Оптимизация погашения задолженностей в условиях неполной информации

ШИШКАНОВА А.А.

Запорожский национальный технический университет

Разработаны алгоритмы нахождения оптимума в отдельности по критериям и для многокритериальной задачи в условиях нечеткой информации, учет которой производился рассмотрением состояний природы типа: банкротство предприятия, внезапное увеличение его долгов.

Розроблено алгоритми знаходження оптимуму по окремості за п'ятьма критеріями та для багатокритеріальної задачі в умовах нечіткої інформації, урахування якої виконувалося розгляданням станів природи типа: банкрутство підприємства, неочікуване зростання його заборгованостей.

The algorithms of a search for each of proposed criteria are developed. Multicriterion problem in conditions of the fuzzy information accounted by consideration of nature condition of two types (bankruptcy of the enterprise, sudden increase of its debts) are researched by the lexicographic method and rational choice of alternatives under fuzzy preference relation on criteria set.

Введение. Процесс принятия решений в условиях неопределенности является неотъемлемой составляющей многих современных экономических и финансовых задач.

В связи с тем, что современные руководители сталкиваются с неполной информацией, недостоверными или неопределенными факторами, необходимы постановка и пути решения экономических задач в условиях неопределенности.

В последнее время важной проблемой для многих предприятий являются погашение собственных задолженностей и получение долгов от других организаций. Сформулирована задача о погашении задолженностей в работе [1], предложен алгоритм направленного перебора с учетом экспертных оценок для одного предприятия в работе [2]. Однако, интересным остается оптимизация распределения задолженностей для коалиции предприятий или организаций с учетом многокритериальности различных интересов. Математическая теория подобных ситуаций развита недостаточно и большинство решений в этой сфере принимаются интуитивно, поэтому нужны формализация и решение такого рода задач математиками-специалистами.

Целью данной работы является оптимизация задолженностей для коалиции предприятий в условиях неопределенности.

Постановка задачи в многокритериальной форме. Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $G=\{S;U\}$. $S=\{S_1,S_2,...S_n\}$ – множество вершин графа, интерпретацией которых является множество предприятий, имеющих задолженности друг другу.

На множестве U дуг орграфа задан вектор весов T. Существование дуги $(S_i,S_j)\in U$ указывает на существование задолженности предприятия S_i предприятию S_j в размере $t_{ij}>0$. При этом считаем, что $t_{ii}=0$, то есть предприятие не имеет долгов само себе, и если $t_{ij}>0$, тогда $t_{ji}=0$, то есть орграф не имеет контуров длины 2 или, что взаимозадолженность между двумя предприятиями погашена.

Необходимо распределить задолженности среди данных объектов, чтобы максимально погасить долги при передаче некоторого числа единиц задолженности через m вершин по контуру.

Обозначим множество простых контуров орграфа G: $C=\{c\},|C|=l$.

Операцией погашения контура будем называть операцию, которая заключается в вычитании из всех весов дуг этого контура минимального веса в контуре и исключением дуг, веса которых стали равными нулю.

Допустимым решением данной задачи будем называть упорядоченное множество операций погашения, в результате которых остается орграф без контуров. Каждому допустимому решению ставится в соответствие финальная матрица x оставшихся задолженностей t^*_{ij}, полученная в результате последовательности операций погашения: $x=\|t^*_{ij}\|$.

На множестве допустимых решений A задана векторная целевая функция

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_5(x)),$$

состоящая из критериев вида:

1). В целях сотрудничества с большим количеством предприятий, для привлечения нового капитала в сферу своего бизнеса необходим поиск контуров погашения задолженностей с наибольшим числом объектов:

$$f_1(x)=\sum_{i=0}^{l^*} m_i \to \max, \quad \text{при } l^*\to \min,$$

где l^* - количество погашенных циклов, $l^*\le l$.

2). Сумма погашенных задолженностей должна быть максимальна:

$$f_2(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(t_{ij}-t^*_{ij})\to \max, \quad x\in A;$$

3). Задолженности должны быть погашены равномерно:

$$f_3(x)=\max|(t_{ij}-t^*_{ij})-(t_{kp}-t^*_{kp})|\to \min; \quad i,j,k,p\in(1,n).$$

4). Количество предприятий, погасивших в какой-то мере свои долги, должно быть максимально:

$$f_4(x)=|S''|\to \max; \ S''=\{s_{ij}\mid s_{ij}\in S,(t_{ij}-t^*_{ij})>0\}.$$

5). Остаток долга должен быть распределен равномерно:

$$f_5(x) = \max|t^*_{ij} - t^*_{kp}| \mapsto \min.$$

Контур считаем погашенным полностью, если в результате одной операции погашения из каждого веса дуги, образующей данный контур, был вычтен минимальный по исходному контуру вес.

Утверждение 1. Очередность погашения среди контуров, погашенных полностью, не влияет на величины критериев.

Для краткости изложения, доказательство утверждения 1 опустим.

Очевидно, что прежде, чем искать решение задачи, необходимо иметь множество всех простых контуров орграфа, для нахождения которых предлагается схема перебора, использующая технику возвращения, аналогичную предложенной в алгоритме Робертса и Флореса [3] для нахождения гамильтоновых циклов.

Основной материал исследования и методика решения задачи.

1. Алгоритм решения двухкритериальной задачи. Рассмотрим двухкритериальную задачу с векторной целевой функцией, состоящей из критериев f_1 и f_2.

Алгоритм достижения максимума по критерию f_1 будет заключаться в упорядочении и погашении контуров в порядке не возрастания их длин.

Утверждение 2. Описанный алгоритм для достижения оптимума по критерию f_1, также приводит к оптимуму по критерию f_2.

Докажем утверждение 2. Для этого рассмотрим некоторый контур $c_i \in C, (i \in (1,l))$ орграфа G, длиной m_i. Пусть $\exists c_j \in C, (j \in (1,l))$, длиной $m_j < m_i$, и хотя бы одна дуга (S_k, S_p) с весом t_{kp} является общей для контуров: $(S_k, S_p) \in c_i \cap c_j,\ k, p \in (1,n),\ i, j \in (1,l)$.

Очевидно, если контуры не имеют общих дуг, то очередность их погашения не влияет на величину критерия f_2.

Если общих дуг больше одной, то в рассмотрении участвует минимальная по весу:

$$t_{kp} = \min\{t_{ab} \mid \forall t_{ab} \in c_i \cap c_j\},\ a, b \in (1,n)\ .$$

Пусть t_i – минимальная задолженность в контуре c_i, а t_j – в контуре c_j. Очевидно, что $t_i, t_j \le t_{kp}$.

Возможны два варианта очередности погашения этих контуров.

I. Первым гасится контур c_i, тогда сумма погашенных задолженностей

$$T_{c_i} = t_i m_i\ .$$

Затем приступаем к погашению контура c_j. Минимальная задолженность в c_j станет

$$t_{\min c_j} = \min(t_j, t_{kp} - t_i)\ .$$

Сумма погашенных задолженностей в контуре

$$T_{c_j} = t_{\min c_j} m_j\ .$$

Общая сумма погашения задолженностей в результате погашения контуров c_i, c_j

$$f_{2\mathrm{I}} = t_i m_i + \min(t_j, t_{kp} - t_i) \cdot m_j\ .$$

II. Первым гасится контур c_j.

Повторяя предыдущие рассуждения с заменой индексов i на j и наоборот, получаем:

$$f_{2\mathrm{II}} = t_j m_j + \min(t_i, t_{kp} - t_j) \cdot m_i\ .$$

При $f_{2\mathrm{I}} \le f_{2\mathrm{II}}$ утверждение 2 будет справедливо.

Сравним полученные общие суммы погашенных задолженностей $f_{2\mathrm{I}}, f_{2\mathrm{II}}$. Возможно два варианта:

1). $t_j \le t_{kp} - t_i$;
$f_{2\mathrm{I}} = f_{2\mathrm{II}} = t_i m_i + t_j m_j$

- оба контура гасятся полностью, и очередность их погашения не влияет на сумму погашенных задолженностей;

2) $t_j > t_{kp} - t_i$;
$f_{2\mathrm{I}} = t_i m_i + (t_{kp} - t_i) m_j$,
$f_{2\mathrm{II}} = t_j m_j + (t_{kp} - t_j) m_i \Rightarrow$

$f_{2\mathrm{I}} < f_{2\mathrm{II}}$, (так как $t_{kp} < t_i + t_j$).

Следовательно, утверждение 2 верно.

При одинаковой длине контуров вначале погашаем тот, который смежный с контуром наибольшей длины.

Следствие утверждения 2. При выборе очередности погашения контуров для достижения критерия f_2 важно учитывать только длину контуров, а величины весов, хотя они явно присутствуют в записи критерия f_2, не оказывают влияние на выбор очередности циклов погашения для достижения критерия f_2.

2. Алгоритм решения задачи для третьего критерия. Пусть C_I - это блок графа $G, \forall c_{\mathrm{I}i}, c_{\mathrm{I}j} \in C_\mathrm{I}$.

$$c_{\mathrm{I}i} \cap c_{\mathrm{I}j} \ne \varnothing \text{ и } \exists (S_k, S_p) \in c_{\mathrm{I}i} \cap c_{\mathrm{I}j},$$
$$i, j \in (1, n_\mathrm{I}), |C_\mathrm{I}| = n_\mathrm{I}$$

где (S_k, S_p) - это общая дуга для всех контуров из C_I. Ее вес t_{kp} является минимальным весом из всех дуг, принадлежащих нескольким контурам из C_I.

Упорядочим контуры C_I в порядке не возрастания их минимальных весов

$$t_{\min i} : t_{\min 1} \ge t_{\min 2} \ge \ldots \ge t_{\min n_\mathrm{I}}\ .$$

Если $\sum_{i=1}^{n_\mathrm{I}} t_{\min i} \le t_{kp}$, тогда погашение может быть произведено в любом порядке в C_I, так как все контуры погашены полностью.

Если $\sum_{i=1}^{n_\mathrm{I}} t_{\min i} > t_{kp}$, тогда $t'_{\min 1} = t_{kp} / n_\mathrm{I}$. Когда $t_{\min 1} \ge t'_{\min 1}$, контур $c_{\mathrm{I}1}$ погашается на величину $t'_{\min 1}$ и $t_{kp} = t_{kp} - t'_{\min 1}$. В случае когда $t_{\min 1} < t'_{\min 1}$, контур $c_{\mathrm{I}1}$ погашается на величину $t_{\min 1}$ полностью $t_{kp} = t_{kp} - t_{\min 1}$. После этого выбираем следующий контур $t'_{\min 1} = t_{kp} / (n_\mathrm{I} - (i-1))$.

Алгоритм продолжается до тех пор пока не рассмотрены все контуры или пока $t_{kp} > 0$.

Этот алгоритм применим только к графу, состоящему из блоков с дугой (S_k, S_p).

3. Алгоритм решения задачи для четвертого критерия. Упорядочим контуры по не возрастанию длины, после чего произведем их погашение в этом порядке на условную величину долга в каждом контуре.

Затем погашение может быть произведено в произвольном порядке, так как это не повлияет на величину критерия f_4.

4. Алгоритм решения задачи для пятого критерия. Упорядочим контуры C_1 по величине значения

$$t^*_{ai} : t^*_{a1} \geq t^*_{a2} \geq t^*_{a3} \geq \ldots \geq t^*_{an_1}.$$

Пусть A_{Rij} - разница между максимальными не погашенными задолженностями в контурах c_{1i}, c_{1j}

$$A_{Rij} = t^*_{ai} - t^*_{aj}, (i < j; i, j \in (1, n_1)).$$

Если

$$t_{kp} \leq A_{Rij} \Rightarrow t_{kp} = t_{kp} - t_{\min i},$$

то контур c_{1i} погашается полностью и исключается из дальнейшего рассмотрения.

В случае

$$t_{kp} > A_{Rij} \Rightarrow t'_{\min i} = t_{kp} - A_{Rij}$$

возможны два варианта:

1) $t_{\min i} > t'_{\min i}$, контур c_{1i} погашается на величину $t'_{\min i}, t_{kp} = t_{kp} - t'_{\min i}$;

2) $t_{\min i} \leq t'_{\min i}$, контур c_{1i} погашается полностью и исключается из дальнейшего рассмотрения $t_{kp} = t_{kp} - t_{\min i}$.

Алгоритм повторяется для всех $j \in (2, l)$ и всех $i \in (1, l)$ (каждого j), пока $t_{kp} > 0$.

В том случае, если $j = l$ и $i = l - 1$ и после этого все еще $t_{kp} > 0$, тогда нужно применить алгоритм для критерия f_3.

5. Алгоритм решения многокритериальной задачи в условиях неопределенности. Любое предприятие может увеличить свои задолженности в связи с выпуском новой продукции. В связи с тем, что точно предсказать увеличение долгов в какой-либо момент времени затруднительно, будем учитывать возможность такой ситуации как состояние природы.

В качестве состояния природы возможна ситуация, когда какое-то из предприятий множества S обанкротилось, в результате чего разорвались все контуры, содержащие данное предприятие. В данной работе ограничимся рассмотрением $n+1$ состояний природы: когда только одно предприятие S_i увеличило свои долги в "k" раз, для $\forall S_i \in G, i \in (1, n)$, и когда ни одно предприятие не увеличило свои долги (исходная ситуация).

Множество допустимых решений в дальнейшем будем называть множеством альтернатив A. Множество состояний будем обозначать P. Для решения данной задачи применим модифицированный метод при нечеткой информации многокритериального выбора [4] - лексикографический.

Предположим, что критерии упорядочены по важности, например, $f_1 > f_2 > f_3 > f_4 > f_5$. Суть метода заключается в выделении сначала множества альтернатив с наилучшей оценкой по наиболее важному критерию. Для этого построены алгоритмы решения для каждого критерия в отдельности, которые здесь опущены для краткости изложения. Если альтернатива с наилучшей оценкой единственная, то она считается наилучшей, если их несколько, то из их подмножества выделяются те, которые имеют лучшую оценку по второму критерию, и так далее.

Вычислим оценки F_{ij} альтернатив $j = 1, J$ по критериям f_i $i = 1, I$ (в данном случае $I = 5$) и функцию принадлежности отношения нечеткого предпочтения, когда критерий стремится к минимуму

$$\mu_{F_{ij}}(x) = \frac{F_{ij}}{\inf\limits_j F_{ij}}; \quad F_{ij} = \frac{1}{f_{ij}},$$

где f_{ij} - величины критериев, или если критерий стремится к максимуму, то

$$\mu_{F_{ij}}(x) = \frac{F_{ij}}{\sup\limits_j F_{ij}}; \quad F_{ij} = f_{ij}.$$

Согласно утверждению 2 оптимум критерия f_1 совпадает с оптимумом f_2 и не зависит от изменения величины задолженностей, то есть состояние природы не оказывает влияние на множество недоминируемых альтернатив. Тогда, если эти критерии стоят первыми по важности, мы можем, используя изложенный выше алгоритм, найти оптимальные значения критериев f_1, f_2 и, первоначально погасив все полностью погашаемые контуры по алгоритму для двухкритериальной задачи, согласно утверждению 1, найти все множество недоминируемых альтернатив перестановками контуров, погашенных не полностью, имеющих равную длину и их сочетаниями. Это значительно сократит время по-сравнению с полным перебором всех альтернатив.

Начиная со следующего по важности критерия f_3 предлагается действовать согласно лексикографическому методу [4].

Результаты численного исследования. Составлены программы алгоритмов на языке С++, с помощью которых произведены численные исследования для конкретных примеров.

Рассмотрим в качестве примера задачу о погашении задолженностей группы предприятий, условно представленной в виде орграфа, приведенного на рис.1.

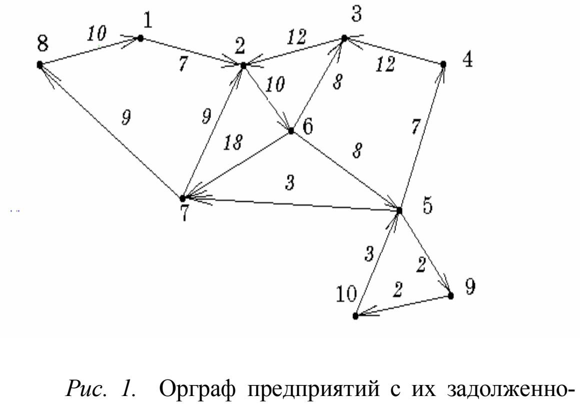

Рис. 1. Орграф предприятий с их задолженностями

Рост долгов считаем возможным в 2 раза.

В результате применения предложенного метода подобного методу Робертса-Флореса, получены все простые контуры орграфа, которые приведены в таблице 1. В результате алгоритма нахождения оптимума критериев f_1, f_2 получаем очередность погашения контуров: 4 2 7 3 1 5 6.

Таблица 1

№	Номера вершин, образующих контур
1	2 6 3 2
2	2 6 5 4 3 2
3	2 6 5 7 2
4	1 2 6 5 7 8 1
5	5 9 10 5
6	2 6 7 2
7	1 2 6 7 8 1

Множество недоминируемых альтернатив по критериям f_1, f_2 получаем, первоначально погасив все полностью погашаемые контуры 4 и 5, перестановками контуров, погашенных не полностью, имеющих равную длину и их сочетаниями (таблица 2).

Таблица 2

№	Очередность погашения контуров
1	4 5 7 2 3 6 1
2	4 5 2 7 3 6 1
3	4 5 7 2 3 1 6
4	4 5 2 7 3 1 6

Начиная со следующего по важности критерия f_3, действуя согласно лексикографическому методу получаем лучшую альтернативу 1 из таблицы 2 по всем, критериям.

Значения критериев будут следующие

$$f_1=19,\ f_2=59,\ f_3=10,\ f_4=10,\ f_5=14.$$

Выводы

Многокритериальная математическая модель задачи об оптимизации погашения задолженностей для коалиции предприятий сформулирована в терминах теории графов.

Разработаны алгоритмы нахождения оптимума в отдельности по пяти критериям и для многокритериальной задачи в условиях нечеткой информации, учет которой производился рассмотрением состояний природы типа: банкротство предприятия, внезапное увеличение его долгов.

Метод решения основан на лексикографическом методе и рациональном выборе альтернатив нечеткого предпочтения на множестве критериев.

Предлагаемые подходы могут быть применены в реальной сети предприятий. Составлены программы алгоритмов решения задачи на языке C++.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакурова Г.В., Попович Т.А, Шишканова Г.А., Про різні моделі скасування одиниць заборгованості //Матеріали VI міжнародної конф. ім. М. Кравчука. – Київ, 1997. – С.23
2. Шишканова А.А. Актуальные задачи финансового менеджмента в условиях неопределенности //Тр. III межд. конф. по устойчивому развитию "Проблемы индустриальных регионов: менеджмент и экология". – Запорожье. – 1998. – С. 165–172.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.- Мир. – 1978.- 432 с.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. Учеб. пособие - К. – Вища школа. – 1991. – 191 с.

пост. 11.11.08