Об одном методе построения несепарабельных всплесков

*В.Ф. БАБЕНКО *,**, А.А. ЛИГУН ***,**, А.А. ШУМЕЙКО ****

*Днепропетровский национальный университет,
**Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
***Днепродзержинский технический университет

Предложен метод построения ортогонального несепарабельного вейвлет-базиса для цифровой обработки сигналов двух переменных.

Запропоновано метод побудови ортогонального несепарабельного вейвлет-базису для цифрової обробки двовимірних сигналів.

The method of construction of orthogonal wavelet basis for digital processing of two-dimensional signals is offered.

Через $L_2(R^2)$ будем обозначать гильбертово пространство функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \int_{R^2} | f(x,y)|^2 \, dxdy,$$

порожденное скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{R^2} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy.$$

Определение 1. Кратномасштабный анализ (КМА) в $L_2(R^2)$ это последовательность замкнутых подпространств

$$\ldots \subset \mathbf{V}^{-1} \subset \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{V}^1 \subset \ldots$$

для которых выполняются условия

1. $\overline{\bigcup_{j\in Z} \mathbf{V}^j} = L_2(R^2)$;
2. $\bigcap_{j\in Z} \mathbf{V}^j = \{0\}$;
3. $f(x,y) \in \mathbf{V}^j \Longleftrightarrow f(2\cdot, 2\cdot\cdot) \in \mathbf{V}^{j+1}$;
4. найдется такая функция $\varphi \in \mathbf{V}^0$ (масштабирующая функция), что множество ее сдвигов $\varphi(x-n, y-m)$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(R^2)$.

Наиболее простой способ построения многомерного КМА конструируется как тензорное произведение одномерных ([1],[2]). Такие КМА называются сепарабельными, общий случай КМА, не распадающийся в тензорное произведение, называется несепарабельным.

Пусть последовательность замкнутых подпространств $\ldots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \ldots$ образует (КМА) в $L_2(R^1)$ и $\mathbf{V}^j$ есть тензорное произведение пространства V^j само на себя, то есть

$$\mathbf{V}^j = V^j \otimes V^j = \mathrm{Span}\{f(x)g(y) \mid f, g \in V^j\}.$$

Здесь $\mathrm{Span}\{S\}$ есть линейная оболочка множества S.

Опишем один из наиболее популярных методов построения сепарабельных всплесков. Этот метод был предложен S.Mallat и называется схемой Мала ([3]).

В качестве базиса пространства $\mathbf{V}^0$ возьмем совокупность функций $\varphi(x-n)\varphi(y-m)$. Таким образом в этом пространстве базис порожден функцией $\varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$, а в качестве функций порождающих базис ортогонального дополнения $\mathbf{W}^0$ можно взять функции $\psi_1(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, $\psi_2(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$, $\psi_3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$.

Несмотря на простоту реализации КМА образованного тензорным произведением базиса всплесков, безусловно для обработки двумерных данных более эффективным является использование существенно двумерных, то есть несепарабельных всплесков ([4],[5]). Дальнейшие рассуждения посвящены построению одной конструкции несепарабельного базиса всплесков.

Построение несепарабельных зеркально-квадратурных всплесков. Пусть для функций $\varphi \in \mathbf{V}^0$ имеет место масштабирующее свойство

$$\varphi(x,y) = \varphi^0(x,y) = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x - \frac{\nu}{2}, y - \frac{\mu}{2}\right). \quad (1)$$

Преобразование Фурье соотношения (1) можно записать в виде

$$\hat{\varphi}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu} \exp\left(-\frac{i}{2}(\nu\omega_1 + \mu\omega_2)\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2) =$$

$$= m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2).$$

При этом в силу равенства Парсеваля имеет место тождество

$$1 = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} |\hat{\varphi}(\omega_1 + 2\pi\nu, \omega_2 + 2\pi\mu)|^2 =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} \left| m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2} + \pi\nu, \frac{\omega_2}{2} + \pi\mu\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}^1(\omega_1 + 2\pi\nu, \omega_2 + 2\pi\mu,)\right|^2 =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} \left(\left| m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2} + 2\pi\nu, \frac{\omega_2}{2} + 2\pi\mu\right)\right|^2 + \right.$$

$$+ \left| m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2} + 2\pi\nu, \frac{\omega_2}{2} + \pi(2\mu+1)\right)\right|^2 +$$

$$+ \left| m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2} + \pi(2\nu+1), \frac{\omega_2}{2} + 2\pi\mu\right)\right|^2 +$$

$$\left. + \left| m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2} + \pi(2\nu+1), \frac{\omega_2}{2} + \pi(2\mu+1)\right)\right|^2 \right) \times$$

$$\times \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} |\hat{\varphi}^1(\omega_1 + 2\pi\nu, \omega_2 + 2\pi\mu)|^2,$$

что влечет выполнение почти всюду соотношения

$$\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\right|^2+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\pi\right)\right|^2+$$

$$+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}\pi,\frac{\omega_2}{2}\right)\right|^2+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right|^2=1.$$

Тогда для $f\in\mathbf{V}^1$ выполняется соотношение

$$f(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} f_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right)$$

и для соответствующего преобразования Фурье выполняется соотношение

$$\hat f(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} f_{\nu,\mu}\exp\left(-i\frac{\nu\omega_1+\mu\omega_2}{2}\right)\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=m_f\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2).$$

Из того, что $f\perp\mathbf{V}^0$, то есть $f\perp\overline{\varphi}(x-k)\quad\forall k\in Z^2$ или что то же

$$0=\int_{R^2} f(x,y)\overline{\varphi}(x-n,y-m)dxdy=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\hat f(\omega)\overline{\hat\varphi}(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i(n\omega_1+m\omega_2)\right)d\omega_1 d\omega_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(i(n\omega_1+m\omega_2)\right)\times$$

$$\times\sum_{(\nu,\mu\in Z^2)}\hat f(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\overline{\hat\varphi}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)d\omega_1 d\omega_2.$$

Таким образом имеем

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}\hat f(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\overline{\hat\varphi}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)=0$$

и

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\hat\varphi^1(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\times$$

$$\times\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\overline{\hat\varphi}^1(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\times$$

$$\times\left|\hat\varphi^1(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\right|^2=0.$$

Следовательно,

$$m_f\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)+$$

$$+m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}\right)+$$

$$+m_f\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)+$$

$$+m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)=0.$$

Положим

$$m_{\psi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)=\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}\right)=$$

$$=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right),(1,0)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$m_{\psi^2}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}+\pi\right),(1,1)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}+\pi\right),$$

$$m_{\psi^3}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)=$$

$$=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}+\pi\right),(0,1)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}+\pi\right).$$

Всплесками назовем функции, у которых преобразования Фурье имеют вид

$$\hat\psi^i(\omega_1,\omega_2)=m_{\psi^i}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)$$

или, что то же

$$\hat\psi^1(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2)} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\right)+\mu\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

$$\hat\psi^2(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+i\pi\right)\times$$

$$\times\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\frac{\omega_1}{2}+\mu\left(\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right)\right),$$

$$\hat\psi^3(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_2}{2}+i\pi\right)\times$$

$$\times\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\right)+\mu\left(\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right)\right).$$

Перепишем эти соотношения в виде

$$\hat\psi^1(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1\nu}{2}+\pi\nu+\frac{\omega_2\mu}{2}\right)\right)=$$

$$=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu}h_{\nu.\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1(\nu+1)}{2}+\frac{\omega_2\mu}{2}\right)\right),$$

$$\hat\psi^2(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu+1}h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1(\nu+1)}{2}+\frac{\omega_2(\mu+1)}{2}\right)\right),$$

$$\hat\psi^3(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu+1}h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1\nu}{2}+\frac{\omega_2(\mu+1)}{2}\right)\right).$$

В первом из этих соотношении сделаем замену, полагая $\nu+1=\nu$ получаем

$$\hat\psi^1(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1}h_{\nu-1,\mu}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right),$$

полагая во втором $\nu_1+1=\nu_1$ и $\mu+1=\mu$ получаем

$$\hat\psi^2(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu}h_{\nu-1,\mu-1}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right),$$

и, наконец, полагая в последнем $\mu+1=\mu$ приходим к соотношению

$$\hat\psi^3(\omega_1,\omega_2)=\hat\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu}h_{\nu_1,\mu_2-1}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right).$$

Отсюда сразу получаем

$$\psi^1(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu}h_{\nu-1,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right),\qquad(2)$$

$$\psi^2(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu}h_{\nu,1-\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right), \quad (3)$$

$$\psi^3(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu}h_{\nu-1,1-\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right), \quad (4)$$

и $$\varphi(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right). \quad (5)$$

Опишем алгоритм декомпозиции и реконструкции для такого рода всплесков.
Пусть известны числа

$$c^1_{\nu,\mu}=\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle,(\nu,\mu)\in Z^2.$$

Отсюда и из (5) сразу получаем

$$c^0_{n,m}=\langle f,\varphi(\cdot-n,\cdot-m)\rangle=$$

$$=\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(\cdot-n-\frac{\nu}{2},\cdot-m-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-n-\frac{\nu}{2},\cdot-m-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{2n+\nu}{2},\cdot-\frac{2m+\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}c^1_{2n+\nu,2m+\mu}.$$

Отсюда сразу получаем

$$c^0_{n,m}=\langle f,\varphi(\cdot-n,\cdot-m)\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu-2n,\mu-2m}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu-2n,\mu-2m}c^1_{\nu,\mu}.$$

Проведем аналогичные построения для ψ^i $(i=1,2,3)$,

$$d^{0,1}_{n,m}=\left\langle f,\psi^1(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$=\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1}h_{\nu-1,\mu}\varphi^1\left(\cdot-n+\frac{\nu}{2},\cdot-n+\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1}h_{\nu-1,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-n+\frac{\nu}{2},\cdot-m+\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1}h_{\nu-1,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{2n-\nu}{2},\cdot-\frac{2m-\mu}{2}\right)\right\rangle.$$

Используя в последнем соотношении замену переменных, приходим к равенству

$$d^{0,1}_{n,m}=\left\langle f,\psi^1(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2n-\nu-1}h_{2n-\nu-1,2m-\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2n-\nu-1}h_{2n-\nu-1,2m-\mu}c^1_{\nu,\mu}.$$

Далее,

$$d^{0,2}_{n,m}=\left\langle f,\psi^2(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu}h_{\nu-1,\mu-1)}\varphi^1\left(\cdot-n+\frac{\nu}{2},\cdot-m+\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu}h_{\nu-1,\mu-1}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{2n-\nu}{2},\cdot-\frac{2m-\mu}{2}\right)\right\rangle.$$

Отсюда получаем равенство

$$d^{0,2}_{n,m}=\left\langle f,\psi^2(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2m-\mu}h_{2n-\nu-1,2m-\mu-1}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2m-\mu}h_{2n-\nu-1,2m-\mu-1}c^1_{\nu,\mu}$$

и, наконец,

$$d^{0,3}_{n,m}=\left\langle f,\psi^3(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu}h_{\nu,\mu-1}\varphi^1\left(\cdot-n+\frac{\nu}{2},\cdot-m+\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu}h_{\nu,\mu-1}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{2n-\nu}{2},\cdot-\frac{2m-\mu}{2}\right)\right\rangle.$$

и, следовательно,

$$d^{0,3}_{n,m}=\left\langle f,\psi^3(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2m-\mu}h_{2n-\nu,2m-\mu-1}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{2m-\mu}h_{2n-\nu,2m-\mu-1}c^1_{\nu,\mu}.$$

По полученному набору чисел

$$\left\{c^0_{\nu,\mu},d^{0,1}_{\nu,\mu},d^{0,2}_{\nu,\mu},d^{0,3}_{\nu,\mu}\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}=$$

$$=\left\{\langle f,\varphi(\cdot-n,\cdot-m)\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2},\left\{\left\langle f,\psi^k(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}$$

$(k=1,2,3)$

однозначно восстанавливается набор

$$\left\{c^1_{\nu,\mu}\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}=\left\{\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}.$$

Для этого достаточно воспользоваться равенством

$$c^1_{\nu,\mu}=\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\sum_{(n,m)\in Z^2}\langle f,\varphi(\cdot-n,\cdot-m)\rangle\varphi(\cdot-n,\cdot-m)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{3}\sum_{(n,m)\in Z^2}\left\langle f,\psi^j(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle\psi^j(\cdot-n,\cdot-m),\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(n,m)\in Z^2}\langle f,\varphi(\cdot-n,\cdot-m)\rangle\left\langle\varphi(\cdot-n,\cdot-m),\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{(n,m)\in Z^2}\left\langle f,\psi^j(\cdot-n,\cdot-m)\right\rangle\left\langle\psi^j(\cdot-n,\cdot-m),\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle.$$

Для построения несепарабельных всплесков необходимо иметь множество двумерных масштабирующих функций. Опишем одну конструкцию построения масштабирующих функций двух переменных.

Конструкция двумерного subdivision. Через ℓ^2_∞ обозначим линейное пространство всех ограниченных двумерных массивов

$$\tilde{F}=\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{(i,j)\in\mathrm{Z}^2}=\{\tilde{f}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathrm{Z}^2}$$

с нормой

$$\|\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty}=\sup_{(i,j)\in\mathrm{Z}^2}|\tilde{f}_{i,j}|.$$

Пусть Δ^0 есть разбиение плоскости на квадраты $\Delta^0_{i,j}$ ($i,j\in\mathrm{Z}$) с шагом h и вершинами в точках $\{M_{i,j}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}=\{(x_{i,0},y_{j,0})\}_{i,j\in\mathrm{Z}}=\{(ih,jh)\}_{i,j\in\mathrm{Z}}$. Каждому значению двумерного массива $\tilde{F}^0=\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}$ поставим в соответствие элемент $\Delta^0_{i,j}$ из разбиения Δ^0.

Зададим на множестве ограниченных массивов $\tilde{F}^0$ линейный функционал $B(\tilde{F}^0)=\sum a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}$ и положим

$$B^{++}(\tilde{F}^0)=B(\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}),$$

$$B^{--}(\tilde{F}^0)=B(\{\tilde{f}_{-i,-j,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}),$$

$$B^{-+}(\tilde{F}^0)=B(\{\tilde{f}_{-i,j,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}),$$

$$B^{+-}(\tilde{F}^0)=B(\{\tilde{f}_{i,-j,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}).$$

Определим точки $M_{i-1/2,j,0},M_{i,j-1/2,0},M_{i-1/2,j-1/2,0}$ равенствами

$$M_{i-1/2,j,0}=\frac{1}{2}(M_{i,j}+M_{i-1,j}),$$

$$M_{i,j-1/2,0}=\frac{1}{2}(M_{i,j}+M_{i,j-1}),$$

$$M_{i-1/2,j-1/2,0}=\frac{1}{4}(M_{i,j-1}+M_{i-1,j}+M_{i,j}+M_{i-1,j-1}).$$

Через $\tilde{F}^0_{\nu,\mu}=\{\tilde{f}_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}$ обозначим сдвиг массива $\tilde{F}^0$. Определим новую решетку Δ^{k+1} и новый массив $\tilde{F}^{k+1}=\{\tilde{f}_{i,j,k+1}\}_{i,j\in\mathrm{Z}}$ равенствами

$$M_{2i,2j,k}=M_{i,j,k-1},\quad \tilde{f}_{2i,2j,k}=B^{++}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),$$

$$M_{2i-1,2j,k}=M_{i-1/2,j,k-1},\quad \tilde{f}_{2i-1,2j,k}=B^{-+}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),$$

$$M_{2i,2j-1,k}=M_{i,j-1/2,k-1},\quad \tilde{f}_{2i,2j-1,k}=B^{+-}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),$$

$$M_{2i-1,2j-1,k}=M_{i-1/2,j-1/2,k-1},\ \tilde{f}_{2i-1,2j-1,k}=B^{--}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}).$$

Для фиксированных $(i,j)\in\mathrm{Z}^2$ соединим точки $M_{i-1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j-1,k}$, $M_{i-1,j-1,k}$ с центром $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ соответствующего квадрата. Таким образом получим триангуляцию плоскости на равнобедренные прямоугольные треугольники. Непрерывную на всей плоскости функцию двух переменных назовем k-полигоном, если она на каждом из этих треугольников совпадает с некоторой плоскостью.

Через $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ обозначим k-полигон интерполирующий в узлах $M_{i,j,k},i,j\in\mathrm{Z}$, $k\in\mathrm{N}$ значения $\frac{1}{4}(\tilde{f}_{i,j,k}+\tilde{f}_{i-1,j,k}+\tilde{f}_{i,j-1,k}+\tilde{f}_{i-1,j-1,k})$, а в точках $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ принимающий значения $\tilde{f}_{i,j,k}$.

Если поточечный предел последовательности $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ при $k\to\infty$ существует, то будем обозначать его через $\psi_h(B,\tilde{F},x,y)$. Для конкретных апертур задача сходимости метода восстановление, определения гарантированных оценок уклонения и подобное, исследовалась, например, в работе [1].

В дальнейшем мы будем рассматривать только те операторы B, при которых функция $\psi_h(B,\tilde{F},x,y)$ существует и единственна.

В случае, когда задана функция $f\in C(\mathrm{R}^2)$ и значения $\tilde{f}_{i,j,0}$ определены равенствами

$$\tilde{f}_{i,j,0}=\frac{1}{h^2}\int_{(i-1)h}^{ih}\int_{(j-1)h}^{jh}f(x,y)\,dx\,dy,$$

вместо $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ будем писать $\psi_{k,h}(B,f,x,y)$.

Из построения оператора $\psi_{k,h}(B,\tilde{F})$ следует, что для любых $k,\nu=0,1,2,...$ имеют место равенства

$$\psi_{k,h2^{-\nu}}(B,\tilde{F}^\nu,x,y)=\psi_{k,h2^{-\nu}}(B,\psi_{\nu,h}(\tilde{F}),x,y)=$$
$$=\psi_{k+\nu,h}(B,\tilde{F},x,y). \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\psi_{h2^{-\nu}}(B,\tilde{F}^\nu,x,y)=\psi_h(B,\tilde{F},x,y).$$

Из построения функции $\psi_h(B,\tilde{F},x,y)$ ясно, что

$$\psi_h(B,\tilde{F},x,y)=\psi_{h/2^k}(\psi_h(B,\tilde{F}),x,y). \tag{7}$$

Кроме того

$$\psi_h(B,\tilde{F}_{\nu,\mu},x,y)=\psi_h(B,\tilde{F},x-\nu h,y-\mu h)$$

и

$$\psi_h\left(B,\tilde{F},x,y\right)=\psi_H\left(B,\tilde{F},\frac{H}{h}x,\frac{H}{h}y\right).$$

Приведем один из методов построения функционала B. Набор из n пар индексов $(i,j)\in\mathrm{Z}^2$, содержащих (0,0) назовем апертурой порядка n и будем обозначать A^n. Объединение квадратов со сторонами параллельными координатным осям и равными единице с левым нижним углом (i,j) ($(i,j)\in A^n$) назовем геометрической апертурой и обозначим A^n. Каждый набор B чисел $a_{i,j}$ ($(i,j)\in A^n$) определяет функционал

$$B(A^n,B,\tilde{F}^0)=\sum_{(i,j)\in A^n}a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}.$$

Приведем одну из возможных конструкций выбора коэффициентов $a_{i,j}$.

Зафиксируем набор тестовых функций $L^m=\{\ell^0,...,\ell^m\}$ и коэффициенты $a_{i,j}$ будем искать из условия выполнения равенства

$$B(A^n,B,\tilde{\ell}^k)=\frac{4}{h^2}\int_{h/2}^{h}\int_{h/2}^{h}\ell^k(x,y)\,dx\,dy\quad (k=0,...,m). \tag{8}$$

Если эта система совместна, то решая ее, получаем конкретный функционал расслоения $B(A^n(L^m),\tilde{F}^0)$. Апертуру $A^n(L^m)$ в этом случае будем называть апертурой точной на множестве $L^m=\{\ell^0,...,\ell^m\}$. Если равенство (8) выполняется для всех маномов $x^\nu y^\mu$ таких, что $\nu+\mu\le m+1$, то множество всех таких пар (ν,μ) обозначим через $P(A^n,B)$. Множество всех пар (ν,μ) таких, что $\nu+\mu=m+1$, для которых равенство (8) не выполняется, обозначим через $\tilde{P}(A^n,B)$.

Построение масштабирующей функции функция. Пусть $h=1$ и $\tilde{F}^*=\{\tilde{f}^*_{0,i,j}\}_{(i,j)\in Z^2}$, где

$$\tilde{f}^*_{0,i,j}=\{1,\ \nu=\mu=0;0,\ \nu,\mu\neq 0.$$

Положим

$$\Psi_k(A^n,B,x,y)=\psi_{k,1}(A^n,B,\tilde{F}^*,x,y)$$

и

$$\Psi(A^n,B,x,y)=\psi_1(A^n,B,\tilde{F}^*,x,y).$$

Ясно, что

$$\psi_{k,h}(A^n,B,\tilde{F}^*,x,y)=\Psi_k\left(A^n,B,\frac{x}{h},\frac{y}{h}\right)$$

и если $\tilde{F}^*_{i,j}$ сдвиг массива $\tilde{F}^*$, то

$$\psi_{k,h}(A^n,B,\tilde{F}^*_{i,j},x,y)=\Psi_k\left(A^n,B,\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}(A^n,B)$ следует

$$\begin{aligned}\psi_{k,h}(A^n,B,\tilde{F},x,y)&=\psi_{k,h}\left(A^n,B,\sum_{(i,j)\in Z^2}\tilde{f}_{i,j,0}\tilde{F}^*_{i,j},x,y\right)=\\&=\sum_{(i,j)\in Z^2}\tilde{f}_{i,j,0}\psi_{k,h}\left(A^n,B,\tilde{F}^*_{i,j},x,y\right)=\\&=\sum_{(i,j)\in Z^2}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(A^n,B,\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right).\end{aligned}\tag{9}$$

Таким образом, если $\psi_h(A^n,B,\tilde{F},x,y)$ существует, то для любого массива $\tilde{F}\in\ell^2_\infty$ и любого $(x,y)\in\mathrm{R}^2$ и $h>0$ имеет место соотношение

$$\psi_h(A^n,B,\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in Z^2}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(A^n,B,\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right).\tag{10}$$

Объединение всех сдвигов вдоль координатных осей на целые числа апертуры A^n и ее отображений относительно координатных осей и точки $(0,0)$ таких, что все они содержат точку $(0,0)$ обозначим G^n. Радиус множества G^n обозначим $R(A^n)$.

Носитель функции $\Psi\left(A^n,B\right)$ есть G^n, таким образом равенства (9) и (10) можно переписать в виде

$$\psi_{k,h}(A^n,B,\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in G}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(A^n,B,\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right),$$

и

$$\psi_h(A^n,B,\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in G}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(A^n,B,\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right).$$

Многие свойства метода восстановления $\psi_h(A^n,B,\tilde{F})$ (или $\psi_{k,h}(A^n,B,\tilde{F})$) следуют из свойств базисных функций $\Psi(A^n,B,x,y)$ (или $\Psi_k(A^n,B,x,y)$) и последних равенств.

Из (7) следует, что

$$\psi_h(A^n,B,\tilde{F}^0,x,y)=\psi_{h/2}(A^n,B,\tilde{F}^1,x,y),$$

в частности,

$$\psi_1(A^n,B,\tilde{F}^{*,0},x,y)=\psi_{1/2}(A^n,B,\tilde{F}^{*,1},x,y).$$

Таким образом масштабирующее свойство будет иметь вид

$$\Psi(A^n,B,x,y)=\sum_{(\mu,\nu)\in Z^2}\tilde{f}^{*,1}_{\nu,\mu}\Psi\left(A^n,B,2x-\nu,2y-\mu\right).$$

В частном случае, если (ν,μ) таковы, что $0\le\nu,\mu\le 4$, то это равенство можно записать в виде

$$\Psi(A^n,B,x,y)=\sum_{\mu,\nu=-4}^{3}h_{\nu,\mu}\Psi\left(A^n,B,2x-\nu,2y-\mu\right),$$

где

$$(h_{i,j})^3_{i,j=-4}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{2,2}&a_{-1,2}&a_{1,2}&a_{0,2}&a_{0,2}&a_{1,2}&a_{-1,2}&a_{2,2}\\a_{2,-1}&a_{-1,-1}&a_{1,-1}&a_{0,-1}&a_{0,-1}&a_{1,-1}&a_{-1,-1}&a_{2,-1}\\a_{2,1}&a_{-1,1}&a_{1,1}&a_{0,1}&a_{0,1}&a_{1,1}&a_{-1,1}&a_{2,1}\\a_{2,0}&a_{-1,0}&a_{1,0}&a_{0,0}&a_{0,0}&a_{1,0}&a_{-1,0}&a_{2,0}\\a_{2,0}&a_{-1,0}&a_{1,0}&a_{0,0}&a_{0,0}&a_{1,0}&a_{-1,0}&a_{2,0}\\a_{2,1}&a_{-1,1}&a_{1,1}&a_{0,1}&a_{0,1}&a_{1,1}&a_{-1,1}&a_{2,1}\\a_{2,-1}&a_{-1,-1}&a_{1,-1}&a_{0,-1}&a_{0,-1}&a_{1,-1}&a_{-1,-1}&a_{2,-1}\\a_{2,2}&a_{-1,2}&a_{1,2}&a_{0,2}&a_{0,2}&a_{1,2}&a_{-1,2}&a_{2,2}\end{pmatrix}.$$

Ортогонализация масштабирующих функций. Для $(\nu,\mu)\in Z^2$ положим

$$d^k_{\nu,\mu}=\left\langle\Psi_k,\Psi_k\left(\cdot-\nu 2^{-k},\cdot-\mu 2^{-k},\right)\right\rangle$$

и рассмотрим функцию

$$E^k(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}d^k_{\nu,\mu}e^{-i2^{-k}(\nu\omega_1+\mu\omega_2)}.$$

Так как функция Ψ_k по построению имеет конечный носитель, то $E^k(\omega_1,\omega_2)$ есть неотрицательный тригонометрический полином двух переменных, называемый полиномом Эйлера-Фробениуса.

Пусть

$$a^k_{\nu,\mu}=\frac{4}{\pi^2}\iint_{T^2}\frac{e^{-i2^{-k}(\nu\omega_1+\mu\omega_2)}}{\sqrt{E^k(\omega_1,\omega_2)}}d\omega_1 d\omega_1,$$

где T^2 тор $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если полином $E^k(\omega_1,\omega_2)$ всюду отличен от нуля на торе T^2 и $\{a^k_{\nu,\mu}\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}$, то функция

$$\tilde{\Psi}_{k,h}(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}a_{\nu,\mu}\Psi_k(x-\nu 2^{-k},y-\mu 2^{-k})$$

удовлетворяет условию

$$\left\langle\tilde{\Psi}_k,\tilde{\Psi}_k\left(\cdot-\nu 2^{-k},\cdot-\mu 2^{-k}\right)\right\rangle=0,\quad(\nu^2+\mu^2\neq 0),$$

то есть функция $\tilde{\Psi}_k$ является ортогональной на решетке с шагом 2^{-k}.

Из соотношения (9) следует, что найдутся $h^k_{\nu,\mu}$ такие, что имеет место соотношение

$$\tilde{\Psi}_k(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h^k_{\nu,\mu}\tilde{\Psi}_{k-1}(x-\nu 2^{-k+1}, y-\mu 2^{-k+1}).$$

Таким образом, нами получена последовательность ортогональных масштабирующих функций.

Эта функция порождает ортогональный базис. График ортогональной масштабирующей функции $\tilde{\Psi}(x,y)$ имеет вид

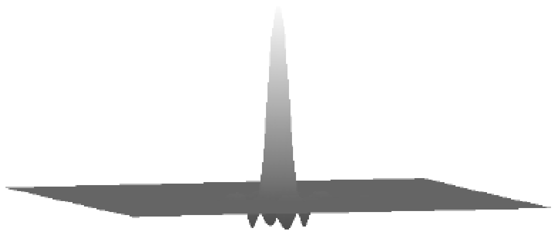

Рис. 1. График ортогональной масштабирующей функции $\tilde{\Psi}(x,y)$.

Рис. 2. График всплеска $\tilde{\psi}^1(x,y)$.

Рис. 3. График всплеска $\tilde{\psi}^2(x,y)$.

и, наконец,

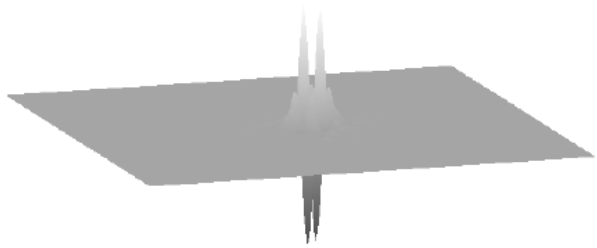

Рис. 4. График всплеска $\tilde{\psi}^3(x,y)$.

Построенный базис несепарабельных всплесков обладает свойством наследственности, которая выражается в том, что если для фиксированного уровня декомпозиции двумерного сигнала использовать базис построенный на основе базисной функции Ψ_k , а последующий на основе Ψ_{k+1} , то качество обработки сигнала существенно улучшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chui Ch.K.* An Introduction to Wavelets. – San Diego: Academic Press, 1992. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001.
2. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – SIAM, Philadelphia, 1992. – 453 p. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам, Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
3. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. – СПб, Изд. СПбГТУ, 1999 – 132 с.
4. *Новиков И.Я.* Теория всплесков/ Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.// М., Физматлит, 2005. – 612 с.
5. *Babenko V.F., Ligun A., Shumeiko A.* Non-separable wavelets and their application. – Wavelets and Splines. International conference, St,Peterburg, (2003), – p. 10 – 11.
6. *Ligun A.A., Shumeiko A.A.* Linear method of recovery of function of two variables on a binary lamination. East Journal of Approximation, (2001), v.7, N 3, 1-18.

пост. 15.06.07.