

## Метод математического моделирования теплопереноса и деформирования при ползучести

Н.И. НИКИТЕНКО\*, Ю.Ф. СНЕЖКИН\*, Н.Н. СОРОКОВАЯ\*, Ю.Н. КОЛЬЧИК\*\*

\*Институт технической теплофизики НАН Украины,

\*\*Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Излагается молекулярно - радиационная математическая модель неустановившейся ползучести и численный метод решения системы уравнений термползучести в области с подвижными границами. В качестве примера представлены результаты моделирования термползучести для толстостенной трубы.

Викладається молекулярно - радіаційна математична модель несталої повзучості і чисельний метод рішення системи рівнянь термповзучості в області з рухливими границями. Як приклад представлені результати моделювання термповзучості для товстостінної труби.

The molecular - radiating mathematical model of unsteady creep and the numerical method of decision of system of the equations the heat creep in area with mobile borders is stated. As an example the results of modeling heat creep for a thick-walled pipe are submitted.

**Введение.** Оценка ресурсоспособности конструкций при высоких напряжениях и температурах непосредственно связана с расчетом полей температуры, деформаций и напряжений с учетом ползучести материалов. Анализ поведения материалов, свойства которых зависят от времени, посвящено значительное число публикаций [1–5]. Одноосное растяжение образца при повышенной температуре приводит к зависимости деформации от времени. Полученная кривая состоит из качественно отличающихся четырех участков. Начальный линейно-упругий участок не зависит от скорости нагружения тела. Затем следуют участки с монотонно уменьшающейся, приблизительно постоянной (установившейся), и возрастающей скоростью ползучести. Последний участок завершается разрывом образца вследствие уменьшения его эффективного сечения и возникновения внутренних пор.

Функциональная зависимость деформации ползучести  $\varepsilon_{ij}^i$  от напряжения  $\sigma$ , времени  $t$ , температуры  $T$  обычно определяется в результате обработки экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении образцов. Традиционно полагают, что для каждого конкретного материала скорость деформации ползучести может быть представлена в виде произведения  $\varepsilon_{ij}^i = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(T)$ . Наиболее часто функции  $f_1$  и  $f_2$  аппроксимируют степенными зависимостями вида  $f_1(\sigma) = B_1\sigma^{b_1}$ ,  $f_2(t) = B_2t^{b_2}$ . Зависимость деформации ползучести от температуры обычно принимается в виде эмпирической формулы Аррениуса  $f_3(T) = B_3 \exp[A/(kT)]$ . Экспериментальное исследование интенсивности ползучести обычно проводится при условиях постоянства температуры и внешних нагрузок. Именно для этих условий справедливо выражение [4]

$$\varepsilon_{ij}^i = B_0 \sigma^{b_1} t^{b_2} \exp[A/(kT)],$$

где  $B_0 = const$ .

Современное состояние теории ползучести характеризуется наличием значительного числа ги-

потез, которые не всегда согласуются между собой. В опубликованных работах в основном рассматриваются частные задачи ползучести и упрощенные подходы к их аналитической и численной реализации для случаев установившейся ползучести при постоянных внешних нагрузках и температуре. До настоящего времени фактически не сформулирован физический механизм ползучести, отсутствует замкнутая математическая модель пространственной, неустановившейся ползучести, позволяющей сформулировать универсальный алгоритм расчета явлений ползучести в элементах инженерных конструкций.

Ниже рассматривается математическую модель и сеточный метод решения пространственных задач о термических деформациях и напряжениях с учетом неустановившейся ползучести.

**Активационный механизм термползучести.** Ползучесть представляет собой неравновесный процесс деформирования под действием внешних сил, при котором местоположение отдельных частиц тела непрерывно изменяется. Деформации ползучести при неизменных внешних нагрузках могут проявиться через очень небольшой отрезок времени, если температура тела является достаточно высокой (кратковременная ползучесть) и через много лет (длительная ползучесть), если температура тела является низкой. Столь сильная зависимость динамики процесса от температуры является характерной чертой активационных процессов, в частности диффузии, испарения, тепловой ионизации, диссоциации, химических реакций. Резкое возрастание их интенсивности с повышением температуры объясняется активацией частиц вследствие некоторых флуктуационных процессов, природа которых до недавнего времени оставалась неясной.

На базе молекулярно - радиационной теории [6] сформулирован следующий механизм активационных процессов диффузии. Предельный уровень энергии  $I_{\beta\nu}$ , на котором может находиться частица компонента  $\beta$  в активационных процессах, определяется из условия  $I_{\beta\nu}h\nu < A_{\beta} \leq (I_{\beta\nu} + 1)h\nu$ , где  $A_{\beta}$  — энергия активации. Частица, находящаяся на уровне  $I_{\beta\nu}$ , после поглощения фотона  $h\nu$  активизируется и, отдавая

энергию  $(I_{\beta\nu} + 1)h\nu$ , разрывает связи с соседними частицами, совершает диффузионный переход и оказывается на нулевом энергетическом уровне в соседней ячейке. Функция  $w_{i\nu}$  распределения частиц, испускающих и поглощающих фотоны частоты  $\nu$ , по энергиям в активационных процессах, которая найдена на основе закона интенсивности спектрального излучения частиц [7,8], имеет вид [6]

$$w_{i\nu} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{(I_{\beta\nu} + 1)h\nu}{kT}\right) \right]^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{ih\nu}{kT}\right) \quad (1)$$

где  $I_{\beta\nu}$  – предельный энергетический уровень, на котором может находиться частица. Отметим, что из (1) при  $I_{\beta\nu} \rightarrow \infty$  следует закон распределения Максвелла-Больцмана, который подтвержден многочисленными экспериментальными данными.

В соответствии с (1), масса частиц единичного объема, которые за единицу времени достигают энергии активации  $A$  и совершают диффузионный перескок, равна [6]

$$G = \bar{\varepsilon}\rho \left[ \exp\left(\frac{A}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  – осредненный по частотам коэффициент излучения. Отметим, что вытекающее из (2) выражение для коэффициента диффузии  $D = \frac{1}{3} a^2 \bar{\varepsilon} \left[ \exp\left(\frac{A}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}$ , хорошо согласуется с экспериментальными данными и при  $A/kT \gg 1$  переходит в эмпирическую формулу Аррениуса для твердых тел, а при  $A/kT \ll 1$  – в формулу Эйнштейна для жидких сред.

Диффузия частиц вдоль линии действия внешних растягивающих напряжений  $\sigma$  требует меньших энергетических затрат по сравнению со случаем, когда  $\sigma = 0$ . Пусть тело имеет решетчатую структуру. Частицы связаны с узлами решетки и их число в каждом единичном объеме равно  $n$ . Расстояние между ближайшими узлами решетки равно  $a$ . Частица, находящаяся на нулевом энергетическом уровне, неподвижна и располагается в узле кристаллической решетки. После поглощения одного из фотонов  $h\nu$ , которые движутся с равной вероятностью во всех направлениях, частица возбуждается и совершает колебания вдоль оси, параллельной импульсу поглощенного фотона. В дальнейшем частица поглощает и излучает фотоны  $h\nu$ , движущиеся вдоль этой оси. Если в результате поглощения фотонов  $h\nu$  частица достигает энергии активации, то она совершает диффузионный перескок в направлении импульса фотона  $h\nu$ . В случае отсутствия внешних сил результирующий поток частиц в произвольном направлении равен нулю.

Рассмотрим два слоя частиц, расположенных в плоскостях  $z$  и  $z + a$  на расстоянии шага кристаллической решетки. Пусть внешняя сила  $\sigma$  направлена вдоль оси  $z$ . Динамика ползучести характеризуется плотностью результирующего потока  $J$  частиц вдоль оси  $z$  от

слоя  $z$  к слою  $z + a$ . При перескоке частицы в направлении, составляющим угол  $\theta$  по отношению к  $z$  на частицу действует сила  $f = \sigma \cos \theta / (na) = \sigma m \cos \theta / (\rho a)$ , где  $m$  – масса частицы. Работа этой силы на пути  $a$  равна  $E_D = fa = \sigma m \cos \theta / \rho$ . Соответственно энергия активации частицы в этом направлении равна  $A_{\sigma}(\theta) = A - \sigma m \cos(\theta) / \rho$ . Масса частиц  $dG(\varphi)$  из слоя  $Z$  единичной площади, которые за единицу времени достигают энергии активации и совершают диффузионный перескок под углом  $\theta$  к внешней силе в элементарный телесный угол  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , где  $\varphi$  – угол долготы, равна

$$dG(\theta) = a \bar{\varepsilon} \rho \left[ \exp\left(\frac{A - \sigma m \cos \theta / \rho}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Плотность потока частиц через, покидающих плоскость  $z$  и движущихся в пополюсферу  $0 \leq \theta \leq \pi / 2$ , равна

$$J^+ = a \bar{\varepsilon} \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[ \exp\left(\frac{A - \sigma m \cos \theta / \rho}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

При условии, что  $\exp[(A - \sigma m \cos \theta / \rho) / kT] \gg 1$ , из последнего выражения следует

$$J^+ = 2\pi a \bar{\varepsilon} \rho \exp(-N_{\bar{a}}) \frac{1}{N_{\sigma}^2} [\exp(N_{\sigma}) (N_{\sigma} - 1) + 1]. \quad (3)$$

где  $N_{\sigma}$  и  $N_{\bar{a}}$  – критерии подобия,

$$N_{\bar{a}} = \frac{A}{kT}, \quad N_{\sigma} = \frac{\sigma m}{\rho kT}. \quad (4)$$

Критерий  $N_{\bar{a}}$  характеризует диффузионную активность частиц тела. Критерий  $N_{\sigma}$  определяет влияние внешних сил, температуры и плотности материала на динамику смещения частиц тела, в частности при ползучести.

Аналогичным образом находится плотность потока частиц  $J^-$  в отрицательном направлении оси  $z$ . Результирующая плотность потока массы частиц

$$J = J^+ - J^- = 4\pi a \bar{\varepsilon} \rho \exp(-N_{\bar{a}}) \frac{N_{\sigma} - 1}{N_{\sigma}^2} \text{sh}(N_{\sigma}). \quad (5)$$

Гиперболический синус  $\text{sh}(\chi) = [\exp(\chi) - \exp(-\chi)]/2$ , представляет собой монотонно возрастающую функцию, симметричную относительно точки  $\chi = 0$  ( $\text{sh}(0) = 0$ ). При  $\sigma = 0$  величина  $J = 0$ . Скорость ползучести вдоль оси  $z$  пропорциональна результирующему потоку частиц

$$\dot{\varepsilon}^i = \gamma \frac{J}{a\rho} = B \exp(-N_{\bar{a}}) \frac{N_{\sigma} - 1}{N_{\sigma}^2} \text{sh}(N_{\sigma}) = g(T) f(\sigma, T), \quad (6)$$

где  $\gamma = \text{const}$ ;  $B = \gamma 4\pi \bar{\varepsilon}$ ;  $g(T) = B \exp(-N_{\bar{a}})$ ;  $f(\sigma, T) = \text{sh}(N_{\sigma}) (N_{\sigma} - 1) / N_{\sigma}^2$ .

Когда  $\sigma = 0$ , величина  $\dot{\varepsilon}^i = 0$ . В связи с тем, что при ползучести тело ведет себя как несжимаемая жидкость, то возникновение потока частиц вдоль внешней силы относительно центра тяжести тела приводит к

увеличению размера тела вдоль оси  $z$  и к уменьшению размера вдоль осей  $x$  и  $y$  вследствие перескоков частиц в плоскости  $(x, y)$ .

Напряженно-деформированное состояние трехмерного тела, подвергающегося ползучести вследствие действия внешних сил и неравномерного поля температуры, характеризуется тензорами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , каждый из которых определяется шестью независимыми компонентами. Для этого тела, так же, как и в случае упругих и пластических деформаций, справедливы уравнения равновесия, геометрические уравнения взаимосвязи между компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и вектора перемещения  $u_i$ , уравнение переноса энергии. Полная деформация  $\varepsilon_{ij}$  тела складывается из упругой деформации  $\varepsilon_{ij}^{\dot{}}$  и деформации ползучести  $\varepsilon_{ij}^{\ddot{}}$  [3]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\dot{}} + \varepsilon_{ij}^{\ddot{}}. \quad (7)$$

Тензор упругих деформаций (при  $\varepsilon_{ij}^{\ddot{}}=0$ ) связан с тензором напряжений следующими уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T, \\ \varepsilon_{12}^{\dot{}} &= \sigma_{12} / \mu_1, \\ \varepsilon_{22}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T, \\ \varepsilon_{13}^{\dot{}} &= \sigma_{13} / \mu_1, \\ \varepsilon_{33}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha T, \\ \varepsilon_{23}^{\dot{}} &= \sigma_{23} / \mu_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i^{\dot{}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22})^2 + (\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\varepsilon}_{33})^2 + (\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{11})^2 + 6(\dot{\varepsilon}_{12}^2 + \dot{\varepsilon}_{23}^2 + \dot{\varepsilon}_{31}^2)} \\ \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как выражение (10) для скорости деформации ползучести  $\dot{\varepsilon}_i^{\ddot{}}$  аналогично по форме закону Гука для упругого тела при простом растяжении, то зависимость между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора скоростей деформаций может быть получена заменой в известных уравнениях теории упругости [4] деформаций на скорость деформации и модуля сдвига на модуль ползучести  $\mu^{\ddot{}}$ . С учетом (9) находим, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}} &= 2\mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{11}^{\ddot{}}, & \sigma_{22} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}} &= 2\mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{22}^{\ddot{}}, \\ \sigma_{33} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}} &= 2\mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{33}^{\ddot{}}, & \sigma_{12} &= \mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{12}^{\ddot{}}, \\ \sigma_{23} &= \mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{23}^{\ddot{}}, & \sigma_{31} &= \mu^{\ddot{}} \dot{\varepsilon}_{31}^{\ddot{}}. \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\sigma_{\text{н\ddot{d}}} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$

Принимая во внимание, что при одноосном растяжении  $\sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$  и  $\sigma_{\text{н\ddot{d}}} = \sigma_{11}/3$ , из первого из

где  $E_0$  — модуль упругости;  $\mu_1$  — первый коэффициент Ляме,  $\mu_1 = E_0 / [2(1+\nu)]$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного термического расширения.

В соответствии с экспериментальными данными деформации ползучести характеризуется изменением формы тела без изменения его объема, т.е. дисторсией [4]. Для несжимаемой среды справедливы выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\ddot{}} + \varepsilon_{22}^{\ddot{}} + \varepsilon_{33}^{\ddot{}} &= 3\varepsilon_{\text{н\ddot{d}}}^{\ddot{}} = \text{const} \quad \text{и} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{\ddot{}} + \dot{\varepsilon}_{22}^{\ddot{}} + \dot{\varepsilon}_{33}^{\ddot{}} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

После освобождения тела от внешних нагрузок и выравнивания температуры тело переходит в состояние равновесия. При этом, также как для несжимаемой жидкости, для произвольной частицы тела (атома или молекулы), расположенной внутри тела, равнодействующая сил взаимодействия с другими его частицами равна нулю. Только для частиц, расположенных в окрестности граничной поверхности указанная равнодействующая отлична от нуля. Это означает, что в энергетическом отношении мера остаточных деформаций, возникших вследствие ползучести при неизменной температуре тела, полностью определяется изменением площади наружной поверхности тела. Поэтому при расчете динамики ползучести достаточно учитывать изменение геометрии тела, обусловленное остаточными деформациями.

В теории ползучести, как и в теории течения вязкой жидкости, принимается существование однозначной зависимости между интенсивностью скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_i^{\ddot{}}$  и интенсивностью напряжений  $\sigma_i$ . При этом для каждой точки тела она сохраняется такой же, как для одномерной ползучести, обусловленной одноосным растягивающим (или сжимающим) напряжением, и считается известной [4], т.е.

$$\dot{\varepsilon}_i^{\ddot{}} = \Psi \sigma_i, \quad (10)$$

где

уравнений системы (12) находим  $\dot{\varepsilon}_{11}^{\ddot{}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\mu^{\ddot{}}} \sigma_{11}$ .

Поскольку деформация  $\varepsilon_i^{\ddot{}}$  связана с  $\sigma_i$  той же зависимостью, что и в эксперименте по одноосному растяжению (10), то

$$\frac{1}{3\mu^{\ddot{}}} = \Psi = \frac{\dot{\varepsilon}_i^{\ddot{}}}{\sigma_i} = \frac{gf}{\sigma_i}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^{\ddot{}} &= \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{11} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}}), & \dot{\varepsilon}_{22}^{\ddot{}} &= \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{22} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}}), \\ \dot{\varepsilon}_{33}^{\ddot{}} &= \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{33} - \sigma_{\text{н\ddot{d}}}), \\ \dot{\varepsilon}_{12}^{\ddot{}} &= 3 \frac{gf}{\sigma_i} \sigma_{12}, & \dot{\varepsilon}_{23}^{\ddot{}} &= 3 \frac{gf}{\sigma_i} \sigma_{23}, & \dot{\varepsilon}_{31}^{\ddot{}} &= 3 \frac{gf}{\sigma_i} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с уравнениями (7), (8) и (14) выражения для компонентов тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(t_n)$ , возникающих вследствие изменений внешних напряжений, массовых сил, температуры и геометрии тела принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T + \varepsilon_{11}^i, \\ \varepsilon_{12} &= \sigma_{12} / \mu_1 + \varepsilon_{12}^i, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T + \varepsilon_{22}^i, \\ \varepsilon_{13} &= \sigma_{13} / \mu_1 + \varepsilon_{13}^i, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha T + \varepsilon_{33}^i, \\ \varepsilon_{23} &= \sigma_{23} / \mu + \varepsilon_{23}^i. \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\varepsilon_{ij}^i = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^i dt$ .

Если в трех выражениях (10) для  $\varepsilon_{ii}$ ,  $i=1,2,3$ , два последних члена перевести в левую часть и ввести обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} - \alpha T - \varepsilon_{11}^i, & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} - \alpha T - \varepsilon_{22}^i, \\ \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33} - \alpha T - \varepsilon_{33}^i, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu_1 \nabla^2 u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} [(2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T] - \mu_1 \left( 2 \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon'_{13}}{\partial x_3} \right) + \rho F_1 &= 0, \\ (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu_1 \nabla^2 u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} [(2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T] - \mu_1 \left( 2 \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon'_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon'_{23}}{\partial x_3} \right) + \rho F_2 &= 0, \\ (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu_1 \nabla^2 u_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} [(2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T] - \mu_1 \left( 2 \frac{\partial \varepsilon'_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon'_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon'_{32}}{\partial x_2} \right) + \rho F_3 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\theta = 3\varepsilon_{\text{ср}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3.$$

Для нахождения содержащейся в (20) температурной функции  $T$  используется уравнение переноса энергии [7]

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + (2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (21)$$

Для замыкания системы уравнений термоползучести (20), (21) должны быть заданы начальные и граничные условия. Начальные условия для уравнения (20) и (21) определяют деформации ползучести, обусловленные внешними нагрузками, и температуру до момента  $t=0$ . Если до момента  $t=0$  тело было свободно от нагрузок, начальное условие для (20) может быть задано в виде

$$u_i(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad i=1,2,3. \quad (22)$$

Предположим, что на части граничной поверхности  $S_u$  заданы перемещения, а на части  $S_p$  напряжения, тогда граничные условия для уравнений (20) имеют вид

$$u_i(x_{1,\text{ср}}, x_{2,\text{ср}}, x_{3,\text{ср}}, t) = f_u \quad \text{на } S_u, \quad (23)$$

то уравнения (15) примут вид, аналогичный уравнениям линейной упругости. В разрешенном относительно компонентов напряжения  $\sigma_{ii}$ ,  $i=1,2,3$ , виде они записываются следующим образом

$$\sigma_{ii} = 2\mu_1 \varepsilon'_{ii} + \mu_2 (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33}), \quad (17)$$

где  $\mu_2$  - второй коэффициент Ляме,

$$\mu_2 = E_0 / [(1-2\nu)(1+\nu)].$$

Подставим выражения (16) в (17) с учетом условий (9), а затем заменим компоненты тензора  $\varepsilon_{ij}$  через компоненты вектора смещения  $u_{i,j}$  при помощи геометрических уравнений  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2\mu_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - \\ &- (2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T - 2\mu_1 \varepsilon_{ii}^i; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma_{ij} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \mu_1 \varepsilon_{ij}^i, \quad i \neq j \quad (19)$$

После подстановки полученных выражений в уравнения равновесия  $\sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0$ , получаем уравнению термоползучести в перемещениях

$$\begin{aligned} p_{iv}(x_{1,\text{ср}}, x_{2,\text{ср}}, x_{3,\text{ср}}, t) &= \\ &= \sigma_{i1} \cos(x_{1,\nu}) + \sigma_{i2} \cos(x_{2,\nu}) + \sigma_{i3} \cos(x_{3,\nu}), \\ & \quad i=1,2,3 \quad \text{на } S_u, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\nu$  - нормаль к граничной поверхности  $S$ .

Найденные в результате решения уравнений (20) - (24) функции  $u_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , и  $T$  используются для нахождения окончательных значений компонентов тензора деформаций по уравнениям (15) и напряжений по (18), (19) для момента времени  $t_{\text{ср}}$ . Поскольку функции  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  получены с применением геометрических уравнений, то компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  будут удовлетворять уравнения неразрывности, которые выводятся из геометрических уравнений [4].

Процесс ползучести может сопровождаться заметными изменениями геометрических параметров тела вследствие изменений внешних воздействий, а также непосредственно ползучести. Поскольку изменение геометрии тела само по себе приводит к перераспределению упругих напряжений и деформаций, нередко возникает необходимость учитывать эти из-

менения в процессе ползучести. С этой целью период протекания процесса ползучести  $0 \leq t \leq t_\varepsilon$  разбивается на участки  $\Delta t_s$  согласно условию  $t_s = t_{s-1} + \Delta t_s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $t_S = t_\varepsilon$ ). После проведения решения задачи (14)–(24) для первого участка  $\Delta t_1$ , осуществляется коррекция геометрии тела в соответствии с деформациями ползучести в точках граничной поверхности.

**Численный метод решения задач термоползучести.** Численное решение уравнений (20) и (21) для тела произвольной конфигурации проводится на базе метода канонических элементов [9,10]. Для простоты изложения рассмотрим двумерную односвязную область. В ней вводится неравномерная регуляризованная [9] пространственная разностная сетка, которая в декартовых координатах  $(x, y)$  имеет вид

$$\begin{aligned} y_m &= y_{m-1} + h_{y,m-1}, \quad m=1, 2, \dots, M, \quad y_0 = y', \quad y_M = y''; \\ x_{im} &= x_{i-1,m} + h_{x,i-1,m}, \quad i=1, 2, \dots, I_m, \quad x_{0m} = x'_m, \\ x_{I_m,m} &= x''_m. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $y', x'_m$  – минимальные значения координат соответственно:  $y$  – для точек области,  $x$  – для точек сечения области координатной прямой  $y_m$ ;  $y'', x''_m$  – максимальные значения координат для тех же элементов области. Простейшим видом регуляризованной сетки является квазировномерная сетка [9], для которой  $h_{ym} = h_y = \text{const}$ ,  $h_{xim} = h_{xm} = \text{const}$  и  $h_{im} = \text{const}$ .

Производные от искомым функций, содержащихся в исходных дифференциальных уравнениях, для произвольной внутренней узловой точки области определяются через производные вдоль нормалей к граничным поверхностям канонического элемента, который строится в окрестности этой узловой точки при помощи координатных поверхностей ортогональной системы координат. Для узловой точки  $(x_{im}, y_m)$  сетки (25) каноническим элементом является прямоугольник, образованный координатными прямыми  $x = x_{i+0.5,m}$ ,  $x = x_{i-0.5,m}$ ,  $y = y_{m+0.5}$ ,  $y = y_{m-0.5}$ .

Для уравнения (21) вдоль временной оси  $t$  вводится разностная сетка  $t_n = n l_T$  ( $n = 1, 2, \dots$ ,  $l_T = \text{const}$ ).

Решение уравнений (21) реализуется на базе трехслойной явной разностной схемы Никитенко [11]

$$\begin{aligned} c_{\nu\rho} \rho \left[ (1 + \theta_T) \delta_t T - \theta_T \delta_t T^{n-1} \right] &= \sum_{\beta=0}^B \sum_{j=1}^3 \delta_j (\lambda \delta_j T) + \\ & (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T \delta_t (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \end{aligned} \quad (26)$$

где весовой параметр  $\theta_T \geq 0$ . Первые производные от искомой функции  $W$  по времени  $t$  и по координате  $x$  на гранях элемента  $x = x_{i+0.5,m}$  и  $x = x_{i-0.5,m}$  определяется разностными отношениями

$$\begin{aligned} \delta_t W_{im}^n &= \frac{W_{im}^{n+1} - W_{im}^n}{l_T}, \quad \delta_x W_{i+0.5,m} = \frac{W_{i+1,m} - W_{im}}{h_{xim}}, \\ \delta_x W_{i-0.5,m} &= \frac{W_{im} - W_{i-1,m}}{h_{x,i-1,m}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Разностные выражения производных  $\partial W / \partial x$  и  $\partial(\lambda \delta W) / \partial x^2$  в узловой точке  $(x_{im}, y_m)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_x W_{im} &= \alpha_x \delta_x W_{i+0.5,m} + (1 - \alpha_x) \delta_x W_{i-0.5,m}, \\ \delta_x (\lambda \delta_x W_{im}) &= (\lambda_{i+0.5,m} \delta_x W_{i+0.5,m} - \lambda_{i-0.5,m} \delta_x W_{i-0.5,m}) / \\ & / \left[ (h_{xim} + h_{x,i-1,m}) / 2 \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\alpha_x = h_{x,i-1,m} / (h_{xim} + h_{x,i-1,m})$ ,

$$\lambda_{i+0.5,m} = (\lambda_{i+1,m} + \lambda_{im}) / 2.$$

Производная  $\partial W / \partial y$  в точке  $(x_{im}, y_{m+0.5})$  грани  $y = y_{m+0.5}$  канонического элемента

с погрешностью  $O(h_{xim}^2 + h_{ym}^2)$  определяется по формуле [9]

$$\begin{aligned} \delta_y W_{i,m+0.5} &= \\ &= \frac{(W_{i'',m+1} - W_{im}) h''_{x,m+1} + (W_{i'+1,m+1} - W_{im}) h'_{x,m+1}}{h_{ym} (h'_{x,m+1} + h''_{x,m+1})} - \\ & - \frac{h'_{x,m+1} h''_{x,m+1}}{2h_{ym}} \delta_{xx} W_{i,m} \end{aligned} \quad (29)$$

где  $h'_{x,m+1} = x_{im} - x_{i'',m+1}$ ,  $h''_{x,m+1} = x_{i'+1,m+1} - x_{im}$ . Выражение (29) получено при помощи дифференциальных уравнений [9], определяющих взаимосвязь между производными скалярного поля в направлении осей ортогональных и неортогональных координат.

Абсциссы  $x_{i'',m+1}$  и  $x_{i'+1,m+1}$  узловых точек  $(x_{i'',m+1}, y_{m+1})$  и  $(x_{i'+1,m+1}, y_{m+1})$ , лежащих на прямой  $y = y_{m+1}$  на ближайшем расстоянии от прямой  $x = x_{im}$ , определяются исходя из требования удовлетворения условия

$$\begin{aligned} |x_{i'',m+1} - x_{im}| + |x_{i'+1,m+1} - x_{im}| &= \\ = \min(|x_{s,m+1} - x_{im}| + |x_{s+1,m+1} - x_{im}|), \quad s=1, 2, \dots, I_{m+1}-1. \end{aligned} \quad (30)$$

Если одна из точек  $(x_{i'',m+1}, y_{m+1})$  или  $(x_{i'+1,m+1}, y_{m+1})$  лежит в плоскости  $x = x_{im}$ , то формула для  $\delta_y W_{i,m+0.5}$  переходит в симметричное разностное соотношение, аналогичное выражению для  $\delta_x W_{i+0.5,m}$ .

Разностные выражения производных  $\partial W / \partial y$ ,  $\partial^2 W / \partial y^2$  и  $\partial^2 W / \partial x \partial y$  в узловой точке  $(x_{im}, y_m)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_y W_{im} &= \alpha_y \delta_y W_{i,m+0.5} + (1 - \alpha_y) \delta_y W_{i,m-0.5}, \\ \delta_{yy} W_{im} &= \frac{\delta_y W_{i,m+0.5} - \delta_y W_{i,m-0.5}}{y_{m+0.5} - y_{m-0.5}}, \\ \delta_{xy} W_{im} &= \frac{\delta_y W_{i,m+1} - \delta_y W_{i,m-1}}{x_{im+1} - x_{i,m-1}} \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\alpha_y = h_{y,m-1} / (h_{ym} + h_{y,m-1})$ .

При граничных условиях первого рода температура в граничных точках  $(x_{I_m}, y_m)$ , где  $x_{I_m}$  – координата  $x$  точки пересечения координатной прямой  $y = y_m$  с граничной поверхностью, считается заданной.

Для нахождения температуры  $T_{I_m}^{n+1}$  в некоторой граничной узловой точке, например в точке  $(x_{I_m}, y_m)$ , при граничных условиях второго или третьего рода целесообразно ввести в рассмотрение приграничный элемент, одна из сторон которого образована граничной поверхностью. С точки зрения простоты вычисления

ний, граничный элемент целесообразно выбрать в случае двумерной задачи в виде обобщенного треугольника. Одна сторона образуется границей области и может быть криволинейной, две другие – координатными прямыми. Одна из них параллельна оси  $x$  и проходит через точку  $(x_{I,m+0.5}, y_{m+0.5})$ , если производная  $\Pi_y = (x_{I,m+1} - x_{I,m-1}) / (2h_y) > 0$  и через точку  $(x_{I,m-0.5}, y_{m-0.5})$ , если эта производная меньше нуля. Вторая прямая есть  $y = y_{m-0.5}$ , если  $\Pi_y > 0$  или  $y = y_{m+0.5}$ , если  $\Pi_y < 0$ . Плотности потоков энергии через границы элементов  $y = y_{m-0.5}$ ,  $y = y_{m+0.5}$  определяются по формулам  $q'_{yIm} = \lambda_{I,m-0.5} \delta_y T_{I,m-0.5}$  и  $q''_{yIm} = \lambda_{I,m+0.5} \delta_y T_{I,m+0.5}$ . Уравнение баланса энергии для приграничного элемента треугольной формы при  $\Pi_y < 0$  в соответствии с трехслойной явной разностной схемой [11] можно записать в виде

$$S_{\delta\delta} c \rho \left[ (1 + \theta) \frac{T_{Im}^{n+1} - T_{Im}^n}{l} - \theta \frac{T_{Im}^n - T_{Im}^{n-1}}{l} \right] = \bar{q}_{xIm} h_y + q'_{yIm} \bar{h}_{xm} - q_{\bar{a}} h_{\bar{a}} \quad (32)$$

где  $S_{\delta\delta}$  – площадь треугольного элемента, которая для случая прямолинейности участка  $h_{\bar{a}}$  граничной поверхности, являющейся стороной треугольного элемента, равна  $S_{\delta\delta} = h_y \bar{h}_{xm} / 2$ ;  $\bar{h}_{xm} = \text{abs}(x_{I,m+0.5} - x_{I,m-0.5})$ ;  $q_{\bar{a}}$  – плотность теплового потока на границе области в момент времени  $t_n$ ,  $q_{\bar{a}} = \lambda \partial T(x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}}, t) / \partial v$ . Плотность теплового потока  $\bar{q}_{xim}$  через координатную поверхность  $x = x_{I,m+0.5}$  или  $x = x_{I,m-0.5}$  с погрешностью порядка  $h_{xm}^2$  определяется по разностной формуле

$$\bar{q}_{xim} = \lambda (\alpha_0 T_{Im}^n + \alpha_1 T_{I-1,m}^n + \alpha_2 T_{I-2,m}^n), \quad (33)$$

где  $\alpha_0 = (3h_{xm} - \bar{h}_{xm}) / (5h_{xm}^2 - 4h_{xm} \bar{h}_{xm})$ ,  $\alpha_1 = (1 - 2h_{xm} \alpha_0) / h_{xm}$ ,  $\alpha_2 = -(\alpha_0 + \alpha_1)$ . Для случая, когда  $\bar{h}_{xm} = h_{xm}$ , как и следует быть,  $\bar{q}_{xIm} = \lambda (T_{Im}^n - T_{I-2,m}^n) / (2h_{xm})$ .

С целью упрощения алгоритма численного решения в случае прямолинейности участка  $h_{\bar{a}}$  уравнение баланса (31) может быть преобразовано к виду, аналогичному уравнению баланса (25) для канонического элемента:

$$c \rho \left[ (1 + \theta) \frac{T_{Im}^{n+1} - T_{Im}^n}{l} - \theta \frac{T_{Im}^n - T_{Im}^{n-1}}{l} \right] = \frac{q'_{xIm} - q_{\bar{a}} \cos(x, v)}{0.5 \bar{h}_{xm}} + \frac{q'_{yIm} - q_{\bar{a}} \sin(x, v)}{0.5 h_y} \quad (34)$$

После практически произвольного выбора шагов  $l_t$ ,  $h_{ym}$ ,  $h_{xim}$ , характерного для неявных схем, определяется значение весового параметра  $\theta_T$  в соответствии с условием устойчивости уравнения (26):

$$\theta_{Tm} = (l_T / l_{T0} - 1) / 2 \quad \text{при } l_T / l_{T0} > 1 \quad \text{и} \quad \theta_{Tm} = 0$$

$$\text{при } l_T / l_{T0} \leq 1, \quad (35)$$

где  $l_T = c_v \rho \left[ 2\lambda \left( 1 / h_{xim}^2 + 1 / h_{ym}^2 \right) \right]$ .

Решение уравнений (20) осуществляется методом установления через интервал времени  $\Delta t \geq l_T$ , т.е. в моменты времени  $t_s = s \Delta t$  ( $s = 0, 1, \dots, \Delta t = \text{const}$ ).

Интервал  $\Delta t$  целесообразно выбирать таким, чтобы на нем укладывалось целое число шагов  $l_T$ . Решение осуществляется методом установления. При этом к правым частям уравнений (20) прибавляется производение модуля сдвига  $\mu_1$  и производной  $\partial u_i / \partial \tau$  по фиктивному времени  $\tau$ , выполняющему роль итерационного параметра. Шаг по  $\tau$  выбирается согласно условию  $\tau_n = n l_u$  ( $n = 0, 1, \dots, l_u > 0$ ), причем на слое  $n = 0$  точная функция  $u_{ik_1 k_2 k_3}^n$  принимается равной  $u_{ik_1 k_2 k_3}^s$ .

При достаточно большом числе итераций (шагов  $n$ ) преобразованное таким образом уравнение имеет стационарное решение, которое отвечает моменту времени  $t_{s+1}$ . Метод решения преобразованных к нестационарному виду уравнений (20), как и уравнения (21), базируется на трехслойной явной разностной схеме. Разностные аппроксимации первого из уравнений системы (20) имеет вид

$$(1 + \theta_u) \delta_\tau u_1 - \theta_u \delta_\tau u_1^{n-1} = \sum_{j=1}^3 \delta_{jj} u_1 + \left( 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \sum_{j=1}^3 \delta_{1j} u_j - \left( 2 + 3 \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \alpha \delta_1 T - (2 \varepsilon_{11}^i + \varepsilon_{12}^i + \varepsilon_{13}^i) + \rho \frac{F_1}{\mu_1} F_1 \quad (36)$$

Выражения для разностных производных  $\delta_\tau u_i$ ,  $\delta_i T$ ,  $\delta_j u_i$ ,  $\delta_{jj} u_i$ ,  $\delta_{ij} u_i$  на неравномерной сетке записываются таким же образом, как и для уравнения (21).

Условия устойчивости уравнений (36) находятся при помощи метода условного задания некоторых искоемых функций системы [7]

$$\theta_u = (l_u / l_{u0} - 1) / 2 \quad \text{при } l_u / l_{u0} > 1 \quad \text{и} \quad \theta_u = 0 \quad \text{при } l_u / l_{u0} \leq 1, \quad (37)$$

где  $l_{u0} = 1 / \max \left\{ 2 \left[ 1 / h_{xim}^2 + 1 / h_{ym}^2 + (1 + \mu_2 / \mu_1) / h_j^2 \right] \right\}$ ,  $j = xim, ym$ .

С использованием функций  $u_{ik_1 k_2 k_3}^{n+1}$  и  $T_{k_1 k_2 k_3}^{s+1}$  находятся компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ijk_1 k_2 k_3}^{n+1}$  и интенсивности напряжений  $\sigma_{ik_1 k_2 k_3}^{n+1}$ . Итерации прекращаются, когда функции  $u_{ik_1 k_2 k_3}^{n+1}$  на временных слоях  $n$  и  $n+1$  практически совпадают. При этом сеточным функциям  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_{ij}^i$  на слое  $s+1$  присваиваются значения этих функций на слое  $n+1$  и они служат исходными для расчета искоемых функций на слое  $s+2$ . Если деформации ползучести  $\varepsilon_{ij}^i$  за период  $\Delta t$  превышают некоторое допустимое значение с точки зрения погрешности решения задачи, осуществляется изменение геометрии тела, исходной для временного слоя  $t_{s+2}$ . Для этого в результате суммирования радиусов-векторов

граничных узловых точек в момент  $t_s$  и векторов смещения этих точек вследствие ползучести за время  $\Delta t$ , находится массив координат точек, определяющих геометрию тела в момент времени  $t_{s+1}$  при условии отсутствия внешних нагрузок. На базе этого массива строится регуляризованная разностная сетка, аналогичная (25)

**Ползучесть толстостенной трубы при осесимметричном нагружении.** Описанный метод решения был численно опробован при решении задачи ползучести для однородного достаточно длинного полого цилиндра  $r_0 \leq r \leq R$  с постоянными физическими характеристиками. Начиная с момента  $t=0$  цилиндр подвергается равномерно распределенному давлению  $p(r_0, t) = P(t)$  на внутренней поверхности и  $p(R, t) = p_R(t)$  на внешней. В направлении оси  $z$  к цилиндру приложена нагрузка  $P_z(t)$ . На внутренней и внешней поверхностях цилиндра поддерживаются температуры  $T(r_0, t) = T_1(t)$ ,  $T(R, t) = T_2(t)$ . При  $t=0$  распределение температуры в цилиндре характеризуется функцией  $T(r, 0) = T_0$ .

Физические уравнения для упругих напряжений в цилиндре имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{\dot{}} &= 2\mu_1 \frac{du_r}{dr} + \mu_2 \theta - \eta \alpha T; \\ \sigma_{zz}^{\dot{}} &= 2\mu_1 \frac{du_z}{dz} + \mu_2 \theta - \eta \alpha T; \\ \sigma_{\theta\theta}^{\dot{}} &= 2\mu_1 \frac{u_r}{r} + \mu_2 \theta - \eta \alpha T.\end{aligned}\quad (38)$$

где  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{du_z}{dz}$ , причем  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(t)$ .

Тензор упругих деформаций связан с тензором напряжений уравнениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{rr}^{\dot{}} - \nu(\sigma_{zz}^{\dot{}} + \sigma_{\theta\theta}^{\dot{}})] + \alpha T; \\ \varepsilon_{zz}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{zz}^{\dot{}} - \nu(\sigma_{rr}^{\dot{}} + \sigma_{\theta\theta}^{\dot{}})] + \alpha T; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\dot{}} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{\theta\theta}^{\dot{}} - \nu(\sigma_{rr}^{\dot{}} + \sigma_{zz}^{\dot{}})] + \alpha T.\end{aligned}\quad (39)$$

Тензор скорости деформаций ползучести вычисляется по уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^i &= \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{rr} - \sigma_{\text{н\ddot{o}}}), \quad \dot{\varepsilon}_{zz}^i = \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{zz} - \sigma_{\text{н\ddot{o}}}), \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^i &= \frac{3}{2} \frac{gf}{\sigma_i} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\text{н\ddot{o}}}),\end{aligned}\quad (40)$$

где  $\sigma_{\text{н\ddot{o}}} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta})/3$ . Полная деформация  $\varepsilon_{ij}$  тела согласно (1) складывается из упругой деформации  $\varepsilon_{ij}^{\dot{}}$  и деформации ползучести  $\varepsilon_{ij}^i = \int \dot{\varepsilon}_{ij}^i dt$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta})] + \alpha T + \varepsilon_{rr}^i, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] + \alpha T + \varepsilon_{zz}^i,\end{aligned}\quad (41)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + \alpha T + \varepsilon_{\theta\theta}^i,$$

Разрешая уравнения (22) относительно компонентов тензора напряжений и выражая компоненты тензора  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  через скорости изменения компоненты вектора смещения  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_{\theta}$  при помощи геометрических уравнений получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\mu_1 \frac{du_r}{dr} + \mu_2 \theta - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T - 2\mu_1 \varepsilon_{rr}^i, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu_1 \frac{du_z}{dz} + \mu_2 \theta - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T - 2\mu_1 \varepsilon_{zz}^i, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -2\mu_1 \frac{u_r}{r} + \mu_2 \theta - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T - 2\mu_1 \varepsilon_{\theta\theta}^i,\end{aligned}\quad (42)$$

После подстановки полученных выражений в уравнение равновесия  $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r + d\sigma_{rr}/dr = 0$  для полого цилиндра приходим к уравнению термолзучести в перемещениях

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_r}{r} \right) - \\ - \frac{1}{2\mu_1 + \mu_2} \left[ \frac{2\mu_1}{r} (\varepsilon_{rr}^i - \varepsilon_{\theta\theta}^i) + (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha \frac{dT}{dr} + \right. \\ \left. + 2\mu_1 \frac{d\varepsilon_{rr}^i}{dr} \right] = 0.\end{aligned}\quad (43)$$

Если до момента  $t=0$  тело не подвергалось внешним нагрузкам, то начальное условие для уравнения (43) имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^i(r, z, \theta, 0) = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i(r, z, \theta, 0) = 0, \\ \varepsilon_{zz}^i(r, z, \theta, 0) = 0.\end{aligned}\quad (44)$$

Граничные условия для уравнения (43) можно записать следующим образом

$$2\mu_1 \frac{du_r(r_0, t)}{dr} + \mu_2 \theta(r_0, t) - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T(r_0, t) - \quad (45)$$

$$2\mu_1 \varepsilon_{rr}^i(r_0, t) = P(t);$$

$$2\mu_1 \frac{du_r(R, t)}{dr} + \mu_2 \theta(R, t) - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T(R, t) - \quad (46)$$

$$- 2\mu_1 \varepsilon_{rr}^i(R, t) = p(t);$$

$$\int_{r_0}^R p_{zz}(r, t) 2\pi r dr =$$

$$= \int_{r_0}^R \left[ 2\mu_1 \frac{du_z}{dz} + \mu_2 \theta - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T - 2\mu_1 \varepsilon_{zz}^i \right] 2\pi r dr = P_z(t).\quad (47)$$

Условие (47) служит для нахождения компонента  $\varepsilon_z(t)$  тензора деформаций.

Температурное поле в полом цилиндре определяется уравнениями

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$T(r_0, t) = T_1(t), \quad T(R, t) = T_2(t), \quad T(r, 0) = T_0.\quad (48)$$

Численное решение системы уравнений (40)–(48) проводится на пространственной разностной сетке

$r_i = r_0 + ih$  ( $i=0,1,\dots,I$ ,  $r_I = R$ ). Временные сетки и разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальные уравнения (43) и (48), строятся так же, как и для уравнений (20), (21). В разностном виде уравнения (43)–(48) записываются следующим образом

$$(1 + \theta_T) \delta_t T - \theta_T \delta_t T^{n-1} = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \delta_{rr} T + \frac{1}{r_i} \delta_r T \right) + (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T \left[ \delta_{rr} u_r + \delta_i \left( \frac{u_r}{r} \right) \right], \quad (49)$$

$$T_0^{n+1} = T_1(t_{n+1}), \quad T_I^{n+1} = T_2(t_{n+1}), \quad T_i^0 = T_0. \quad (50)$$

$$(1 + \Omega_u) \delta_t u_i^n - \Omega_u \delta_t u_i^{n-1} = \delta_{rr} u + \delta_r \left( \frac{u}{r} \right) - \frac{1}{2\mu_1 + \mu_2} \left[ \frac{2\mu_1}{r} (\varepsilon_{rr}^i - \varepsilon_{\theta\theta}^i) + (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha \delta_r T + 2\mu_1 \delta_r \varepsilon_{rr}^i \right] \quad (51)$$

$$u_{r,i}^0 = 0, \quad g^0 = 0, \quad \varepsilon_{zz}^0 = 0; \quad (52)$$

$$(2\mu_1 + \mu_2) \delta_r u_0^{n+1} + \mu_2 [u_0^{n+1} / r_0 + \varepsilon_{zz,0}^n] = P(t); \quad (53)$$

$$-(2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T_0^{m+1} - 2\mu_1 (\varepsilon_{rr}^i)_0^n$$

$$(2\mu_1 + \mu_2) \delta_r u_I^{n+1} + \mu_2 [u_I^{n+1} / r_I + \varepsilon_{zz,I}^n] = p(t); \quad (54)$$

$$-(2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T_I^{m+1} - 2\mu_1 (\varepsilon_{rr}^i)_I^n$$

$$\varepsilon_{zz}^{n+1} = \frac{P_z^{m+1} - \pi F}{(2\mu_1 + \mu_2) 2\pi (R^2 - r_0^2)},$$

$$F = h \sum_{i=0}^{i=I-1} (f_i r_i + f_{i+1} r_{i+1}), \quad (55)$$

$$f_i = \mu_2 \left( \delta_r u_i^{n+1} + \frac{u_i^{n+1}}{r_i} \right) - (2\mu_1 + 3\mu_2) \alpha T_0^{m+1} - 2\mu_1 (\varepsilon_{zz}^i)_i^n. \quad (56)$$

Вначале по уравнениям (49)–(50) находится сеточная функция  $T_i^{s+1}$  на временном слое  $t_{s+1}$ . Далее по уравнениям (51)–(56) на том же временном слое определяются после установления численного решения функции  $u_i^{s+1}$  и  $\varepsilon_{zz}^{s+1}$ . Затем вычисляются компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr,i}^{s+1}$ ,  $\sigma_{zz,i}^{s+1}$ ,  $\sigma_{\theta\theta,i}^{s+1}$  по уравнениям (42) и тензора деформаций  $\varepsilon_{rr,i}^{s+1}$ ,  $\varepsilon_{zz,i}^{s+1}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta,i}^{s+1}$  по уравнениям (41). Вследствие ползучести накапливаются необратимые изменения геометрии тела. Они могут быть учтены изменением разностной сетки согласно выражению

$$r_i^{s+1} = r_i^s + l_s (\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^i)^{s+1} r_i^s, \quad (57)$$

либо путем нахождения по (57) смещений граничных поверхностей с последующим построением равномерной пространственной сетки. Как показали численные эксперименты оба варианта коррекции геометрии дают практически одинаковые результаты. После завершения вычислений на слое  $t_{s+1}$  осуществляется процедура присвоения сеточным функциям  $\Psi^{s-1}$  и  $\Psi^s$  значений соответственно  $\Psi^s$  и  $\Psi^{s+1}$ ,  $\Psi = u, \varepsilon_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}$ . Эти значения используются в качестве исходных для первого цикла вычислений на слое  $t_{s+2}$ .

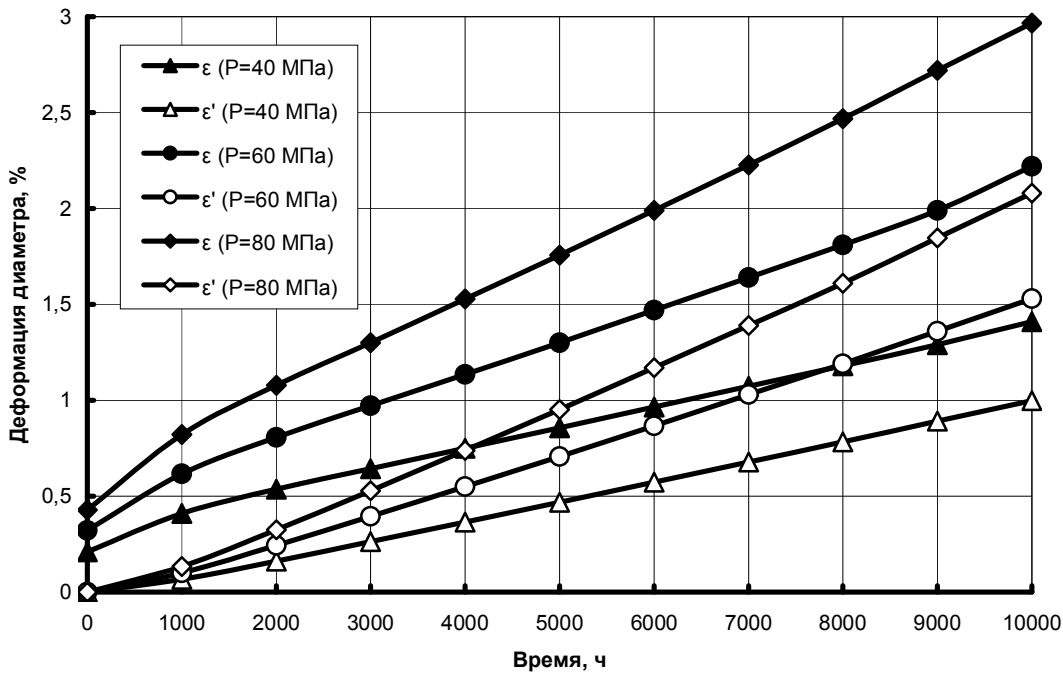


Рис. 1. Графики изменения общей деформации  $\varepsilon$  и деформации ползучести  $\varepsilon' = \varepsilon^i$  наружного диаметра полого цилиндра при различных давлениях  $P$  на его внутренней поверхности



На рисунке приведены результаты расчета общей деформации  $\varepsilon$  (обратимая + необратимая деформации) и деформации ползучести  $\varepsilon' = \varepsilon^i$  (остаточной деформации) наружного диаметров толстостенного стального цилиндра в изотермических условиях в зависимости от времени и внутреннего давления при следующих исходных данных:

$$r_0 = 0,0125 \text{ м}, R = 0,025 \text{ м},$$

$$T = 723 \text{ К}, B = 3,5 \cdot 10^{-3}.$$

Представленные на рисунке кривые имеют вид, характерный для экспериментальных кривых ползучести [3,4]. После завершения второй стадии ползучести происходит монотонное возрастание скорости деформаций, которое соответствует наблюдаемой в экспериментах третьей стадии ползучести. То, что темп возрастания этой скорости несколько ниже наблюдаемого в эксперименте, можно объяснить следующим. По мере возрастания скорости деформаций происходят структурные изменения материала, снижающие его механические свойства. Учет этого обстоятельства связан с некоторым усложнением математической модели.

### Выводы

На базе молекулярно - радиационной теории переноса получено выражение для скорости ползучести материала в функции температуры, внешней нагрузки и плотности. Построена математическая модель неустановившейся ползучести и численный метод ее реализации в области с подвижными границами. Представлены результаты математического моделирования термползучести для толстостенной трубы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. - Москва: Физматгиз, 1960. - 452 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - Москва: Наука, 1966. - 452 с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - Москва: Высшая школа, 1968. - 512 с.
4. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. - Москва: Мир, 1986. 360 с.
5. Никитенко Н.И., Никитенко Н.Н. Численное моделирование взаимосвязанных процессов теплопереноса и ползучести // Тепловое проектирование систем. Сб. науч. трудов. Москва: МАИ, 1990. - С. 31-40.
6. Никитенко Н. И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // ИФЖ. - 2000. - Т.73. - № 4. - С. 851-860.
7. Никитенко Н.И. Теория теплопереноса. - Киев: Наук. Думка. - 1983. - 352с.
8. Никитенко Н.И. Закон интенсивности спектрального излучения частиц и связанные с ним проблемы тепло - и массопереноса. Пятый Минский международный форум по тепло - и массообмену. - Т.1 Тез. Докладов. Минск. - 2004. - С. 204-206.
9. Никитенко Н.И. Об усовершенствовании метода канонических элементов для моделирования процессов переноса в системах с криволинейными границами // ИФЖ. - 1994. - Т.66. - № 6. - С. 710-714.
10. Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н. Метод канонических элементов для моделирования переносных процессов в многосвязных областях произвольной формы границами // ИФЖ. - 1999. - Т.72. - № 5. - С. 837-847.
11. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи теплопереноса. - Киев: Наук. думка, 1988. - 240 с.

пост. 15.06.07

## Математичне моделювання зовнішніх теплових витрат обпалювальної печі

*Н.М. СОРОКОВА*

Ін-т технічної теплофізики НАН України

На основі математичного моделювання теплового стану багатослоєвої стінки обертової випалювальної печі розроблені заходи щодо зниження витрат теплоти в навколишнє середовище, які дозволяють зменшити споживання газового палива.

На основе математического моделирования теплового состояния многослойной стенки вращающейся обжиговой печи разработаны мероприятия по снижению потерь теплоты в окружающую среду, которые позволяют сократить потребление газового топлива.

On the basis of mathematical modelling of a thermal condition of a multilayered wall of rotating furnace for roasting the actions on decrease of heat's losses in an environment are developed. It allows reducing consumption of gas fuel.

Широке застосування при виробництві шамоту, цементу і деяких інших будівельних матеріалів знаходять обпалювальні обертові печі. Вони зазвичай є крупногабаритними і споживають великі об'єми газового

© Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф.,  
Сороковая Н.Н., Кольчик Ю.Н., 2007

Мат. мод № 2 (17), 2007

