 0\left(\gamma^3\right)\right).$$

Виконання вказаних операцій діє такі вирази

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}Z \\ \mathrm{Im}Z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos\varphi t \\ \sin\varphi t \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{12\omega_0}\Big[-(\Delta_1 + A_1)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \sin 2\varphi t \\ \cos 2\varphi t \end{pmatrix} - (\Delta_2 - B_1)\begin{pmatrix} \cos 2\varphi t \\ \sin 2\varphi t \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} \overline{\Delta}_2 \\ A_1 \end{pmatrix}\Big] + 0\left(\gamma^3\right) \tag{10}$$

де $\Delta_1 = \frac{1}{\omega_0}\left(B_1 s_{\acute{a}} + \frac{a}{D}B_2\right)$; $\Delta_2 = A_1 s_{\acute{a}} - \frac{a}{D}A_2 + C_2\frac{a}{D}$;

$\overline{\Delta}_1 = \Delta_2 - 2C_2\frac{a}{D}$.

Остаточно розв'язок набуває вигляду

$$x = x_c + \mathrm{Re}z \qquad y = y_c + \frac{D}{a}(s_{\acute{a}}\mathrm{Re}z + \omega_0 \mathrm{Im}z).$$

Висновки

1. Метод біфуркації народження циклу виявився ефективним при знаходженні наближеного аналітичного розв'язку математичної моделі екосистеми типу «хижак-жертва» та при аналізі його стійкості.
2. Ефективність методу БНЦ зростає при використанні стаціонарних розв'язків у звужених параметричних просторах.
3. Одержані результати відкривають шлях до постановки задач параметричної ідентифікації екосистеми типу «хижак-жертва».

ЛІТЕРАТУРА

1. Смит Дж. М. Модели в экологии. М., «Мир», 1976, 184 с.
2. Хэссард Б., Козаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М., «МИР». 1985, 280 с.
3. Tanner J. T. The stability and intrinsic growth rate of prey and predator populations. Ecology, 1968, 56, 855-867.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «МИР», 1986, 244 с.
5. Лихтенберг А., Либерман М. Регуляция и стохастическая динамика. М., «МИР», 1984, 528 с.

пост. 30.05.08