Про один метод розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів

Ю.Д. ПОЛІСЬКИЙ

НДІ автоматизації чорної металургії

Розглянуто метод розв'язання задачі розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів. Метод алгоритмічно простий та нескладний для схемної реалізації при створенні ефективних обчислювальних структур високої продуктивності та надійності.

Рассмотрен метод решения задачи расширения диапазона представления чисел в системе остаточных классов. Метод алгоритмически прост и несложен для схемной реализации при создании эффективных вычислительных структур высокой производительности и надежности.

The method of solving problem of expansion range numbers representative in residue class system are observed. The method is algorithmically simple and not complicated to scheme realization for making of effective computing structures of high productivity and reliability.

Вступ. Один із перспективних напрямків підвищення продуктивності обчислювальних структур та їх надійності пов'язаний із застосуванням непозиційної системи залишкових класів (СЗК) [1]. При виконанні обчислювань у СЗК нерідко виникає необхідність розширення діапазону зображення чисел. Вирішення такої задачі може бути потрібним, наприклад, при модульному діленні чисел, зображених у СЗК, у тих випадках, коли здійснюється ділення на число, кратне одному або декільком модулям системи. Тому операція розширення системи модулів, при якій по відомим залишкам частки для декількох модулів СЗК визначають значення залишків по інших модулях, відноситься до однієї із основних немодульних операцій у системі залишкових класів.

Постановка задачі. При викладенні статті будемо користуватись визначеннями та позначеннями, що наведені у [2]. Таким чином, СЗК є система обчислення, у якій будь-яке число N зображується у вигляді набору найменших залишків по модулях $m_1,m_2,\ldots,m_n$, тобто

$$N=[N(mod\,m_1),N(mod\,m_2),\ldots,N(mod\,m_n)]$$

або

$$N=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \tag{1}$$

Тут

$$\alpha_i=N(mod\,m_i) \tag{2}$$

При цьому, якщо числа m_i взаємно прості, то зображення числа N у вигляді (1) є єдиним, а об'єм діапазону $[0,M)$ чисел в цьому випадку дорівнює

$$M=m_1m_2\ldots m_n$$

Задача заключається в тому, щоб отримати зображення числа N у СЗК із модулями $m_1,m_2,\ldots,m_n,m_{n+1},\ldots,m_k$, тобто. визначити залишки $\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_k$ по модулях відповідно $m_{n+1},m_{n+2},\ldots,m_k$.

Основна частина. Нехай системою основ поліадичного коду також є система $m_1,m_2,\ldots,m_n$. Тоді число N у поліадичному коді зображується наступним чином

$$N=\pi_1+\pi_2m_1+\pi_3m_1m_2+\ldots+\pi_im_1m_2\ldots m_{i-1}+$$
$$+\cdots+\pi_{n-1}m_1m_2\ldots m_{n-2}+\pi_nm_1m_2\ldots m_{n-1},$$
$$\text{де } 0<\pi_i\le m_i-1. \tag{3}$$

Тоді, згідно із (2)

$$\alpha_j=N(mod\,m_j),$$
$$j=n+1,n+2,\ldots,k, \tag{4}$$

а N визначається (3). Оскільки N задане не у поліадичному коді, а своїми залишками по модулях $m_1,m_2,\ldots,m_n$, знадобиться визначення значень π_i, яке виконується ітеративним шляхом.

Отже, метод базується на отриманні значення π_i, $i=1,2,\ldots,n$ та підсумовуванні константи $\Delta^i=\pi_1\,m_1m_2\ldots m_{i-1}$, яка визначається на i-ій ітерації, до α_j. Для $i=1\,\alpha_j^i=0$. Одночасно із цим константа Δ^i віднімається із N^{i-1}, тобто

$$N_1^i=N_1^{i-1}-\Delta^i, \tag{5}$$

до отримання всіх $\alpha_i=0$.

Ітеративний процес визначення констант Δ^i описується наступними залежностями:

$$\Delta^1=\pi_1=N(mod\,m_1)$$

та

$$\Delta^1{}_{mi}=\Delta^1(mod\,m_i),\ i=1,2,\ldots,n,$$
$$\Delta^2=\pi_2m_1=(N-\Delta^1)(mod\,m_2)$$

та

$$\Delta^2{}_{mi}=\Delta^2(mod\,m_i),\ i=2,\ldots,n,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^t=\pi_im_1m_2\ldots m_{t-1}=$$
$$=(N-\Delta^1-\Delta^2-\ldots-\Delta^{t-1})(mod\,\mathrm{m_t})$$

та

$$\Delta^t{}_{mi}=\Delta^t(mod\,m_i),\ i=t,\ldots,n,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n=\pi_im_1m_2\ldots m_{n-1}=$$
$$=(N-\Delta^1-\Delta^2-\ldots-\Delta^{n-1})(mod\,\mathrm{m_n})$$

та

$$\Delta^n{}_{mn}=\Delta^n(mod\,m_n). \tag{6}$$

Назвемо приведеним залишком $\tilde{\alpha}^t{}_i$ по модулю m_i на t–ій ітерації залишок $\tilde{\alpha}_i^t = \tilde{\alpha}_i^{t-1} - \Delta_{m_i}^t$. Таблиці 1-4 пояснюють, наприклад, для системи модулів $m_1=5, m_2=7, m_3=3, m_4=11, m_5=2$, формування приведених залишків та констант для цих залишків згідно (5) та (6).

Проілюструємо викладене для системи модулів $m_1=5, m_2=7, m_3=3$. Об'єм діапазону M = 105.

Нехай для числа N=83=(3, 6, 2) необхідно розширити систему модулів, включив до неї $m_4=11, m_5=2$.

До визначення значень залишків α_4 и α_5 приймемо їх початкові значення такими, що дорівнюють нулю, тобто N_0 = (3, 6, 2, 0, 0).

На першій ітерації із табл. 1 для $\tilde{\alpha}_1=\alpha_1=3$ вибираємо константи 3, 3, 0 відповідно по модулях $m_1=5, m_2=7, m_3=3$, які віднімаємо із залишків 3, 6, 2.

Таблиця 1

Модулі						
5			7	3	11	2
π_1	$\tilde{\alpha}_1$	Δ_5^1	Δ_7^1	Δ_3^1	Δ_{11}^1	Δ_2^1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	0
3	3	3	3	0	3	1
4	4	4	4	1	4	0

Із цієї ж табл. 1 для $\tilde{\alpha}_1=\alpha_1=3$ вибираємо константи 3, 1 відповідно по модулях $m_4=11, m_5=2$, які додаємо до залишків 0, 0. В результаті отримуємо N_1 = (0, 3, 2, 3, 1).

На другій ітерації із табл. 2 для $\tilde{\alpha}_2=3$ вибираємо константи 3, 1 відповідно по модулях $m_2=7, m_3=3$, які віднімаємо із залишків 3, 2.

Таблиця 2

Модулі					
7			3	11	2
π_2	$\tilde{\alpha}_2=\pi_2 m_1$	Δ_7^2	Δ_3^2	Δ_{11}^2	Δ_2^2
0	0	0	0	0	0
1	5	5	2	5	1
2	3	3	1	10	0
3	1	1	0	4	1
4	6	6	2	9	0
5	4	4	1	3	1
6	2	2	0	8	0

Із цієї ж табл. 2 для $\tilde{\alpha}_2=3$ вибираємо константи 10, 0 відповідно по модулях $m_4=11, m_5=2$, які додаємо до залишків 3, 1. В результаті отримуємо N_2 = (0, 0, 1, 2, 1).

На третій ітерації із табл. 3 для $\tilde{\alpha}_3=1$ вибираємо константу 1 по модулю $m_3=3$, яку віднімаємо із залишка 1. Із цієї ж табл. 3 для $\tilde{\alpha}_3=1$ вибираємо константи 4, 0 відповідно по модулях $m_4=11$, $m_5=2$, які додаємо до залишків 2, 1. В результаті отримуємо N_3 = (0, 0, 0, 6, 1). Отже, в розширеній системі модулів $m_1=5, m_2=7, m_3=3, m_4=11, m_5=2$ маємо N=83=(3, 6, 2, 6, 1).

Таблиця 3

Модулі				
3			11	2
π_3	$\tilde{\alpha}_3=\pi_3 m_1 m_2$	Δ_3^3	Δ_{11}^3	Δ_2^3
0	0	0	0	0
1	2	1	2	1
2	1	2	4	0

Якщо ж число N зображене, наприклад, в системі модулів $m_1=5, m_2=7, m_3=3, m_4=11$, а визначення потребує залишок по модулю $m_5=2$, то на наступній ітерації значення констант вибираються із табл. 4.

Таблиця 4

Модулі			
11			2
π_4	$\tilde{\alpha}_4=\pi_4 m_1 m_2 m_3$	Δ_{11}^4	Δ_2^4
0	0	0	0
1	6	6	1
2	1	1	0
3	7	7	1
4	2	2	0
5	8	8	1
6	3	3	0
7	9	9	1
8	4	4	0
9	10	10	1
10	5	5	0

Таким чином, розглянуто вирішення задачі розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів. Метод вирішення базується на визначенні залишка по даному модулю на підставі отриманих залишків по решті модулів системи. Таке визначення виконують послідовним відніманням констант із отриманих залишків та підсумовуванням цих констант до результатів, які формуються по данному модулю. При цьому константи на кожній ітерації вибираються в залежності від значення залишка у аналізуємому розряді. Запропонований метод алгоритмічно простий і при схемної реалізації дозволяє створювати обчислювальні структури високої продуктивності та надійності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. - М.: Сов. радио, 1968. - 440 с.
2. Полисский Ю. Д. О выполнении сложных операций в системе остаточных классов// Электронное моделирование. – 2006.- Т.28. - №3. – С. 117-123.

пост. 18.04.07