Група паралельних перенесень в рімановому просторі

С.Є. САМОХВАЛОВ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Показано, що існує нескінченна група спеціальних автоморфізмів деформованої групи дифеоморфізмів, яка описує паралельні перенесення в ріманових просторах довільної змінної кривизни. Генератори трансляцій такої групи є коваріантними похідними, а певні структурні функції утворюють тензор кривизни.

Показано, что существует бесконечная группа специальных автоморфизмов деформированной группы диффеоморфизмов, которая описывает параллельные переносы в римановых пространствах произвольной кривизны. Генераторы трансляций такой группы являются ковариантными производными, а определённые структурные функции образуют тензор кривизны.

We show that there is an infinite group of special automorphisms of the deformed group of diffeomorphisms, which describes parallel transports in Riemannian spaces of any variable curvature. Generators of translations of such group is the covariant derivatives, and structural functions form the curvature tensor.

На шляху реалізації Ертангенської програми Ф.Клейна [1] для геометричної структури ріманового простору з довільною змінною кривизною в роботі [2] було показано, що ріманова структура на многовиді M природно задається групою його дифеоморфізмів $T_M^{gH}=DiffM$. Інформація про геометричну структуру міститься в законі множення групи T_M^{gH}, який задає правило паралельного перенесення векторів в дотичному розшаруванні TM над M.

В цій статті показано, що *паралельні перенесення векторів в рімановому просторі довільної змінної кривизни описуються нескінченною деформованою групою DT спеціальних автоморфізмів деформованої групи дифеоморфізмів T_M^{gH}, яка задає цю геометричну структуру на многовиді M*. Тут побудовано групу DT і описано деякі її властивості. Зокрема показано, що серед генераторів групи T_M^{gH} є коваріантні похідні, а серед структурних функцій – ріманів тензор кривизни.

1. Групи деформацій узагальнених калібрувальних груп

Розглянемо локальну групу Лі G_M з координатами g^α (індекси $\alpha,\beta,\gamma,\delta$) та законом множення $(\tilde{g}\cdot\tilde{g}')^\alpha=\tilde{\varphi}^\alpha(\tilde{g},\tilde{g}')$, яка діє (можливо неефективно) в координатній області U многовиду M з координатами x^μ (індекси μ,ν,π,ρ,σ) згідно формулі $x'^\mu=\tilde{f}^\mu(x,\tilde{g})$. Локальна нескінченна група Лі G_M^g параметризується гладкими функціями $\tilde{g}^\alpha(x)$, які задовольняють умову

$$det\{d_\nu\tilde{f}^\mu(x,\tilde{g}(x))\}\neq 0 \qquad \forall x\in M\ , \tag{1}$$

де $d_\nu:=d/dx^\nu$. Закон множення в G_M^g визначається за допомогою функцій $\tilde{\varphi}^\alpha$ та $\tilde{f}^\mu$, які задають закон множення в групі Лі G_M і її дію на многовиді M, згідно формулам:

$$(\tilde{g}\times\tilde{g}')^\alpha(x)=\tilde{\varphi}^\alpha(\tilde{g}(x),\tilde{g}'(x'))\ , \tag{2}$$

$$x'^\mu=\tilde{f}^\mu(x,\tilde{g}(x))\ . \tag{3}$$

Формула (3) задає дію групи G_M^g на M.

Означення 1. *Групи G_M^g, що параметризуються гладкими функціями $\tilde{g}^\alpha(x)$ з властивістю (1), та мають закон множення (2), (3), називаються* ***узагальненими калібрувальними групами.***

Перейдемо від групи $G_M^g=\{\tilde{g}(x)\}$ до ізоморфної їй групи $G_M^{gH}=\{g(x)\}$ згідно формулі

$$g^a(x)=H_x^a(\tilde{g}(x)) \tag{4}$$

(латинські індекси приймають ті самі значення, що і відповідні грецькі). Гладкі відображення $H_x:G_M\to G_M$ мають властивості:

1H) $H_x(0)=0 \quad \forall x\in M$;

2H) $\exists\ H_x^{-1}(g):H_x^{-1}(H_x(g))=g\ \ \forall g\in G_M\ ,\ x\in M$.

Закон множення групи G_M^{gH} визначається ізоморфізмом (4) групі G_M^g та формулами (2), (3):

$$\begin{aligned}&(g*g')^a(x)=\varphi^a(x,g(x),g'(x')):=\\&=H_x^a(\tilde{\varphi}(H_x^{-1}(g(x)),H_{x'}^{-1}(g'(x'))))\end{aligned}\ , \tag{5}$$

$$x'^\mu=f^\mu(x,g(x)):=\tilde{f}^\mu(x,H_x^{-1}(g(x)))\ . \tag{6}$$

Формула (6) задає дію групи G_M^{gH} на M.

Означення 2. *Переходи (4) між групами G_M^g та G_M^{gH} називаються* ***деформаціями*** *узагальнених калібрувальних груп, а групи G_M^{gH} -* ***нескінченними (узагальненими калібрувальними) деформованими групами*** [3].

В множині $D=\{H_x\}$ відображень H_x означимо закон множення:

$$(H_1\circ H_2)_x(g):=H_{1x}(H_{2x}(g))\ . \tag{7}$$

З цим законом множення множина D стає групою.

Означення 3. *Відображення $H_x: G_M \to G_M$ з властивостями 1H), 2H) називаються **відображеннями деформації** (функції $H^a_x(g)$ - **функціями деформації**), група $D=\{H_x\}$ відображень деформації з законом множення (7) – **групою деформацій*** [3].

Функції $h(x)^a_\alpha := \partial_{\tilde{\alpha}} H^a_x(\tilde{g})\Big|_{\tilde{g}=0}$, де $\partial_{\tilde{\alpha}} := \partial/\partial\tilde{g}^\alpha$, називаються *коефіцієнтами деформації*.

За допомогою коефіцієнтів розкладу

$$\varphi^a(x,g,g') = g^a + g'^a + \gamma(x)^a{}_{bc} g^b g'^c + \\ + \tfrac{1}{2}\rho(x)^a{}_{bcd} g^d g'^b g'^c + \ldots \tag{8}$$

визначаються функції

$$F(x)^a_{bc} := \gamma(x)^a{}_{bc} - \gamma(x)^a{}_{cb}, \tag{9}$$

$$R(x)^a{}_{dbc} := \rho(x)^a{}_{dbc} - \rho(x)^a{}_{dcb}, \tag{10}$$

які є їх антисиметричними частинами і називаються *структурними функціями* (на відміну від структурних констант для звичайних груп Лі) та *коефіцієнтами кривизни* деформованої групи G^{gH}_M відповідно.

Оскільки $\xi(x)^\mu_a := \partial_a f^\mu(x,g)\Big|_{g=0} = h(x)^\alpha_a \tilde{\xi}(x)^\mu_\alpha$, де $\partial_b := \partial/\partial g^b$ та $h(x)^\alpha_a$ є оберненою до $h(x)^a_\alpha$ матрицею, генератори $X_a := \xi(x)^\mu_a \partial_\mu$ ($\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$) деформованої групи G^{gH}_M виражаються через генератори $\tilde{X}_\alpha := \tilde{\xi}(x)^\mu_\alpha \partial_\mu$ групи G_M за допомогою коефіцієнтів деформації: $X_a = h(x)^\alpha_a \tilde{X}_\alpha$. Отже на інфінітезимальному (алгебраїчному) рівні, деформації зводяться до незалежних в кожній точці $x \in M$ невироджених лінійних перетворень генераторів вихідної групи Лі.

Твердження 1. *Комутатори генераторів деформованої групи G^{gH}_M є лінійними комбінаціями її генераторів зі структурними функціями в якості коефіцієнтів* [3]:

$$[X_a, X_b] = F(x)^c_{ab} X_c. \tag{11}$$

Рівняння (11) узагальнює для нескінченних деформованих груп G^{gH}_M *рівняння Маурера-Картана*

$$[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = \tilde{F}^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{X}_\gamma, \tag{12}$$

де $\tilde{F}^\gamma_{\alpha\beta}$ - структурні константи вихідної групи Лі G_M. Для узагальненої калібрувальної недеформованої групи G^g_M рівняння (11) зводиться до рівняння (12).

2. Деформована група дифеоморфізмів та геометрична структура ріманового простору

Нехай $G_M = T_M$, де T_M - група трансляцій. В цьому випадку $(\tilde{t}\cdot\tilde{t}')^\mu = \tilde{t}^\mu + \tilde{t}'^\mu$ та $x'^\mu = x^\mu + t^\mu$. Група T^g_M параметризується функціями $\tilde{t}^\mu(x)$, які задовольняють умову $det(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \tilde{t}^\mu(x)) \neq 0 \quad \forall x \in M$. Закон множення в T^g_M є

$$(\tilde{t}\times\tilde{t}')^\mu(x) = \tilde{t}^\mu(x) + \tilde{t}'^\mu(x'), \tag{13}$$

$$x'^\mu = x^\mu + \tilde{t}^\mu(x), \tag{14}$$

де (14) задає дію групи T^g_M на M. Цей закон множення визначає, що T^g_M є групою дифеоморфізмів $Diff M$ в адитивній параметризації. Генераторами T^g_M-дії на M є звичайні похідні $\tilde{X}_\mu = \partial_\mu$, що відповідає випадку плоского простору M.

Деформуємо групу $T^g_M \to T^{gH}_M$: $t^m(x) = H^m_x(\tilde{t}(x))$. Закон множення в T^{gH}_M визначається формулами:

$$(t*t')^m(x) = \varphi^m(x, t(x), t'(x')) := \\ = H^m_x(H^{-1}_x(t(x)) + H^{-1}_{x'}(t'(x'))), \tag{15}$$

$$x'^\mu = f^\mu(x, t(x)) := x^\mu + H^{-1\mu}_x(t(x)). \tag{16}$$

Формула (16) задає дію групи T^{gH}_M на M.

Розглянемо розклад

$$H^m_x(\tilde{t}) = h(x)^m_\mu [\tilde{t}^\mu + \tfrac{1}{2}\Gamma(x)^\mu_{\nu\rho} \tilde{t}^\nu \tilde{t}^\rho + \\ + \tfrac{1}{6}\Delta(x)^\mu_{\nu\rho\sigma} \tilde{t}^\nu \tilde{t}^\rho \tilde{t}^\sigma + \ldots]. \tag{17}$$

З використанням формули (15) для коефіцієнтів розкладу (8) знаходимо

$$\gamma^m{}_{kn} = h^m_\mu (\Gamma^\mu_{kn} + h^\nu_k \partial_\nu h^\mu_n), \tag{18}$$

$$\rho^m{}_{lkn} = h^m_\mu (\Delta^\mu_{lkn} - \Gamma^\mu_{ns}\Gamma^s_{kl} - h^\nu_n \partial_\nu \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} h^\kappa_k h^\lambda_l). \tag{19}$$

Отже формули (9), (10) для структурних функцій та коефіцієнтів кривизни деформованої групи T^{gH}_M дають

$$F^n_{\mu\nu} = -(\partial_\mu h^n_\nu - \partial_\nu h^n_\mu), \tag{20}$$

$$R^\mu{}_{\lambda\kappa\nu} = \partial_\kappa \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}. \tag{21}$$

В цих формулах коефіцієнти деформації h^m_μ і h^μ_m ми використали для заміни грецьких індексів на латинські (і навпаки).

З формул (20) та (21) слідує, що групи T^{gH}_M містять в собі інформацію про геометричну структуру простору M, де вони діють. Генератори $X_k = h^\nu_k \partial_\nu$ дії групи T^{gH}_M на M (16) будемо розглядати як афінні репери. Структурні функції $F^n_{\mu\nu}$ відрізняються від *коефіцієнтів неголономності* тільки множником –1/2.

Запишемо закон множення групи T^{gH}_M (15) для інфінітезимального другого множника:

$$(t*\tau)^m(x) = t^m(x) + \lambda(x, t(x))^m{}_n \tau^n(x'), \tag{22}$$

де $\lambda(x,t)^m{}_n := \partial_{n'} \varphi^m(x,t,t')\Big|_{t'=0}$. Формула (22) задає правило додавання векторів заданих в різних точках x та x', або *правило паралельного перенесення* векторного поля τ з точки x' в точку x:

$$\tau^m_{||}(x) = \lambda(x, t(x))^m{}_n \tau^n(x'), \tag{23}$$

або в координатному базисі

$$\tau_{||}^{\mu}(x)=\partial_{\tilde{\nu}}H_x^{\mu}(\tilde{t})\tau^{\nu}(x+\tilde{t}) \qquad (24)$$

де $\partial_{\tilde{\nu}}:=\partial/\partial\tilde{t}^{\nu}$. Ця формула визначає *коваріантну похідну*

$$\nabla_{\nu}\tau^{\mu}(x)=\partial_{\nu}\tau^{\mu}(x)+\Gamma(x)_{\sigma\nu}^{\mu}\tau^{\sigma}(x), \qquad (25)$$

де функції $\Gamma(x)_{\sigma\nu}^{\mu}$, які задають другий порядок в розкладі (17) функцій деформації, грають роль *коефіцієнтів афінної зв'язності* в координатному базисі. Отже коефіцієнти кривизни (21) $R^{\mu}{}_{\lambda\kappa\nu}$ групи T_M^{gH} співпадають з *рімановим тензором кривизни*. Функції $\Gamma(x)_{\sigma\nu}^{\mu}$ симетричні за нижніми індексами, отже скрут дорівнює нулю. Співвідношення (18) означає, що коефіцієнти $\gamma^m{}_{kn}$, які задають другий порядок розкладу (8) закону множення групи T_M^{gH}, є *коефіцієнтами афінної зв'язності в афінному базисі* X_k.

Послідовно виконуючи деформації H_{2x} та H_{1x} для результуючої деформації $H_{3x}=(H_1\circ H_2)_x$ знаходимо:

$$h_{3\mu}^{\ m}=h_{1\ p}^{\ m}h_{2\ \mu}^{\ p}, \quad \Gamma_{3\mu\nu}^{\ m}=\Gamma_{1ps}^{\ m}h_{2\ \mu}^{\ p}h_{2\ \nu}^{\ s}+h_{1\ p}^{\ m}\Gamma_{2\mu\nu}^{\ p}. \qquad (26)$$

Остання формула відповідає поняттю *деформації зв'язності* [4] і пояснює термін «деформація» в нашому випадку.

Припустимо, що генератори $X_k=h_k^{\nu}\partial_{\nu}$ дії групи T_M^{gH} на M (16) є ортонормованим репером, а при паралельному перенесенні векторні поля лише обертаються, тобто

$$\lambda(x,t)^m{}_n\cong\delta_n^m+\gamma^m{}_{kn}t^k\in SO(n) \qquad (27)$$

для інфінітезимального параметру t. Для коефіцієнтів $\gamma^m{}_{kn}$ це дає

$$\gamma_{ksl}+\gamma_{lsk}=0 \qquad (28)$$

(опускання індексів ми виконали за допомогою метрики η_{mn} плоского простору). Рівняння (28) разом з (18) призводить до умови узгодженості зв'язності з метрикою $g_{\mu\nu}=h_{\mu}^m h_{\nu}^n\eta_{mn}$:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}+\Gamma_{\nu\mu\sigma}=\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}. \qquad (29)$$

Разом з умовою відсутності скруту це дає, що коефіцієнти $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ можуть бути записані, як

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}=\tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}g_{\mu\sigma}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \qquad (30)$$

Отже вони співпадають з *символами Крістоффеля* $\{{}^{\rho}_{\mu\nu}\}$.

Твердження 2. *Деформована група T_M^{gH} дифеоморфізмів координатної області $U\in M$, яка побудована при виконанні умов (28) (або (29)), діючи в U задає в ній структуру ріманового простору. Геометричні характеристики простору U (коефіцієнти зв'язності, тензор кривизни, та інші) містяться в законі множення групи T_M^{gH}. Будь яка ріманова структура на U може бути заданою таким чином* [2].

Це твердження реалізує Ерлангенську програму Ф.Клейна для геометричної структури ріманового простору.

3. Паралельні перенесення як автоморфізми деформованої групи дифеоморфізмів

У розглянутому в попередньому розділі підході векторні поля у викривленому рімановому просторі представлялися інфінітезимальними параметрами деформованої групи дифеоморфізмів. Отже паралельні перенесення векторних полів (23) можна інтерпретувати як спеціальні автоморфізми деформованої групи дифеоморфізмів T_M^{gH}.

Розглянемо перетворення

$$\begin{aligned}\tau_{||}^m(x)&:=\tilde{H}_x^m((t*\tau)(x)-t(x))=\\&=\tilde{H}_x^m(\varphi(x,t(x),\tau(x'))-t(x))\end{aligned} \qquad (31)$$

де

$$x'^{\mu}=f^{\mu}(x,t(x)):=x^{\mu}+H_x^{-1\mu}(t(x)) \qquad (32)$$

і $\tilde{H}_x$ є змінними відображеннями деформації, а H_x - фіксованим відображенням деформації, яке було використане при побудові групи T_M^{gH} і яке визначає геометричні характеристики простору, в якому ми розглядаємо паралельне перенесення. Оберненим до (31) перетворенням є:

$$\tau^m(x)=\varphi^m(x,t^{-1}(x),t(\tilde{x})+\tilde{H}_{\tilde{x}}^{-1}(\tau_{||}(\tilde{x}))), \qquad (33)$$

де $\tilde{x}^{\mu}:=f^{\mu}(x,t^{-1}(x))$.

Перейдемо від групи $T_M^{gH}=\{\tau(x)\}$ до групи $T_{||}{}_M^{gH}=\{\tau_{||}(x)\}$, яка ізоморфна їй згідно формулі (31).

Закон множення в групі $T_{||}{}_M^{gH}$ визначається її ізоморфізмом (31) групі T_M^{gH} та законом множення (15), (16) в групі T_M^{gH}. Група $T_{||}{}_M^{gH}$ діє в області U згідно формулі

$$\begin{aligned}\bar{x}^{\mu}&=f_{||}^{\mu}(x,\tau_{||}(\tilde{x})):=f^{\mu}(x,\tau(x))=\\&=f^{\mu}(\tilde{x},t(\tilde{x})+\tilde{H}_{\tilde{x}}^{-1}(\tau_{||}(\tilde{x}))))\end{aligned}. \qquad (34)$$

Підкреслимо, що перетворення координат точки x визначається значенням функції $\tau_{||}(\tilde{x})$ (що параметризують групу $T_{||}{}_M^{gH}$) в іншій точці $\tilde{x}$.

Назвемо групу T_M^{gH} з інфінітезимальними параметрами $\tau(x)$ *інфінітезимальною групою* T_M^{gH}. Для інфінітезимальної групи T_M^{gH} з (31) та (34) слідує:

$$\tau_{||}^m(x)=L(x)_p^m\,\lambda(x,t(x))^p{}_n\tau^n(x'), \qquad (35)$$

$$h_{||}(x)_m^{\mu}=h(x)_k^{\mu}\,\lambda^{-1}(\tilde{x},t(\tilde{x}))^k{}_n L^{-1}(\tilde{x})_m^n, \qquad (36)$$

де $L(x)_p^m:=\partial_p\tilde{H}_x^m(t)\Big|_{t=0}$ і $h_{||}(x)_m^{\mu}:=\partial_m f_{||}^{\mu}(x,\tau)\Big|_{\tau=0}$.

Перетворення (35) (або (36)) утворюють нескінченну групу DT з параметрами $g(x)=(t(x), L(x))$ та законом множення

$$(g*g')^m(x)=\varphi^m(x,t(x),t'(x')), \tag{37}$$

$$\begin{aligned}(g*g')^m_n(x)= \\ =L(x)^m_p\lambda(x,t(x))^p{}_r L'(x')^r_s\cdot \\ \cdot\lambda(x',t'(x'))^s{}_t\lambda^{-1}(x,\varphi(x,t(x),t'(x')))^t{}_n\end{aligned}, \tag{38}$$

де

$$x'^\mu=f^\mu(x,t(x)) \tag{39}$$

і ми вважаємо $g^m(x)=t^m(x)$ та $g^n_m(x)=L(x)^n_m$. Цей закон множення свідчить про те, що група DT має структуру $T^{gH}_M\times)GL^g(n)$. Більше того, можна показати, що група DT є деформованою узагальненою калібрувальною групою $(T\otimes GL(n))^{gH}_M$.

Формула (39) задає дію групи DT в області $U\subset M$, (35) – в дотичному розшаруванні і (36) – в розшаруванні афінних реперів $X_m=h^\mu_m\partial_\mu$ над $U\subset M$.

Означення 4. *Група $DT=\{t(x), L(x)\}$ автоморфізмів (35) інфінітезимальної деформованої групи дифеоморфізмів T^{gH}_M з законом множення (37) – (39), яка діє на дотичному розшаруванні і на розшаруванні афінних реперів над $U\subset M$ згідно формулам (35), (36) відповідно називається **групою паралельних перенесень в рімановому просторі** $U\subset M$.*

Розглянемо структурні функції $F(x)^c_{ab}$ групи паралельних перенесень DT у випадку $a=k$, $b=l$ (що відповідає трансляційним параметрам t). Для $c=m$ з формули (37) знаходимо

$$F^m_{kl}=h^m_\mu(h^\nu_k\partial_\nu h^\mu_l-h^\nu_l\partial_\nu h^\mu_k) \tag{40}$$

а для $c={}^m_n$ з (38) –

$$\begin{aligned}F^m_{nkl}=-\gamma^m{}_{sn}F^s_{kl}+h^\sigma_k\partial_\sigma\gamma^m{}_{ln}- \\ -h^\sigma_l\partial_\sigma\gamma^m{}_{kn}+\gamma^m{}_{ks}\gamma^s{}_{ln}-\gamma^m{}_{ls}\gamma^s{}_{kn}\end{aligned}. \tag{41}$$

Ці рівняння свідчать про те, що структурні функції F^m_{kl} і F^m_{nkl} групи паралельних перенесень DT співпадають зі структурними функціями F^m_{kl} і коефіцієнтами кривизни R^m_{nkl} деформованої групи дифеоморфізмів T^{gH}_M, тобто з коефіцієнтами неголономності (з множником – 2) та рімановим тензором кривизни (записаними в афінному базисі) відповідно.

Генератори X^τ_a дії (35) групи DT на дотичному розшаруванні для $a={}^m_n$ є $(X^{\tau n}_m)^k_l=\delta^k_m\delta^n_l$ та для $a=m$ є

$$(X^\tau_m)^k_l=X_m\delta^k_l+\gamma^k{}_{ml} \tag{42}$$

і співпадають з коваріантними похідними $X^\tau_m=\nabla_m$ в афінному базисі.

Узагальнене рівняння Маурера-Картана (11) для групи паралельних перенесень DT призводить до рівняння

$$[\nabla_k,\nabla_l]^m_n=F^s_{kl}\nabla^m_{sn}+R^m_{nkl}, \tag{43}$$

еквівалентного структурним рівнянням викривленого простору афінної зв‘язності без скруту (у випадку використання умови (28) – ріманового простору):

$$d\omega^m=\omega^n\wedge\omega^m_n, \tag{44}$$

$$d\omega^m_n=\omega^k_n\wedge\omega^m_k+R^m_n, \tag{45}$$

де $\omega^m=h^m_\mu dx^\mu$, $\omega^m_n=\gamma^m_{\mu n}dx^\mu$ і $R^m_n=\frac{1}{2}R^m_{n\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$.

Формула (43) свідчить про те, що $R^m_{nkl}=0$ є необхідною і достатньою умовою того, що множина трансляцій $\{t(x),1\}$ в групі DT утворює підгрупу. Калібрувальні лінійні перетворення $L(x)$ у випадку викривленого простору необхідні для забезпечення групової структури в множині паралельних перенесень DT.

Формула (36) описує рух рухомого репера $X_{||m}=h^\mu_{||m}\partial_\mu$ при паралельному перенесенні з групи DT. Для інфінітезимальних трансляцій t^m (і фінітних лінійних перетворень L^m_n) формула (36) дає

$$X_{||m}=\bar{X}_m-\bar{t}^s\bar{\gamma}^n_{sm}\bar{X}_n, \tag{46}$$

де $\bar{X}_m=L^{-1n}_{\ \ m}X_n$, $\bar{t}^s=L^s_n t^n$ і

$$\bar{\gamma}^n_{sm}=L^n_l(\gamma^l_{rn}L^{-1r}_{\ \ s}L^{-1n}_{\ \ m}+L^{-1n}_{\ \ s}h^\sigma_n\partial_\sigma L^{-1l}_{\ \ m}). \tag{47}$$

Формула (46) може бути використаною для означення коваріантної похідної в термінах рухомого репера:

$$\nabla_{X_s}X_{||m}=\lim_{t^s\to 0}(X_m-X_{||m})/t^s=\gamma^n_{sm}X_n. \tag{48}$$

Припустимо, що групу T^{gH}_M побудовано за умови виконання умови (28) (або (29)). У цьому випадку справедливе наступне.

Твердження 3. *Паралельні перенесення векторних полів у викривленому рімановому просторі описуються групою DT спеціальних автоморфізмів інфінітезимальної деформованої групи дифеоморфізмів T^{gH}_M. Генератори трансляцій групи DT є коваріантними похідними векторних полів, а відповідні структурні функції групи DT утворюють тензор кривизни.*

Структурні рівняння ріманового простору (44), (45) (рівняння Картана) є необхідними і достатніми умовами існування групи DT.

Група DT, як і група T^{gH}_M, містить в собі інформацію про структуру ріманового простору в $U\subset M$. Структура ріманового простору задається в U при інфінітезимальній дії групи DT в дотичному розшаруванні простору U, в той час як завдання ріманової структури в U за допомогою групи T^{gH}_M вимагає розгляду її дії в U, як мінімум, до другого порядку по трансляціям t включно.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 399 - 434.
2. *Самохвалов С.Є.* Теоретико-груповий опис рімахових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 9. – С. 1238 - 1248.
3. *Самохвалов С.Е.* О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 12. – С. 1599 - 1603.
4. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия. – М.: Мир, 1975. – 352 с.

пост. 02.10.07.

