Метод восстановления функций трех переменных по средним значениям на равномерной сетке

Д.А. ДЕНИСЕНКО

Днепродзержинский Государственный Технический Университет

Работа посвящена построению и исследованию свойств метода восстановления функции трех переменных на основе метода расслоения. Доказана сходимость метода, получена базисная функция.

Робота присвячена побудові та дослідженню особливостей методу відновлення функції трьох змінних, який базується на методі subdivision. Доведено збіжність методу, отримано базисну функцію.

The article is devoted to construction and analysis of the method of recovery of function of three variables. Convergence of the method is proved. Basic function is found.

Возникновение методов пополнения и расслоения данных (интерполяционного subdivision) связано с необходимостью построения сложных математических объектов с использованием мощной вычислительной техники. Эти методы нашли широкое использование в задачах компьютерной графики при моделировании и анимации сложных геометрических объектов, обработке данных, полученных в результате сканирования Земли и пр.

Наличие масштабирующих свойств методов subdivision дало возможность использовать базисные функции этих методов для построения различных базисов всплесков. Данная работа посвящена построению и исследованию трехмерного интерполяционного в среднем метода subdivision.

Впервые интерполяционные методы subdivision были рассмотрены в работах D. Donoho. Позже в работах Лигуна и Шумейко были обобщены результаты и были получены новые методы subdivision для метода двух переменных. В данной работе, основываясь на идеологии работы (1), получен метод интерполяционного в среднем subdivision для функции трех переменных.

Пусть дана ограниченная последовательность $\widetilde{F}^0 = \left\{\widetilde{f}_{i,j,k,0}\right\}_{i,j,k\in Z}$. Δ^0 – равномерное разбиение R^3 на решетку с шагом h и вершинами в точках

$$\left\{M_{i,j,k,0}\right\}_{i,j,k\in Z} = \left\{\left(x_{i,0}, y_{j,0}, z_{k,0}\right)\right\}_{i,j,k\in Z} = \left\{(ih, jh, kh)\right\}_{i,j,k\in Z}$$

Поставим соответствие между каждым элементом $\widetilde{f}_{i,j,k,0}$ последовательности $\widetilde{F}^0$ и элементом $M_{i,j,k,0}$ разбиения Δ^0. Пусть значения последовательности $\widetilde{F}^0$ есть средние значения какой-либо функции в R^3.

Через Δ^1 обозначим новую решетку и через $\widetilde{F}^1 = \left\{\widetilde{f}_{i,j,k,1}\right\}_{i,j,k\in Z}$ новую последовательность, со значениями определяемыми следующим образом

$$\widetilde{f}_{2i+1,2j+1,2k+1,1} = \frac{1}{4}\widetilde{f}_{i,j,k,0} + \frac{1}{4}\widetilde{f}_{i+1,j,k,0} + \frac{1}{4}\widetilde{f}_{i,j+1,k,0} + \frac{1}{4}\widetilde{f}_{i,j,k+1,0},$$

значения $\widetilde{f}_{2i+1,2j,2k,1}$, $\widetilde{f}_{2i,2j+1,2k,1}$, $\widetilde{f}_{2i,2j,2k+1,1}$, $\widetilde{f}_{2i+1,2j+1,2k,1}$, $\widetilde{f}_{2i+1,2j,2k+1,1}$, $\widetilde{f}_{2i,2j+1,2k+1,1}$ и $\widetilde{f}_{2i,2j,2k,1}$ вычисляются аналогично, а

$$M_{2i+\alpha,2j+\beta,2k+\gamma,1} = M_{i+\frac{\alpha}{2},j+\frac{\beta}{2},k+\frac{\gamma}{2},0} = \left(\left(i+\frac{\alpha}{2}\right)h, \left(j+\frac{\beta}{2}\right)h, \left(k+\frac{\gamma}{2}\right)h\right),$$

где $\alpha, \beta = 0,1$.

Данная конструкция получена из условия

$$f^1_{2i+1,2j+1,2k+1} = \frac{8}{h^3}\int_{(i+1/2)h}^{(i+1)h}\int_{(j+1/2)h}^{(j+1)h}\int_{(k+1/2)h}^{(k+1)h} P(x,y,z)\,dxdydz,$$

где $P(x,y,z)$ – полином первой степени с коэффициентами, выбранными из условия

$$f_{\nu,\mu,\eta} = \frac{1}{h^3}\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\int_{\mu h}^{(\mu+1)h}\int_{\eta h}^{(\eta+1)h} P(x,y,z)\,dxdydz,$$

где (ν,μ,η)=(i,j,k), (ν,μ,η)=(i,j,k+1), (ν,μ,η)=(i,j+1,k), (ν,μ,η)=(i+1,j,k), (ν,μ,η)=(i-1,j-1,k-1), (ν,μ,η)=(i+1,j+1,k+1).

Таким образом, получены значения $\widetilde{f}_{i,j,k,1}$ в точках $M_{i,j,k,1}$, $(i,j,k\in Z)$. Их будем использовать в качестве исходного набора, и повторим процедуру пополнения данных, что приведет к рекуррентным формулам

$$M_{2i+\alpha,2j+\beta,2k+\gamma,n} = M_{i+\frac{\alpha}{2},j+\frac{\beta}{2},k+\frac{\gamma}{2},n-1},\ \alpha,\beta,\gamma = 1,0.$$

$$\widetilde{f}_{2i+\alpha,2j+\beta,2k+\gamma,n} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{f}_{i,j,k,n-1} + \widetilde{f}_{i+2\alpha-1,j,k,n-1} + \widetilde{f}_{i,j+2\beta-1,k,n-1} + \widetilde{f}_{i,j,k+2\gamma-1,n-1}\right),\ \alpha,\beta,\gamma = 1,0.$$

Для фиксированных $i,j,k\in Z$ соединим точки $M_{i,j,k}$, $M_{i+1,j,k}$, $M_{i,j+1,k}$, $M_{i+1,j+1,k}$, $M_{i,j,k+1}$, $M_{i+1,j,k+1}$, $M_{i,j+1,k+1}$, $M_{i+1,j+1,k+1}$ с центром $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ соответствующего куба. Таким образом, получим разбиение пространства на треугольные пирамиды. Каждая пирамида представляет собой тело. Непрерывную в пространстве функцию назовем n-полигоном.

Через $\psi_{n,h}(\widetilde{F},x,y,z)$ обозначим n-полигон, интерполирующий в узлах $M_{i,j,k,n}$ значения $\widetilde{f}_{i,j,k,n}$, а в точках $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},n}$ принимающий значения

$$\left(\widetilde{f}_{i,j,k,n} + \widetilde{f}_{i+1,j,k,n} + \widetilde{f}_{i,j+1,k,n} + \widetilde{f}_{i+1,j+1,k,n} + \widetilde{f}_{i,j,k+1,n} + \widetilde{f}_{i+1,j,k+1,n} + \widetilde{f}_{i,j+1,k+1,n} + \widetilde{f}_{i+1,j+1,k+1,n}\right)\frac{1}{8}.$$

Пусть

$$\Delta_1 g(x,y,z)=g\left(x+2^{-n}h,y,z\right)-g(x,y,z)$$

$$\Delta_2 g(x,y,z)=g\left(x,y+2^{-n}h,z\right)-g(x,y,z)$$

$$\Delta_3 g(x,y,z)=g\left(x,y,z+2^{-n}h\right)-g(x,y,z)$$

$$\Delta_4 g(x,y,z)=g\left(x\pm 2^{-n}h,y,z\right)-g\left(x,y\pm 2^{-n}h,z\right)$$

$$\Delta_5 g(x,y,z)=g(x,y,z)-g\left(x+2^{-n}h,y+2^{-n}h,z+2^{-n}h\right)$$

$$\Delta^2{}_1 g(x,y,z)=g\left(x+2^{-n}h,y,z\right)-2g(x,y,z)+ +g\left(x-2^{-n}h,y,z\right)$$

$$\Delta^2{}_2 g(x,y,z)=g\left(x,y+2^{-n}h,z\right)-2g(x,y,z)+ +g\left(x,y-2^{-n}h,z\right)$$

$$\Delta^2{}_3 g(x,y,z)=g\left(x,y,z+2^{-n}h\right)-2g(x,y,z)+ +g\left(x,y,z-2^{-n}h\right)$$

$$\Delta^2{}_4 g(x,y,z)=g(x,y,z)+g\left(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h,z\right)- -g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)-g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)$$

$$\Delta^2{}_5 g(x,y,z)=g(x,y,z)+g\left(x+2^{-k}h,y,z+2^{-k}h\right)- -g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)-g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)$$

$$\Delta^2{}_6 g(x,y,z)=g(x,y,z)+g\left(x,y+2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)- -g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)-g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)$$

$$\Delta^2{}_7 g(x,y,z)=g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)+ +g\left(x-2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y-2^{-k}h,z\right)-4g(x,y,z)$$

$$\Delta^2{}_8 g(x,y,z)=g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)+ g\left(x-2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y,z-2^{-k}h\right)-4g(x,y,z)$$

$$\Delta^2{}_9 g(x,y,z)=g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)+g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)+ +g\left(x,y-2^{-k}h,z\right)+g\left(x,y,z-2^{-k}h\right)-4g(x,y,z)$$

$$\Delta^2{}_{10} g(x,y,z)=g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)+ +g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)+g\left(x-2^{-k}h,y,z\right)+g\left(x,y-2^{-k}h,z\right)+ +g\left(x,y,z-2^{-k}h\right)-6g(x,y,z)$$

$$\begin{aligned}\Delta^2{}_{11} g(x,y,z)=&-8g(x,y,z)+\\ &+g\left(x-2^{-k}h,y-2^{-k}h,z-2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x+2^{-k}h,y-2^{-k}h,z-2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x-2^{-k}h,y+2^{-k}h,z-2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h,z-2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x-2^{-k}h,y-2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x-2^{-k}h,y+2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x+2^{-k}h,y-2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Delta^2{}_{12} g(x,y,z)=\\ &g(x,y,z)+g\left(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h,z\right)-\\ &-g\left(x+2^{-k}h,y,z\right)-g\left(x,y+2^{-k}h,z\right)-\\ &-g\left(x,y,z+2^{-k}h\right)-g\left(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)+\\ &+g\left(x+2^{-k}h,y,z+2^{-k}h\right)+g\left(x,y+2^{-k}h,z+2^{-k}h\right)\end{aligned}$$

$$\Delta^2 g(x,y,z)=\max_{i=\overline{1,12}}\left\{\Delta^2{}_i g(x,y,z)\right\}$$

Лемма 1. Для любой последовательности $F\in l^3_\infty$ и произвольного $k\in N$ имеет место неравенство

$$\left\|\Delta^2\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le\frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех $(x,y,z)\in R^3$ выполняются неравенства:

$$\left\|\Delta^2{}_\xi\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)}\le A_\xi\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)},$$

где $A=\left(\frac{3}{16},\frac{3}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{7}{16},\frac{7}{16},\frac{7}{16},\frac{7}{16},\frac{13}{16},\frac{1}{4}\right)$,

$\xi=\overline{1,12}$.

Докажем неравенство для $\xi=10$. Рассмотрим величину $\left|\Delta^2{}_{10}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{i,n+2},y_{j,n+2},z_{k,n+2}\right)\right|$. Пусть вначале $i=4\alpha,\ j=4\beta,\ k=4\gamma$, тогда

$$\left|\Delta^2{}_{10}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha,n+2},y_{4\beta,n+2},z_{4\gamma,n+2}\right)\right|= =\sum_{\nu=-1}^{1}\sum_{\xi=-1}^{1}\sum_{\eta=-1}^{1}w^{\nu}{}_{\xi,\eta}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha+\nu,n},y_{4\beta+\xi,n},z_{4\gamma+\eta,n}\right)$$

где $W^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0&0&0\\-4&3&0\\6&-4&0\end{pmatrix}$, $W^{0}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0&1&0\\3&-6&1\\-4&3&0\end{pmatrix}$,

$W^{1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}&\left|\Delta^2{}_{10}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha,n+2},y_{4\beta,n+2},z_{4\gamma,n+2}\right)\right|=\\ &=\frac{1}{16}\left|\Delta^2{}_{10}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)+\right.\\ &+2\Delta^2{}_5\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)+\\ &+2\Delta^2{}_6\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)+\\ &\left.+2\Delta^2{}_4\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|\le\\ &\le\frac{1}{16}\left(\left|\Delta^2{}_{10}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)\right|+\right.\\ &+\left|2\Delta^2{}_5\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+\\ &+\left|2\Delta^2{}_6\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+\\ &\left.+\left|2\Delta^2{}_4\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|\right)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\|\Delta^2{}_{xyz+}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)} \le \frac{7}{16}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)}$$

Рассматривая остальные случаи, убеждаемся, что неравенство справедливо для всех $\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3$.

Аналогично получаем для $\xi = 11$.

$$\left|\Delta^2{}_{11}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha,n+2},y_{4\beta,n+2},z_{4\gamma,n+2}\right)\right| =$$

$$= \sum_{\nu=-1}^{1}\sum_{\xi=-1}^{1}\sum_{\eta=-1}^{1} w^{\nu}{}_{\xi,\eta}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha+\nu,n},y_{4\beta+\xi,n},z_{4\gamma+\eta,n}\right)$$

где $W^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 1\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $W^{0} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -10 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$$W^{1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\left|\Delta^2{}_{11}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha,n+2},y_{4\beta,n+2},z_{4\gamma,n+2}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{16}\left|\Delta_{10}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)+\right.$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$\left|\Delta^2{}_{11}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x_{4\alpha,n+2},y_{4\beta,n+2},z_{4\gamma,n+2}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{16}\left|\Delta_{10}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)+\right.$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{7}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma-1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{2}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma-1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{1}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)+$$

$$+4\Delta_{12}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)+$$

$$+\Delta_{1}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma,n}\right)+$$

$$\left.+\Delta_{2}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)\right| \le$$

$$\le\left|\Delta_{10}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma+1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{3}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma+1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{7}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{2}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{1}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+$$

$$+4\left|\Delta_{12}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma-1,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{1}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha,n},y_{\beta-1,n},z_{\gamma,n}\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta_{2}\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{\alpha-1,n},y_{\beta,n},z_{\gamma,n}\right)\right|$$

Следовательно,

$$\left\|\Delta^2{}_{11}\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)} \le \frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\|_{C\left(R^3\right)}.$$

Рассматривая остальные случаи, убеждаемся, что неравенство справедливо для всех $\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3$.

Лемма 2. Для любой последовательности $\widetilde{F} \in l^3_\infty$ и произвольного $k \in N$ имеет место неравенство

$$\left\|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)} \le \frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}. \quad (2)$$

Доказательство. Из построения метода следует, что экстремум величины $\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)$ достигается в точках $M_{i,j,k,n+1}$, $M_{i+1,j,k,n+1}$, $M_{i,j+1,k,n+1}$, $M_{i+1,j+1,k,n+1}$ или $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},n+1}$. Проводя вычисления, убеждаемся в том, что

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{4}\left(\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i-1},y_j,z_k\right)+\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j-1},z_k\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_{k-1}\right)-3\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right)\right| \le$$

$$\le\frac{1}{4}\left|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i-1},y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j-1},z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_{k-1}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right| =$$

$$\frac{1}{4}\left|\Delta_1\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+\frac{1}{4}\left|\Delta_2\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\Delta_3\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|$$

То есть

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right| \le$$

$$\le\frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$$

Рассматривая остальные случаи, убеждаемся в том, что

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{4}\left(-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j-1},z_k\right)+\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_{k-1}\right)\right)\right| \le$$

$$\le\frac{1}{4}\left|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_{k-1}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+$$

$$\frac{1}{4}\left|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j-1},z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{4}\left|\Delta_3\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|+\frac{1}{4}\left|\Delta_4\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|$$

и

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_j,z_k\right)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$$

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_{j+1},z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_{j+1},z_k\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{4}\left(\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_{k-1}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+1},y_{j+1},z_k\right)\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{4}\left|\Delta_5\psi\left(\widetilde{F},x_i,y_j,z_k\right)\right|=\frac{1}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$$

Аналогично получаем:

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}},z_{k+\frac{1}{2}}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}},z_{k+\frac{1}{2}}\right)\right|\le$$
$$\le\frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$$

$$\left|\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j+1},z_k\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x_i,y_{j+1},z_k\right)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$$

Таким образом, полигон $\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)$ уклоняется от полигона $\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)$ на пирамиде с вершинами в $M_{i,j,k,n+1}$, $M_{i+1,j,k,n+1}$, $M_{i,j+1,k,n+1}$, $M_{i+1,j+1,k,n+1}$, точках $M_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},n+1}$

не более чем на величину $\frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}$.

Лемма 3. Для любой последовательности $\widetilde{F}\in l^3{}_\infty$, и $k\in N$ имеют место неравенства

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le$$
$$\le 4\left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\left\|\Delta^2\psi_{0,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right), \qquad (3)$$

для четных n, и

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le$$
$$\le 4\left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{0,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right), \qquad (4)$$

для нечетных n.

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le\sum_{i=n}^{m-1}\left\|\psi_{i,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{i+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{l^3{}_\infty}$$

и леммы 2 вытекает

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le\frac{3}{4}\sum_{i=n}^{m-1}\left\|\Delta^2\psi_{i,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}.$$

Применяя лемму 1, отсюда получаем

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le$$
$$\le\frac{3}{4}\left(\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{n+2,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\ldots\right)\le$$
$$\le\frac{3}{4}\left(\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\right.$$
$$+\frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+$$
$$\left.+\left(\frac{13}{16}\right)^2\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left(\frac{13}{16}\right)^2\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\ldots\right)=$$
$$=\frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\left(1+\frac{13}{16}+\left(\frac{13}{16}\right)^2+\ldots\right)+$$
$$+\frac{3}{4}\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\left(1+\frac{13}{16}+\left(\frac{13}{16}\right)^2+\ldots\right)\le$$
$$\le 4\left(\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right)$$

Отсюда, для четных n, из леммы 1 следует

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le$$
$$\le 4\left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\left\|\Delta^2\psi_{0,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right)$$

и для нечетных n –

$$\left\|\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n+m,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le$$
$$\le 4\left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{13}{16}\left\|\Delta^2\psi_{0,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что последовательность $\left\{\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что она ограничена. Отсюда следует, что поточечный предел $\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)$ при $k\to\infty$ существует. Обозначим этот предел через $\psi_h\left(\widetilde{F},x,y,z\right)$.

Переходя к пределу по $m\to\infty$ в (3) и (4), немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого фиксированного $n\in N$ и любой последовательности $\widetilde{F}\in l^3{}_\infty$ верно неравенство

$$\left\|\psi_h\left(\widetilde{F}\right)-\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|_{L_\infty\left(R^3\right)}\le 4\left(\left\|\Delta^2\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|+\left\|\Delta^2\psi_{n+1,h}\left(\widetilde{F}\right)\right\|\right).$$

Базисная функция. Пусть $h=1$ и $\widetilde{F}^*=\left\{\hat{f}^*{}_{0,i,j,k}\right\}_{i,j,k\in Z}$, где $\hat{f}^*{}_{0,i,j,k}=\delta_{0,i,j,k}$ и $\delta_{\nu,\mu,\eta}$ – символ Кронекера.

Положим

$$\Psi_k(x,y,z)=\psi_{k,1}\left(\widetilde{F}^*,x,y,z\right)$$
$$\Psi(x,y,z)=\psi_1\left(\widetilde{F}^*,x,y,z\right).$$

Функция $\Psi(x,y,z)$ называется базисной функцией. Приведем несколько графиков срезов базисной функции.

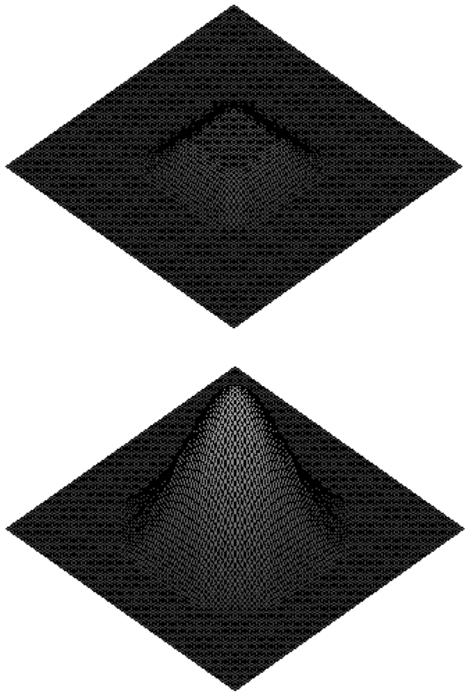

Рис. 1. Срезы базисной функции

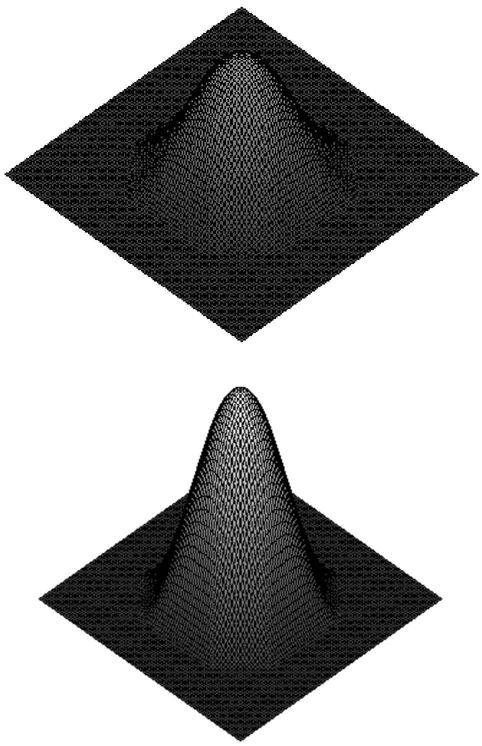

Рис. 2. Срезы базисной функции

Ясно, что

$$\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)=\Psi_n\left(\frac{x}{h},\frac{y}{h},\frac{z}{h}\right)$$

и если $\widetilde{F}^*{}_{i,j,k}$ сдвиг последовательности $\widetilde{F}^*$, то

$$\psi_{n,h}\left(\widetilde{F}^*{}_{i,j,k},x,y,z\right)=\Psi_n\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j,\frac{z}{h}-k\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}$ следует

$$\psi_{n.h}=\psi_{n.h}\left(\sum_{k\in Z}\sum_{j\in Z}\sum_{i\in Z}\widetilde{f}_{i,j,k,0}\widetilde{F}^*{}_{i,j,k},x,y,z\right)=$$

$$=\sum_{k\in Z}\sum_{j\in Z}\sum_{i\in Z}\widetilde{f}_{i,j,k,0}\psi_{n.h}\left(\widetilde{F}^*{}_{i,j,k},x,y,z\right)$$

$$=\sum_{k\in Z}\sum_{j\in Z}\sum_{i\in Z}\widetilde{f}_{i,j,k,0}\Psi_n\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j,\frac{z}{h}-k\right)$$

следовательно, для любой последовательности $\widetilde{F}\in l^3{}_\infty$, любого $(x,y,z)\in R^3$ и $h>0$ имеют место равенства

$$\psi_h\left(\widetilde{F},x,y,z\right)=\sum_{i,j,k\in Z}\widetilde{f}_{i,j,k,0}\Psi_n\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j,\frac{z}{h}-k\right)$$

Носитель функции $\Psi(x,y,z)$ ограничен кубом $\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]\times\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]\times\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$. Таким образом, для

$$(x,y)\in\left(x_{i-\frac{1}{2},n},x_{i+\frac{1}{2},n}\right)\times\left(y_{i-\frac{1}{2},n},y_{i+\frac{1}{2},n}\right)\times\left(z_{i-\frac{1}{2},n},z_{i+\frac{1}{2},n}\right)$$

выполняются неравенства

$$\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)=$$

$$=\sum_{\mu=i-2}^{i+2}\sum_{\nu=j-2}^{j+2}\sum_{\eta=k-2}^{k+2}\widetilde{f}_{i,j,k,0}\Psi_n\left(\frac{x}{h}-\mu,\frac{y}{h}-\nu,\frac{z}{h}-\eta\right)\qquad(5)$$

и

$$\psi_{n,h}\left(\widetilde{F},x,y,z\right)=$$

$$=\sum_{\mu=i-2}^{i+2}\sum_{\nu=j-2}^{j+2}\sum_{\eta=k-2}^{k+2}\widetilde{f}_{\mu,\nu,\eta,0}\Psi_n\left(\frac{x}{h}-\mu,\frac{y}{h}-\nu,\frac{z}{h}-\eta\right)\qquad(6)$$

В заключение выражаю глубокую благодарность и признательность моему руководителю проф. Шумейко А.А. за помощь и постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ligun A.A., Shumeiko A.A. Linear method of recovery of function of two variables on a binary lamination // East Journal of Approximation .- 2001 .- Vol.7, N 3 .- P. 1-18.
2. Babenko V.F., Ligun A., Shumeiko A. Non-separable wavelets and their application // Wavelets and Splines: International conference .- St.Peterburg, 2003 .- P. 10 - 11.
3. Лигун А.А., Шумейко А.А., Денисенко Д.А. Об одной конструкции subdivision в R^3 // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей Третьої міжнародної науково-практичної конференції .- Дніпропетровськ, 2005 .- С. 102-103.

пост. 10.04.07.

