МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Методи побудови математичних моделей нормалізованих сигналів нелінійних стохастичних диференціальних систем

ПРИХОДЬКО С.Б.

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Пропонуються методи побудови математичних моделей (стохастичних диференціальних рівнянь) нормалізованих вхідних і вихідних випадкових сигналів нелінійних стохастичних диференціальних систем на основі застосування перетворення Джонсона, формули Іто та метода формуючих фільтрів.

Предложены методы построения математических моделей (стохастических дифференциальных уравнений) нормализованных входных и выходных случайных сигналов нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе применения преобразования Джонсона, формулы Ито и метода формующих фильтров.

The methods of construction of mathematical models (stochastic differential equations) of normalised input and output random signals of nonlinear stochastic differential systems based on the uses of Johnson transform, Ito formula and filters method are proposed.

Стохастичною диференціальною системою (СДС) називають таку систему, поведінка якої описується стохастичним диференціальним рівнянням (СДР) [1, 2]. Нелінійною СДС будемо називати таку СДС, в якій вхідні і вихідні випадкові сигнали описуються нелінійним СДР. При моделюванні нелінійних СДС і в першу чергу при вирішенні задач ідентифікації таких систем шукають можливість застосування добре розроблених методів теорії стохастичних лінійних систем. Це веде до необхідності нормалізації стохастичної системи, тобто переходу до такої системи, у якої сумісний розподіл вхідного і вихідного сигналів є нормальним при нормальному розподілі вхідного сигналу. Таким чином, виникає проблема нормалізації нелінійних стохастичних систем, тобто проблема знаходження прийнятної нормальної моделі для даної системи [2].

Зараз, як правило, ця проблема вирішується або за рахунок методів лінеаризації, або шляхом застосування припущення про нормальність сигналів у системі. Такі рішення можуть застосовуватися лише тоді, коли закони розподілів сигналів у системі незначно відрізняються від нормального, а нелінійності є несуттєвими. У разі, коли це не так, може використовуватися метод, який базується на побудові СДР для нормалізованих випадкових процесів із СДР для реальних негаусовських випадкових процесів на основі застосування перетворення Джонсона та формули Іто. Вперше цей метод був запропонований при вирішенні задачі захисту інформації в звукових файлах [3], а пізніше був застосований для оцінки параметрів СДС [4, 5]. Зазначимо, що його використання можливо у разі, коли відома математична модель (СДР) випадкових сигналів у СДС. Але часто вона не відома і потребує визначення в результаті вирішення задачі структурної ідентифікації нелінійної СДС за вхідними та вихідними випадковими сигналами. Вирішення цієї задачі можна спростити, якщо застосувати СДР для нормалізованих сигналів нелінійної СДС. Тому виникає задача побудови СДР для нормалізованих сигналів за вхідними та вихідними випадковими сигналами нелінійної СДС і у випадку, коли її математична модель не відома.

Тому **метою роботи**, по-перше, є розробка методу побудови математичних моделей (СДР) нормалізованих вхідних і вихідних випадкових сигналів нелінійних СДС у разі, коли СДР для випадкових сигналів не відомі і закони розподілів сигналів у системі значно відрізняються від нормального, а, по-друге, розглянути особливості застосування методу побудови СДР для нормалізованих випадкових сигналів нелінійних СДС за відомими СДР для негаусовських випадкових сигналів на основі застосування перетворення Джонсона та формули Іто.

В роботі пропонується наступний метод побудови математичних моделей (СДР) нормалізованих випадкових сигналів нелінійних СДС. Спочатку для відповідного випадкового сигналу нелінійної СДС знаходимо аналітичну модель закону розподілу ординат цього сигналу із сімей розподілів Джонсона. Далі на основі перетворення Джонсона виконуємо нормалізацію випадкового сигналу. За реалізацією нормалізованого випадкового сигналу оцінюємо його спектральну щільність і апроксимуємо її дробово-раціональною функцією. Потім використовуючи метод формуючих фільтрів отримуємо СДР для нормалізованого сигналу.

Постановка задачі. Нехай задана реалізація випадкового сигналу $x(t)$ нелінійної СДС. Нехай емпіричний закон розподілу ординат $x(t)$ може бути апроксимований законом із сімей розподілів Джонсона. Потрібно побудувати СДР для нормалізованого випадкового сигналу $z(t)$ нелінійної СДС.

Рішення задачі. Випадковий сигнал $x(t)$ може бути перетворений у випадковий процес $z(t)$ з нормальним розподілом за допомогою перетворення Джонсона, яке в загальному випадку має вигляд [3]

$$z = \gamma + \eta h(x, \varphi, \lambda), \qquad (1)$$

де h – довільна функція; γ, η, λ, φ – параметри розподілу Джонсона, $-\infty < \gamma < \infty$, $\eta > 0$, $\lambda > 0$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Джонсон запропонував три різні сім'ї функцій h:

$$h(x, \varphi, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda}\right), \ x \ge \varphi \ \text{(сім'я } S_L\text{)};$$

$$h(x, \varphi, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda+\varphi-x}\right), \ \varphi \le x \le \varphi+\lambda \ \text{(сім'я } S_B\text{)};$$

$$h(x, \varphi, \lambda) = \operatorname{Arsh}(\bar{x}), \ -\infty \le x \le +\infty \ \text{(сім'я } S_U\text{)},$$

де $\bar{x} = (x-\varphi)/\lambda$; $\operatorname{Arsh}(\bar{x}) = \ln\left[\bar{x} + \sqrt{(\bar{x})^2+1}\right]$.

Для сім'ї S_L функція щільності ймовірності задається як

$$f_L(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x-\varphi)}\exp\left\{-\frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\gamma-\eta\ln\lambda}{\eta} + \ln(x-\varphi)\right]^2\right\}.$$

Для сім'ї S_B функція щільності ймовірності задається формулою

$$f_B(x) = \frac{\eta\lambda}{\sqrt{2\pi}(x-\varphi)(\lambda+\varphi-x)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta\ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda+\varphi-x}\right)\right]^2\right\}.$$

Функції щільності ймовірності сім'ї S_B можуть бути як унімодальними, так і бімодальними. Необхідні та достатні умови для бімодальності полягають у тому, що

$$\eta < 1/\sqrt{2}, \ |\gamma| < \eta^{-1}\sqrt{1-2\eta^2} - 2\eta \operatorname{Arth}\sqrt{1-2\eta^2}.$$

Для сім'ї S_U функція щільності ймовірності визначається як

$$f_U(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi\left\{(x-\varphi)^2+\lambda^2\right\}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \operatorname{Arsh}(\bar{x})\right]^2\right\}.$$

Сім'ї розподілів Джонсона відрізняються багатостатністю форм і у площині асиметрії у квадраті A^2 та ексцесу ε займають значні області. На рисунку 1 представлена діаграма Джонсона (області комбінацій A^2 і ε для різних розподілів Джонсона). Ця діаграма дозволяє підібрати сім'ю розподілів Джонсона за значеннями оцінок A^2 та ε вибіркового розподілу.

Практично завжди при підборі аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних асиметрія A та ексцес ε не бувають відомі. У цьому випадку вибір сім'ї розподілів Джонсона здійснюється за оцінками асиметрії A та ексцесу ε, які знаходяться за гістограмою. Після вибору необхідної сім'ї розподілів Джонсона обчислюють його параметри, і виконують перевірку адекватності обраної моделі експериментальним даним за критерієм згоди, наприклад, критерієм Пірсона (χ^2 - критерієм).

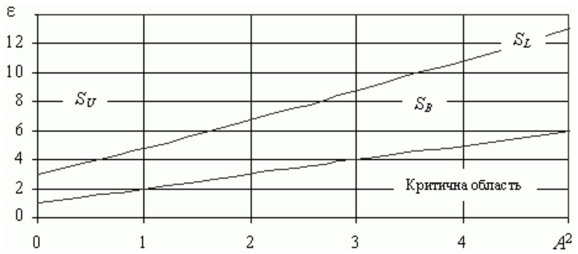

Рис. 1. Комбінації A^2 і ε для розподілів Джонсона

Параметри функції щільності ймовірності γ, η, λ та φ для обраної сім'ї розподілів Джонсона в загальному випадку можна знайти шляхом рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\theta = \arg\min_{\theta}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[y(x_j) - f(x_j, \theta)\right]^2\right\}, \qquad (2)$$

де θ – вектор невідомих параметрів, $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$; x_j – значення випадкової величини x в середині j-го підінтервалу; $y(x_j)$ – значення ординати гістограми при значенні x_j; $f(x_j, \theta)$ – вираз функції щільності ймовірності при значенні x_j; m – кількість підінтервалів гістограми. Зазначимо, що при використанні формули (2), у якості значення $y(x_j)$ потрібно брати відношення відносної частоти в j-му підінтервалі до довжини j-го підінтервалу Δx.

Після нормалізації $x(t)$ на основі перетворення Джонсона (1) за реалізацією сигналу $z(t)$ оцінюємо його спектральну щільність і апроксимуємо її дробово-раціональною функцією.

Зазначимо, що фактично задача побудови СДР для нормалізованих сигналів по вхідним і вихідним випадковим сигналам нелінійної СДС у випадку, коли СДР для випадкових сигналів не відомі, є задачею статистичної ідентифікації. А, як відомо, задача статистичної ідентифікації некоректна за Тихоновим [6]. Для її регуляризації, окрім методу О.М.Тихонова, може бути використано згладжування оцінки спектральної щільності кореляційними вікнами [7].

Згладжена оцінка $\widetilde{S}_z(\omega)$ спектральної щільності $S_z(\omega)$ отримується на основі оцінки $\widetilde{K}_z(\tau)$ кореляційної функції $K_z(\tau)$ із застосуванням кореляційних вікон $\lambda(\tau)$

$$\widetilde{S}_z(\omega_k) = \frac{\Delta t}{\pi}\left[2\sum_{j=1}^{M-1}\lambda(j\Delta t)\widetilde{K}_z(j\Delta t)\cos\left(\frac{jk\pi}{M}\right) + \lambda(0)\widetilde{K}_z(0)\right],$$

де $k = 1, 2, \ldots, M$; $\omega_k = (\pi k)/(M\Delta t)$; $j = 0, 1, \ldots, M$; $M = T_0/\Delta t$; T_0 – довжина кореляційного вікна; Δt – крок дискретизації за часом. Тут значення оцінки $\widetilde{K}_z(\tau)$ визначаються як:

$$\widetilde{K}_z(\tau) = \widetilde{K}_z(\Delta t \cdot j) = \frac{1}{M-j}\sum_{i=1}^{M-j}(z_i - \bar{z})(z_{i+j} - \bar{z}),$$

де $\bar{z}$ – вибіркове середнє $z(t)$.

Оцінку спектральної щільності апроксимуємо дробово-раціональною функцією.

Визначення 1. Гаусовський стаціонарний випадковий процес $\{\zeta(t),\ t \in R^1\}$ має дробово-раціональну спектральну щільність $S_\zeta(\omega)$ у разі, якщо

$$S_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|H(i\omega)|^2}{|F(i\omega)|^2}, \qquad (3)$$

де $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n = 1$, $H(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $m \le n-1$, причому корені багаточленів $F(x)$ і $H(x)$ лежать у лівій півплощині.

При виконанні зазначених вище припущень функція $S_\zeta(\omega)$ інтегруєма на R^1, тобто

$$D_\zeta = D\{\zeta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\zeta(\omega) d\omega < \infty .$$

Далі припускаємо, що $\{\zeta(t),\ t \in R^1\}$ – дійсний стаціонарний гаусовський випадковий процес з дробово-раціональною спектральною щільністю $S_\zeta(\omega)$ виду (3) і коваріаційною функцією

$$R_\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S_\zeta(\omega) d\omega .$$

Розглянемо систему з n лінійних СДР для випадкового процесу $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\}^T$, такого, що $z_1(t) = \zeta(t)$. Структура цієї системи описана в наступній теоремі [8].

Теорема [8]. Нехай $\mathbf{z}(t)$ задовольняє системі з n лінійних СДР

$$d\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)dt + \mathbf{B}dw(t),\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{v} . \qquad (4)$$

Тут $w(t)$ – скалярний стандартний вінеровський процес,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ q_{n-m} \\ q_{n-m+1} \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

$\{a_0, \ldots, a_{n=1}\}$ – коефіцієнти багаточлену $F(x)$, а параметри $\{q_{n-m}, \ldots, q_n\}$ визначаються за рекурентними формулами: $q_{n-m} = b_m$, $q_k = b_{n-k} - \sum_{i=n-m}^{k-1} a_{n-k+i} q_i$, $k = n-m+1, \ldots, n$, $\{b_0, \ldots, b_m\}$ – коефіцієнти багаточлену $H(x)$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{v}$ не залежить від $\{w(t), t \ge 0\}$ і має розподіл $N(0; R_\mathbf{v})$, де коваріаційна матриця $R_\mathbf{v}$ задовольняє системі алгебраїчних рівнянь $AR_\mathbf{v} + R_\mathbf{v}A^T + BB^T = 0$, то компонента $z_1(t)$ вектора $\mathbf{z}(t)$ є стаціонарним гаусовським центрованим випадковим процесом зі спектральною щільністю

$$S_{z_1}(\omega) = S_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|H(i\omega)|^2}{|F(i\omega)|^2} .$$

Визначення 2. Система СДР (4) називається формуючим фільтром для процесу $\zeta(t)$ з дробово-раціональною спектральною щільністю $S_\zeta(\omega)$ вигляду (3).

Використовуючи метод формуючих фільтрів для нормалізованого сигналу $z(t)$ отримуємо СДР (4).

Для прикладу розглянемо звуковий сигнал $x(t)$, який, як було показано в [3], може бути перетворений у випадковий процес $z(t)$ з нормальним розподілом за допомогою перетворення Джонсона із сім'ї S_U.

Оцінка спектральної щільності може бути апроксимована наступною дробово-раціональною функцією:

$$\tilde{S}_z(\omega) = \frac{D_z \alpha_z}{\pi} \frac{2b_z^2}{\omega^4 + 2\left(\alpha_z^2 - \beta_z^2\right)\omega^2 + b_z^4}, \qquad (5)$$

де D_z – дисперсія $z(t)$; $b_z^2 = \alpha_z^2 + \beta_z^2$; α_z і β_z – відповідно коефіцієнт загасання і середня частота кореляційної функції $z(t)$.

Використовуючи метод формуючих фільтрів для нормалізованого сигналу $z(t)$ зі спектральною щільністю (5) отримуємо СДР (4)

$$\ddot{z} + 2\alpha_z \dot{z} + b_z^2 z = 2b_z \sqrt{D_z \alpha_z}\, n(t), \qquad (6)$$

де $n(t)$ – білий шум.

На основі застосування перетворення Джонсона із сім'ї S_U та формули Іто за СДР (6) можна отримати СДР для звукового сигналу $x(t)$ [3]

$$\ddot{x} + 2\alpha_z \dot{x} + b_z^2 (\gamma + \eta\,\mathrm{Arsh}(\bar{x})) \frac{\lambda}{\eta}\left(\sqrt{1+\bar{x}^2}\right) - \frac{\dot{x}^2 \bar{x}}{\lambda\left(1+\bar{x}^2\right)} =$$

$$= 2b_z \frac{\lambda}{\eta} \sqrt{D_z \alpha_z \left(1+\bar{x}^2\right)}\, n(t). \qquad (7)$$

Наведений приклад показує можливість виконувати структурну ідентифікацію нелінійної СДС за СДР для нормалізованих сигналів на основі застосування перетворення Джонсона та формули Іто.

На основі застосування перетворення Джонсона із сім'ї S_U та формули Іто за СДР (7) можна отримати СДР (6) для нормалізованого звукового сигналу $z(t)$, що свідчить про працездатність запропонованого методу.

Висновки

Представлений в роботі метод побудови математичних моделей (СДР) нормалізованих випадкових сигналів нелінійних СДС у разі, коли СДР для випадкових сигналів не відомі, разом із запропонованим раніше методом побудови СДР для нормалізованих випадкових сигналів нелінійних СДС у разі, коли СДР для випадкових сигналів відомі, утворюють певну методологію побудови математичних моделей нормалізованих вхідних і вихідних випадкових сигналів нелінійних СДС на основі застосування перетворення Джонсона, формули Іто та