Неравенства для норм производных функций и задача нахождения оптимальной поверхности

О.Л. КИРЕЙКО

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна

Робота присвячена дослідженню можливості розв'язання некласичних задач оптимізації на прикладі задачі про пошук оптимальної поверхні вже існуючими набутками теорії апроксимації, на якій базуються нерівності для норм проміжних похідних функцій типу Колмогорова-Надя.

Работа посвящена исследованию возможности решения неклассических задач оптимизации на примере задачи о поиске оптимальной поверхности уже существующими средствами теории аппроксимации, на которой базируются неравенства для норм промежуточных производных функций типа Колмогорова-Надя.

Work is devoted research of possibility of decision of nonclassical tasks of optimization on the example of task about the search of optimal surface by already existent facilities of theory of approximation on which are based inequality for the norms of intermediate derivative functions of type Kolmogorov-Nadya.

Основные определения:

Пусть задан тор $T^2=[0;1]^2$. Если p - действительное число, $1\le p\le\infty$, $x=(x_1,x_2)$, тогда $L_p(T^2)$ - пространство функций $y(x)$, 1- периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|y\|_p := \left\{\int_0^1\int_0^1 |y(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1\le p<\infty, \quad (1)$$

$$\|y\|_p := \sup_{x\in T^2}\ vrai|y(x)|<\infty\ ,\ \text{если } p=\infty. \quad (2)$$

Функция $y(x_1;x_2)\in L_p$ удовлетворяет условию Липшица с константой c, если

$$\|y(x_1+h_1;x_2+h_2)-y(x_1;x_2)\|_p \le c|h_1|+c|h_2| \quad (3)$$

для произвольных x_1,x_2,h_1,h_2 из T^2.

Через $cH_p^{(1,1)}$ для $\delta\ge 0$ будем обозначать множество функций $y(x_1;x_2)\in L_p$, для которых

$$\sup_{\substack{|h_1|\le\delta_1,\\ |h_2|\le\delta_2}} \|y(x_1+h_1;x_2+h_2)-y(x_1;x_2)\|_p \le c(\delta_1+\delta_2) \quad (4)$$

Через $cW_p^{(1,1)}$ обозначим множество функций $y(x_1;x_2)\in L_p$, имеющих производную по каждому направлению l, причем

$$\sup_l \|y_l'\|_p \le c. \quad (5)$$

Отметим также, что $cH_p^{(1,1)}\subset\sqrt{2}cW_p^{(1,1)}$ (более подробно вопрос вложения классов функций различной гладкости рассмотрен, например в [1]).

□ Пусть $y\in cH_p^{(1,1)}$, тогда (1) перепишем для случая $h_2=0$:

$$\|y(x_1+h_1;x_2)-y(x_1;x_2)\|_p \le c|h_1|+c\cdot 0 \ \text{ или}$$

$$\frac{\|y(x_1+h_1;x_2)-y(x_1;x_2)\|_p}{|h_1|}\le c.$$

Переходя к пределу $h_1\to 0$ получим $\|y^{(1,0)}\|_p\le c$. Аналогично из (1) при $h_1=0$ получаем $\|y^{(0,1)}\|_p\le c$.

Рассмотрим $\|y_l'\|_p$:

$$\|y_l'\|_p = \|y^{(1,0)}\cdot\cos\alpha + y^{(0,1)}\cdot\cos\beta\|_p \le$$

$$\sup_l \|y^{(1,0)}\cdot\cos\alpha + y^{(0,1)}\cdot\cos\beta\|_p =$$

$$= \left\|y^{(1,0)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+y^{(0,1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right\|_p =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\|y^{(1,0)}+y^{(0,1)}\|_p \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\|y^{(1,0)}\|_p+\|y^{(0,1)}\|_p\right)\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{2}(c+c)\le\sqrt{2}c.\ ■$$

Выражение $E(y,M)_p=\inf_{m\in M}\|y-m\|_p$ будем называть наилучшим приближением функции y множеством M в метрике L_p.

Тогда $E(N,M)_p=\sup_{n\in N}E(n,M)$ - наилучшее приближение множества N множеством M в метрике L_p.

Выражение $E_0(y)_p$ будем называть наилучшим приближением функции y константой в метрике L_p.

Функция $f(x_1;x_2)$ имеет производную по направлению l, если имеет смысл выражение:

$$\frac{\partial f(x_1;x_2)}{\partial l}=\left\langle \overline{l};\overline{gradf}\right\rangle = f'_{x_1}\cdot\cos\alpha+f'_{x_2}\cdot\cos\beta \quad (6)$$

Функция $F_l(x_1;x_2)$ является первообразной от функции $f(x_1;x_2)$ по направлению l, если $(F_l(x_1;x_2))'_l=f(x_1;x_2)$.

© Кирейко О.Л., 2007

Постановка задачи

Пусть задана поверхность местности на квадрате $[0;1]^2$ (функция $f(x_1;x_2)$). Поверхность местности должна соответствовать определенным техническим условиям эксплуатации, а именно: уклон поверхности полигона в каждой точке в каждом направлении не должен быть больше c. Для получения соответствующей условиям поверхности (функция $g(x_1;x_2)$) можно сооружать насыпи, рыть котлованы. Задача состоит в поиске соответствующей требованиям поверхности с наиболее экономичной сметой по проведению земляных работ, если стоимость работ оценивается нормой $\|f-g\|_2^2$.

Данная задача для случая одной переменной была сформулирована Л.С. Понтрягиным [2] и носит название «задача о нахождении профиля дороги».

Исходная задача может быть интерпретирована следующим образом:

Пусть задана функция $f(x_1;x_2)$, определенная на торе T^2 и имеющая производную по направлению l (произвольному). Найти такую функцию $g(x_1;x_2)$, удовлетворяющую условию Липшица (3), что выполняется условие:

$$\|f-g\|_2^2 \to \min . \tag{7}$$

Решение задачи с помощью неравенств типа Колмогорова-Надя

По условию имеем $g(x_1;x_2)\in cH_p^{(1,1)}$. Учитывая, что $cH_p^{(1,1)} \subset \sqrt{2}cW_p^{(1,1)}$, исходная задача эквивалентна поиску $E\left(f;cW_p^{(1,1)}\right)_2$ с точностью до множителя $\sqrt{2}$. Используя теорему о наилучшем приближении элемента выпуклым множеством [3]:

$$E\left(f;cW_p^{(1,1)}\right)_2=\sup_{\|\xi\|_2\le 1}\left[\xi(f)-\sup_{g\in cW_p^{(1,1)}}\xi(g)\right]. \tag{8}$$

Используя теорему Рисса (общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве) [3], последнее выражение примет вид:

$$\sup_{\|\xi\|_2\le 1}\left[\int_{T^2}\xi\cdot f dx-\sup_{g\in cW_p^{(1,1)}}\int_{T^2}\xi\cdot g dx\right]. \tag{9}$$

Но функцию $f(x_1;x_2)$ предполагаем на практике из какого-то класса $W_q^{(1,1)}$, тогда задача поиска поверхности может быть решена с помощью более общей задачи – нахождения $E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2$. В свою очередь, нахождение наилучшего приближения класса функций классом может быть решено с помощью неравенств типа Колмогорова для норм промежуточных производных функции.

Утверждение 1. При $\alpha\in(0,1)$; $c,K>0$; $p,q\in[1,\infty]$ следующие утверждения эквивалентны:

1) Для произвольной функции $y(x_1;x_2)\in W_2^{(1,1)}$

$$E_0(y)_{q'} \le K\cdot E_0(y)_{p'}^{\alpha}\cdot\left(\sup_l\|y_l'\|_2\right)^{1-\alpha}. \tag{10}$$

2) Для любого $c>0$

$$E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2 \le \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\left(\frac{c^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{11}$$

□Из равенства (9) следует:

$$E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2 =$$

$$=\sup_{f\in W_q^{(1,1)}}\sup_{\|\xi\|_2\le 1}\left[\int_{T^2}\xi\cdot f dx-\sup_{g\in cW_p^{(1,1)}}\int_{T^2}\xi\cdot g dx\right]=$$

$$=\sup_{\|\xi\|_2\le 1}\left[\sup_{f\in W_q^{(1,1)}}\int_{T^2}\xi\cdot f dx-\sup_{g\in cW_p^{(1,1)}}\int_{T^2}\xi\cdot g dx\right]. \tag{12}$$

Возьмем периодические на торе T^2, имеющие производные по любому направлению l функции λ и γ. Рассмотрим:

$$\int_{T^2}\lambda_l'\cdot\gamma dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\lambda_{x_1}'\cdot\cos\alpha+\lambda_{x_2}'\cdot\cos\beta\right)\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_{x_1}'\cdot\cos\alpha\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_{x_2}'\cdot\cos\beta\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2 . \tag{13}$$

Используя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_{x_1}'\cdot\cos\alpha\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})'_{x_1}\cdot\cos\alpha\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\cos\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})'_{x_1}\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\cos\alpha\int_0^{2\pi}\left(\gamma\cdot(\lambda-\tilde{c})\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})d(\gamma)x_1\right)dx_2=$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})\gamma_{x_1}'\cos\alpha dx_1dx_2$$

при условии, что

$$\gamma(x_1,\cdot)\cdot(\lambda(x_1,\cdot)-\tilde{c})\Big|_0^{2\pi}=0 . \tag{14}$$

Аналогично получаем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})'_l\cdot\cos\beta\cdot\gamma(x_1;x_2)dx_1dx_2=$$

$=-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\tilde{c})\gamma_{x_2}'\cos\beta dx_1dx_2$ при условии

$$\gamma(\cdot,x_2)\cdot(\lambda(\cdot,x_2)-\tilde{c})\Big|_0^{2\pi}=0 . \tag{15}$$

Таким образом, равенство (13) примет вид:

$$\int_{T^2}(\lambda-\tilde{c})'_l\lambda_l'\cdot\gamma dx=-\int_{T^2}(\lambda-\tilde{c})\cdot\gamma_l' dx \tag{16}$$

при выполнении системы равенств (14)-(15):

$$\begin{cases}\gamma(x_1,\cdot)\cdot(\lambda(x_1,\cdot)-\tilde{c})\Big|_0^{2\pi}=0\\ \gamma(\cdot,x_2)\cdot(\lambda(\cdot,x_2)-\tilde{c})\Big|_0^{2\pi}=0\end{cases}.$$

Система уравнений выполняется, поскольку функции λ и γ периодичные на торе $T^2=[0;1]^2$, т.е. $\gamma(1,x_2)=\gamma(0,x_2)$, $\lambda(1,x_2)=\lambda(0,x_2)$, $\gamma(x_1,1)=\gamma(x_1,0)$, $\lambda(x_1,1)=\lambda(x_1,0)$.

Если теперь обозначим $\gamma=f$, $\lambda_l'=\xi$, G_l - первообразная функции ξ, то (14) примет вид: $\int\limits_{T^2} f\cdot\xi dx=-\int\limits_{T^2} f_l'\cdot(G_l-\tilde{c})dx$.

Т.е. (12) примет вид:

$$E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2=$$

$$=\sup_{G_l\in W_2^{(1,1)}}\left[\sup_{f\in W_q^{(1,1)}}\left(\int\limits_{T^2}(-f')_l\cdot(G_l-\tilde{c})dx\right)-\right.$$

$$\left.-\sup_{g\in cW_p^{(1,1)}}\int\limits_{T^2}(-g_l')\cdot(G_l-\tilde{c})dx\right]=$$

$$\le\sup_{G_l\in W_2^{(1,1)}}\left[\sup_{f\in W_q^{(1,1)}}\left(\int\limits_{T^2}f_l'(\tilde{c}-G_l)dx\right)\right.$$

$$\left.-c\cdot\sup_{\frac{g}{c}\in W_p^{(1,1)}}\left(\int\limits_{T^2}\left(\frac{g}{c}\right)_l'(\tilde{c}-G_l)dx\right)\right]\le$$

$$\le\sup_{G_l\in W_2^{(1,1)}}\left\{1\cdot E_0(G_l)_{q'}-c\cdot E_0(G_l)_{p'}\right\}$$

по теореме двойственности для наилучших приближений подпространством [3].

Поскольку верно неравенство (10), получаем

$$E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2\le$$

$$\le\sup_{G_l\in W_2^{(1,1)}}\left\{K\cdot E_0(G_l)_{p'}^{\alpha}\cdot\sup_l\left\|(G_l)_l'\right\|_2^{1-\alpha}-\right.$$

$$\left.-c\cdot E_0(G_l)_{p'}\right\}\le$$

$$\le\sup_{\lambda>0}\left\{K\cdot\lambda^{\alpha}-c\cdot\lambda\right\}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\left(\frac{c^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (17)$$

Следовательно из (10) следует (11).

Докажем, что из (11) следует (10).

Зафиксировав $f(x_1;x_2)\in W_q^{(1,1)}$ и $\tilde{x}>0$ для $\forall c>0$ имеем:

$$\inf_{g\in L_p^1}\left\{\|f-g\|_2+\tilde{x}\|g_l'\|_p\right\}\le$$

$$\le\inf_{g\in cW_p^{(1,1)}}\left\{\|f-g\|_2+\tilde{x}\|g_l'\|_p\right\}\le\le\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{c^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}+\tilde{x}\cdot c.$$

Т.к. c -произвольно, то

$$\inf_{g\in L_p^1}\left\{\|f-g\|_2+\tilde{x}\|g_l'\|_p\right\}\le$$

$$\le\min_{c>0}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{c^{\alpha}}{K\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}+\tilde{x}\cdot c\right\}=K\cdot\tilde{x}^{\alpha}. \quad (18)$$

Положим $\tilde{x}=\dfrac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}$ при $\forall f\in W_q^{(1,1)}$. Тогда из (18) имеем

$$K\cdot\left(\frac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\right)^{\alpha}\ \ge\ \inf_{g\in L_p^1}\left\{\|f-g\|_2+\frac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\cdot\|g_l'\|_p\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\left\{\|f-g\|_2\cdot\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2+E_0(\bar{x})_{p'}\cdot\|g_l'\|_p\right\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\left\{\|f-g\|_2\cdot\|\bar{x}_l'\|_2+E_0(\bar{x})_{p'}\cdot\|g_l'\|_p\right\}\ge$$

используя обратное неравенство Гельдера продолжаем оценку снизу

$$\ge\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\left\{-\int\limits_T(f-g)\,\bar{x}_l'dx+\int\limits_T(\bar{x}-c_2)\cdot g_l'dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\left\{-\int\limits_T(f-g)\cdot(\bar{x}-c_2)_l'\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_T(\bar{x}-c_2)\cdot g_l'dx\right\}.$$

Интегрируя по частям первый интеграл, получим

$$K\cdot\left(\frac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\right)^{\alpha}\ \ge\ \frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\left\{\int\limits_T(f_l'-g_l')\cdot(\bar{x}-c_2)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_T(\bar{x}-c_2)\cdot g_l'dx\right\}=\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\inf_{g\in L_p^1}\int\limits_T f_l'\cdot(\bar{x}-c_2)dx=$$

$$=\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\int\limits_T f_l'\cdot(\bar{x}-c_2)dx.$$

Т.к. $K\cdot\left(\dfrac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\right)^{\alpha}\ge\dfrac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\int\limits_T f_l'\cdot(\bar{x}-c_2)dx$ для $\forall f\in W_q^{(1,1)}$, то

$$K\cdot\left(\frac{E_0(\bar{x})_{p'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\right)^{\alpha}\ge$$

$$\le\frac{1}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}\sup_{f\in W_q^{(1,1)}}\left(\int\limits_T f_l'\cdot(\bar{x}-c_2)dx\right)=\frac{E_0(\bar{x})_{q'}}{\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2}$$

по теореме двойственности для наилучших приближений подпространством. Таким образом, окончательно получаем

$$E_0(\bar{x})_{q'}\le K\cdot E_0(\bar{x})_{p'}^{\alpha}\cdot\left(\sup_l\|\bar{x}_l'\|_2\right)^{1-\alpha}.\blacksquare$$

Таким образом, с помощью Утверждения 1 мы получаем в общем случае оценку $E\left(W_q^{(1,1)};cW_p^{(1,1)}\right)_2$. Функции, реализующие равенства в неравенствах типа Колмогорова (10) также будут реализовать равенство в (11). С их помощью можно найти искомую поверхность.

1. Т.е. на данном примере показана связь между задачами оптимизации и теорией аппроксимации, в частности неравенствами типа Колмогорова-Надя, которые имеют широкое применение [4]. Как видно,

© Кирейко О.Л., 2007