Нечеткая задача коммивояжера

О.В. СЕРАЯ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Рассмотрена задача коммивояжера, в которой длины участков путей заданы нечетко. Показано, что задача сводится к традиционной. Для решения задачи предлагается использовать генетический алгоритм.

Розглянуто задачу комівояжера, в якої довжини шляхів задані нечітко. Показано, що завдання зводиться до традиційного. Для вирішення завдання пропонується використовувати генетичний алгоритм.

The task of traveling salesman is considered, in which length of ways set unclear. It is shown that a task is taken to traditional. For the decision of task it is suggested to use a genetic algorithm.

Введение. Задача коммивояжера формулируется следующим образом [1]. Имеется n пунктов, соединенных транспортной сетью. Известны расстояния между пунктами – узлами сети. Необходимо найти замкнутый маршрут, обходящий все пункты, но не проходящий через один и тот же дважды. В традиционной постановке этой задачи предполагается, что «расстояние» между узлами транспортной сети – детерминированная величина. Однако если в качестве расстояния используется, например, время перехода (переезда) от одного узла к другому, это предположение становится нереалистичным. На практике время перемещения по дуге сети между узлами зависит от множества случайных факторов: погоды и связанным с ней состоянием покрытия дороги, соотношения между пропускной способностью участка транспортной сети и интенсивностью потока транспортировок, типа транспортного средства, дня недели, времени суток, в которое осуществляется транспортировка и т.д. При этом важно отметить, что характер и уровень влияния перечисленных факторов не являются стабильными. Это обстоятельство ставит под сомнение целесообразность попыток описания численных значений продолжительностей перевозок между пунктами (узлами) транспортной сети как случайных величин с некоторым законом распределения, поскольку числовые характеристики этого закона не могут быть однозначно оценены. В связи с этим для адекватного описания указанных величин естественно использовать нечеткие числа [2], оценка носителя которых серьезных трудностей не вызывает. Поставим задачу отыскания наилучшего маршрута коммивояжера в ситуации, когда длины участков пути – нечеткие числа.

Постановка задачи. Как известно, наименее требовательным в информационном отношении, но достаточно реалистичным является использование треугольных нечетких чисел с указанием для каждого из них минимального, максимального и наиболее вероятного значений. В соответствии с этим введем для описания нечеткой продолжительности t_{ij} пути между пунктами (i, j) функцию принадлежности в виде

$$\mu(t_{ij}) = \begin{cases} 0, & t_{ij} < a_{ij}, \\ \dfrac{t_{ij} - a_{ij}}{c_{ij} - a_{ij}}, & a_{ij} \le t_{ij} < c_{ij}, \\ \dfrac{b_{ij} - t_{ij}}{b_{ij} - c_{ij}}, & c_{ij} \le t_{ij} < b_{ij}, \\ 0, & t_{ij} > b_{ij}, \end{cases}$$

где

a_{ij} - минимальное значение t_{ij},

c_{ij} - наиболее вероятное значение t_{ij},

b_{ij} - максимальное значение t_{ij}.

Понятно, что суммарная продолжительность T_Σ пути, соответствующая выбранному решению задачи коммивояжера, зависит от составляющих маршрута и совокупности нечетких чисел, описывающих эти составляющие. Введем матрицу булевых переменных $X = (x_{ij})$, следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга, соединяющая узлы } i \text{ и } j, \\ & \text{включена в маршрут,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом матрица X задает допустимый маршрут, если набор (x_{ij}) удовлетворяет следующим требованиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,...,n,$$

и кроме того, существуют такие (u_i, u_j), что

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n - 1 \quad i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,n.$$

Тогда суммарная нечеткая продолжительность пути T_Σ, соответствующая маршруту X, определяется по формуле

$$T_\Sigma(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}.$$

Понятно, что левая и правая границы интервала определенности нечеткого числа T_Σ задаются соотношениями

$$a_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij},$$

$$b_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{ij}.$$

Аналогично можно рассчитать значение c_Σ нечеткого числа T_Σ, соответствующее максимальному значению функции принадлежности $\mu(T_\Sigma(X))$. При этом

$$c_{\Sigma}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ .$$

Теперь задача состоит в выборе плана X, задающего маршрут, который был, бы наилучшим в каком-либо естественном смысле.

Основные результаты. Следует заметить, что нечеткое число $T_{\Sigma}(X)$, являющееся суммой треугольных чисел, не является треугольным. Аналитическое описание функции принадлежности $\mu(T_{\Sigma}(X))$ этого нечеткого числа может быть получено из следующих соображений. Если число пунктов обхода n в задаче коммивояжера достаточно велико, а именно этот случай интересен для практики, то достаточно точное описание $\mu(T_{\Sigma}(X))$ имеет вид

$$\mu(T_{\Sigma}(X))=exp\left\{-\frac{(T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma})^2}{2D_{\Sigma}}\right\},\qquad(1)$$

где

$$m_{\Sigma}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ ,$$

$$D_{\Sigma}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{ij}x_{ij}\ ,\ D_{\Sigma}\ =\sigma_{\Sigma}^{2}\ ,$$

$$D_{ij}=\left(\frac{b_{ij}-a_{ij}}{6}\right)^2,\ i=1,2,...,n\ ,\ j=1,2,...,n\ .$$

Теперь с использованием (1), легко построить процедуру решения задачи коммивояжера с нечетко заданными характеристиками длин дуг транспортной сети. Центральным элементом этой процедуры является критерий качества выбираемого маршрута. Введем параметр

$$\eta_1(T_{кр}(X))=\int_{0}^{T_{кр}(X)}\mu(T_{\Sigma})dT_{\Sigma}=$$

$$=\int_{0}^{T_{кр}(X)}exp\left\{-\frac{\left(T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma}\right)^2}{2D_{\Sigma}}\right\}dT_{\Sigma}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}\times$$

$$\times\int_{0}^{T_{кр}(X)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}}exp\left\{-\frac{\left(T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma}\right)^2}{2D_{\Sigma}}\right\}dT_{\Sigma}(X)=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}\int_{-\frac{m_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}}^{\frac{T_{кр}-m_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2}{2}}du=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}}{2}\left[\Phi\left(\frac{m_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}\right)+\Phi\left(\frac{T_{кр}(X)-m_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}\right)\right],\qquad(2)$$

где

$$u=\frac{T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}\ ,$$

$T_{кр}$ - критическое значение длины (суммарного времени преодоления) пути, превышение которого нежелательно,

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}du\ .\qquad(3)$$

Численное значение параметра $\eta_1(T_{кр}(X))$ определяет долю площади под кривой $\mu(T_{\Sigma})$, соответствующую приемлемым значениям T_{Σ}, не превышающим $T_{кр}$. Это значение задается маршрутом X и характеризует его качество, которое тем лучше, чем больше $\eta_1(T_{кр}(X))$. Заметим, что введенный критерий (2) не удобен для практических расчетов вследствие необходимости расчета интеграла вероятности (3). Более простой критерий получим следующим образом. Зададим некоторое значение $y_{кр}$ функции принадлежности $\mu(T_{\Sigma})$ и решим уравнение

$$exp\left\{-\frac{\left(T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma}\right)^2}{2D_{\Sigma}}\right\}=y_{кр}\ .\qquad(4)$$

Отсюда

$$\frac{\left(T_{\Sigma}(X)-m_{\Sigma}\right)^2}{2D_{\Sigma}}=-ln y_{кр}\ ,$$

$$T_{\Sigma,1,2}(X)=m_{\Sigma}\pm\sigma_{\Sigma}\sqrt{-2\,ln\,y_{кр}}\ .$$

Выбирая из этих двух корней больший, сформулируем критерий качества маршрута

$$\eta_2(y_{кр.},X)=m_{\Sigma}(x)+\sigma_{\Sigma}(x)\sqrt{-2\,ln\,y_{кр}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{ij}x_{ij}\right)\left(-2\,ln\,y_{кр}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\qquad(5)$$

Критерий (5) характеризует качество маршрута X, тем более высокое, чем меньше значение $\eta_2(y_{кр},X)$. Критерий имеет ясный смысл: для плана X уровень принадлежности суммарной длины соответствующего маршрута, большей, чем $\eta_2(y_{кр},X)$, не превосходит $y_{кр}$. Очевидное преимущество критерия $\eta_2(y_{кр},X)$ перед $\eta_1(T_{кр},X)$ состоит в простоте его расчета и более ясной трактовке качества выбираемого маршрута. Таким образом, нечеткая задача коммивояжера сведена к четкой задаче с критерием, задаваемым соотношением (5). Для решения полученной задачи может быть использован любой из множества известных алгоритмов, традиционно применяемых в задаче коммивояжера (метод ветвей и границ, Лэнд и Дойг и т.д.) Однако, известно, что все они эффективны только при относительно небольшой размерности задачи (15-20 пунктов). Для задач более высокой размерности определенный оптимизм внушает практический опыт применения генетических алгоритмов [3,4]. В числе стандартных проблем, которые обычно возникают при попытках использования генетических алгоритмов в задачах оптимизации (формирование особей, организация процедур скрещивания, мутации и отбора перспективных особей) в задаче коммивояжера наибольшую трудность вызывает получение допустимых особей после скрещивания. Известные способы формирования особей очередного поколения путем объединения отдельных частей особей – родителей, как правило, приводят к получению недопустимого результата (некоторые пункты маршрута исчезают, а другие появляются дважды). Специальные процедуры, применяемые в практических алгоритмах, обладают низкой эффективностью. Это трудная проблема, которой следует серьезно заниматься. Реализация остальных операторов генетических алгоритмов трудностей не вызывает. При этом в процедуре отбора перспективных особей в ходе формирования очередной популяции естественно использовать четкий критерий (5). В соответствии с этим критерием качество маршрута тем выше, чем меньше значение $\eta_2(y_{кр}, X)$. Эффективность генетических алгоритмов при решении задачи коммивояжера очень высока – размерность решаемых за приемлемое время задач достигает $80-100$. Для задач более высокой размерности целесообразно применение декомпозиционных процедур, как это сделано в [5]. Кроме того, очень важным конструктивным достоинством генетических алгоритмов применительно к решению задачи коммивояжера является возможность учета дополнительных требований к маршруту (например, прибытие в определенные пункты в течение определенного временного интервала и т.п.).

Таким образом, с использованием описанного выше подхода удается нетривиальную задачу коммивояжера с нечетко заданными «расстояниями» между пунктами свести к обычной задаче. При этом существенно, что, в отличие от оптимизации маршрута «в среднем», этот подход очевидным образом учитывает разброс возможных значений продолжительностей перевозок на каждом участке маршрута. При его использовании наилучшим может оказаться маршрут, средняя длина которого не является минимально возможной, но который использует участки пути с малым разбросом времени их прохождения, и поэтому с большей надежностью обеспечивает преодоление всего пути за приемлемое время.

Сделаем еще одно существенное замечание. Оно касается ситуации, которая возникает, если значение $y_{кр}$ в (4) выбрать достаточно малым (например, равным 0,001). Тогда с большой долей уверенности можно считать, что максимально возможная суммарная продолжительность прохождения маршрута, соответствующая плану X, не будет превосходить $\eta_2(y_{кр}, X)$. Следовательно, отыскание плана X, минимизирующего критерий $\eta_2(y_{кр}, X)$, означает, что задача коммивояжера при этом решается в минимаксной постановке (отыскивается план X, для которого максимально возможная продолжительность пути, порождаемая этим планом, будет минимальна).

Эта идея минимаксного решения задачи коммивояжера может быть реализована в предельно рафинированной форме, если вернуться к треугольному описанию нечетко заданных продолжительностей прохождения дуг транспортной сети и в качестве критерия качества особи, в случае использования генетического алгоритма, выбрать

$$\eta_3 = b_\Sigma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij},$$

поскольку b_Σ действительно определяет максимальную продолжительность прохождения маршрута, соответствующего X.

Выводы

Таким образом, предложена методика решения задачи коммивояжера для случая, когда длины участков пути между пунктами описываются нечеткими числами. Показано, что задача сводится к четкой. Для решения получаемой задачи предложено использовать генетический алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / Экономика и математические методы, 1965.- №1.- С. 84-92.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. Лысенко Ю.Г., Иванов Н.Н., Минц А.Ю. Нейронные сети и генетические алгоритмы. – Донецк: Юго-Восток, 2003. – 230 с.
4. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. –М.: Экзамен, 2003. – 448 с.
5. Серая О.В., Зинченко И.В., Бачкир Л.В. Декомпозиционный генетический алгоритм решения задачи коммивояжера высокой размерности // Інформаційно керуючі системи на залізничному транспорті. - 2007. - № 1. – С. 23-26.

пост. 17.04.07.

