Теорема Куна-Таккера для нелінійної неперервної задачі оптимального розбиття множин

О.М. КІСЕЛЬОВА, М.С. ДУНАЙЧУК

Дніпропетровський національний університет

Вивчається нелінійна неперервна задача оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору на її неперетинні підмножини із розташуванням їх центрів при обмеженнях у формі нерівностей. Наводяться необхідні та достатні умови для названої задачі на базі теореми Куна-Таккера.

Изучается нелинейная непрерывная задача оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидова пространства на его непересекающиеся подмножества с расположением их центров при ограничениях в форме неравенств. Приводятся необходимые и достаточное условия для названной задачи на основе теоремы Куна-Таккера.

A non-linear continuous problem of optimal partitioning of a set Ω from n-measurable Euclidean space into its non-intersected subsets with allocation of their centers at presence of some restrictions in the form of inequalities is studied. There are some indispensable and sufficient conditions given for the called problem on the basis of The Kuhn-Tucker Theorem.

Сучасний стан питання. Одна з актуальних проблем сучасної теорії оптимізації складається в необхідності розв'язання нелінійних задач оптимального розбиття множин (ОРМ). Особливість даного класу задач полягає в нелінійності цільового функціонала й, як наслідок, неможливості використання теорії розв'язання лінійних задач ОРМ. З методів розв'язання задач такого класу слід відокремити методи, що одержали розвиток у роботі [1]. Але ці методи не дають можливості розв'язувати задачі ОРМ із одночасним розташуванням центрів підмножин, невідомих заздалегідь, тому вони не дають можливості розв'язувати всі задачі зазначеного класу. У роботі [2] розглядається теорія для розв'язання лінійних задач оптимального розбиття множин. Дана робота присвячена формулюванню необхідних та достатніх умов для нелінійної неперервної задачі оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору на її неперетинні підмножини з розташуванням їх центрів при наявності обмежень у формі нерівностей для випадку опуклого цільового функціонала, застосовуючи теорію Куна-Таккера [3].

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена, вимірювана за Лебегом множина з n-вимірного евклідового простору E_n.

Сукупність вимірюваних за Лебегом підмножин $\Omega_1,\dots,\Omega_N$ з $\Omega\subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ \operatorname{mes}(\Omega_i\cap\Omega_j)_{i\ne j}=0\ \ i,j=1,\dots,N,$$

де $\operatorname{mes}(\cdot)$ значить міру Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини Ω через Σ_Ω^N, тобто

$$\Sigma_\Omega^N=\{(\Omega_1,\dots,\Omega_N):\ \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ \operatorname{mes}(\Omega_i\cap\Omega_j)_{i\ne j}=0,\ i,j=1,\dots,N\}.$$

Введемо функціонал

$$F((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\tau_1,\dots,\tau_N))=\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i(\int_{\Omega_i}\rho(x)dx)+\int_{\Omega_i}c(x,\tau_i)\rho(x)dx].$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок Ω_i, $i=1,\dots,N$, дорівнює нулю.

Функції $c(x,\tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega\times\Omega$, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\dots,\tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i=1,\dots,N$; функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід'ємна на Ω; $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\dots,\tau_i^{(n)})$ – деяка, невідома заздалегідь, еталонна точка для підмножини Ω_i, $i=1,\dots,N$, яка називається «центром» цієї підмножини; $\varphi_i(\cdot)$, $i=1,\dots,N$ – дійсні, обмежені, опуклі функції свого аргументу.

Під нелінійною задачею ОРМ будемо розуміти наступну задачу.

<u>*Задача 1.*</u> Знайти

$$\min_{\{(\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\tau_1,\dots,\tau_N)\}}F((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\tau_1,\dots,\tau_N))=$$
$$=\min_{\{(\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\tau_1,\dots,\tau_N)\}}\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i(\int_{\Omega_i}\rho(x)dx)+\int_{\Omega_i}c(x,\tau_i)\rho(x)dx] \quad (1)$$

за умови $$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx\le b_i,\ i=1,\dots N, \quad (2)$$

де $\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\}\in\Sigma_\Omega^N$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_N)\in\underbrace{\Omega\times\dots\times\Omega}_{N}\in\Omega^N$,

$\tau_i=(\tau_i^{(1)},\dots,\tau_i^{(n)})\in\Omega$, $i=1,\dots,N$, $x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\in\Omega$; $b_1,\dots,b_N$ – задані дійсні невід'ємні числа, причому виконується умова розв'язності задачі

$$s=\int_{\Omega}\rho(x)dx\le\sum_{i=1}^{N}b_i,\ \ 0\le b_i\le s,\ i=1,\dots,N.$$

Математична модель. Перехід до задачі в термінах характеристичних функцій підмножин. Уводячи характеристичну функцію підмножин Ω_i у вигляді

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_i,\\ 0,\ x\in\Omega\setminus\Omega_i,\end{cases}\quad i=1,\dots,N,$$

та функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau)=\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i((\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx))+\int_{\Omega}c(x,\tau_i)\lambda_i(x)\rho(x)dx], \quad (3)$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вид

$\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x))$, перепишемо задачу 1 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин Ω_i, $i=1,...,N$, тобто в наступному вигляді.

Задача 2. Знайти $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in \Gamma_1^{'}\times\Omega^N$:

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)} I(\lambda(\cdot),\tau), \tag{4}$$

де $\lambda(x)\in\Gamma_1^{'}$ і $\tau\in\Omega^N$,

$$\Gamma_1^{'}=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),...\lambda_N(x):\lambda(x)\in\Gamma_2 \text{ майже всюди (м.в.) для } x\in\Omega;\ \int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\ i=1,...,N\}, \tag{5}$$

$$\Gamma_2=\{\lambda(x):\ \lambda_i(x)=0\vee 1,\ i=1,...,N,\ \sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1 \text{ м.в. для } x\in\Omega\}. \tag{6}$$

Очевидно, $I(\lambda(\cdot),\tau)=F(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\tau)$.

Від задачі 2 з булевими значеннями змінних $\lambda(\cdot)$, що є задачею нескінченновимірного математичного програмування, перейдемо до відповідної задачі з неперервними змінними $\lambda(\cdot)$ із значеннями з відрізка $[0,1]$, тобто розглянемо задачу 3.

Задача 3. Знайти $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in\Gamma_1\times T$:

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times T} I(\lambda(\cdot),\tau), \tag{7}$$

де

$$\Gamma_1=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),...\lambda_N(x):\lambda(x)\in\Gamma \text{ м.в. для } x\in\Omega;\ \int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\ i=1,...,N\}, \tag{8}$$

Γ_1 − обмежена, замкнена, опукла множина гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$,

$$\Gamma=\{\lambda(x):\ 0\le\lambda_i(x)\le 1,\ i=1,...,N,\ \sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1 \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ \lambda(x)\in L_2^N(\Omega)\}, \tag{9}$$

$$x=(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\Omega,\ \lambda(x)\in\Gamma_1,\quad \tau\in\Omega^N.$$

Необхідні та достатні умови оптимальності для задачі 3. Введемо позначення:

$$Y_i(\lambda_i(\cdot))=\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx,\ i=1,...,N, \tag{10}$$

тут функції $Y_i(\lambda_i(\cdot))$, де $i=1,...,N$, лінійні, а тому опуклі на Γ,

$$g(Y_i(\cdot))=Y_i-b_i,\ i=1,...,N. \tag{11}$$

Оскільки функції $Y_i(\lambda_i(\cdot))$, де $i=1,...,N$, опуклі на Γ, то функції $g(Y_i(\cdot))$, де $i=1,...,N$, опуклі на Γ.

Згідно з [1] $\Gamma\in L_2^N(\Omega)$ – замкнена, опукла і обмежена множина. За аналогією з цим твердженням можна доказати наступну лему.

Лема 1. Множина Γ_1 - опукла множина.

Введемо функціонал Лагранжа для задачі 3 наступним чином

$$h(\lambda(\cdot),\tau,\Psi)=I(\lambda(\cdot),\tau)+\sum_{i=1}^N g_i(Y_i)\Psi_i=I(\lambda(\cdot),\tau)+\sum_{i=1}^N\Psi_i(\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^N[\varphi_i(\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx)+\int_\Omega c(x,\tau_i)\lambda_i(x)\rho(x)dx]=\sum_{i=1}^N\Psi_i(\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i), \tag{12}$$

де $(\Psi_1,...\Psi_N)$ – N – вимірний вектор дійсних чисел, $\Psi\in\Lambda$, $\Lambda=\{\Psi=(\Psi_1,...,\Psi_N)\in E_N:\ \Psi_i\ge 0,\ i=1,...,N\}$, $\lambda(x)\in\Gamma$ м.в. для $x\in\Omega$; $\tau\in\Omega^N$.

Означення 1. Пару $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)$ назвемо сідловою точкою функціонала Лагранжа h з (12), якщо

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi)\le h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)\le h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*) \tag{13}$$

для всіх $\lambda(x)\in\Gamma$, для всіх $\Psi\in\Lambda$, для всіх $\tau\in\Omega^N$, тобто в випадку, коли існують та досягаються $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$, $\Psi\in\Lambda$ та $\max\limits_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$, $(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N$, якщо

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*)=\max_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi),$$

або

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\sup_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)=$$
$$=\max_{\Psi\in\Lambda}\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi). \tag{14}$$

Відмітимо два пункти, щодо виду функціоналу Лагранжа h з (12).

1. З опуклості функцій $\varphi_i(\cdot)$, $i=1,...,N$, що входять до складу функціонала (12), в області визначення, лінійності функціоналів $Y_i(\lambda_i(\cdot))=\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx$, $i=1,...,N$, на $L_2(\Omega)$ й властивостей складних функцій випливає, що функціонали $\varphi_i(Y_i(\lambda_i(\cdot)))$, $i=1,...,N$, будуть опуклі по $\lambda_i(\cdot)$ на $L_2(\Omega)$.

2. Згідно з [2], функція

$$\tilde G(\tau)=\int_\Omega\min_{i=1,...,N} c(x,\tau_i)\rho(x)dx, \tag{15}$$

де $c(x,\tau_i)=(\sum_{i=1}^N(x_i-\tau_i^j)^2)^{1/2}$, $j=1,...,N$,

($c(x,\tau_i)$ - евклідова метрика) має наступні властивості:

а) припустима опукла множина $\Omega\times...\times\Omega=\Omega^N$ задачі (15) введенням певних відношень порядку між координатами центрів $\tau_1,\ \tau_2,...,\ \tau_N$ може бути представлена в виді об'єднання скінченного числа l опуклих підмножин $T_1, T_2,...,T_l$, на кожній з яких цільова функція $\tilde G(\tau)$ задачі (15) опукла, має точку локального мінімума;

б) значення цільової функції $\tilde G(\tau)$ задачі (15) в точках локальних мінімумів, кожний з яких належить підмножині множини $\Omega\times...\times\Omega=\Omega^N$, що визначається своїм відношенням порядку, збігаються. Звідси, в цьому випадку задача (15) є одноекстремальною і з будь-якого початкового наближення $\tau^{(0)}$ з точністю до відношення порядку отримуємо глобальний розв'язок.

З наведених вище пунктів 1, 2 беспосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 1. Якщо функції $\varphi_i(\cdot)$, i = 1, …, N, опуклі функції свого аргументу, то при кожному фіксованому $\Psi \in \Lambda$ функціонал $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ із (12) опуклий по $(\lambda(\cdot),\tau)$ на $L_2^N(\Omega)\times T_i,\ i=1,...,l$.

<u>*Зауваження 1.*</u> З опуклості функціонала $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ по $(\lambda(\cdot),\tau)$ на $L_2^N(\Omega)\times T_i,\ i=1,...,\ l$ випливає його неперервність по $(\lambda(\cdot),\tau)$ на $L_2^N(\Omega)\times T_i,\ i=1,...,\ l$, а тому і на $L_2^N(\Omega)\times\Omega^N$.

<u>*Теорема 1.*</u> Задача $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ має розв'язок при кожному фіксованому $\Psi\in\Lambda$.

<u>Доведення</u>. Дійсно, з узагальненої теореми Вейєрштрасса [4] випливає, що неперервний опуклий по $(\lambda(\cdot),\tau)$ функціонал $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ з (12), визначений на просторі $L_2^N(\Omega)\times\Omega^N$, досягає при кожному фіксованому $\Psi\in\Lambda$ свого мінімуму по $(\lambda(\cdot),\tau)$ на будь-якій опуклій, замкнутій, обмеженій множині (у нашім випадку на множині $\Gamma_1\times\Omega^N$).

Не складно довести таку допоміжну лему.

<u>*Лема 2.*</u> Для того, щоб точка $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)\in\Gamma\times\Omega^N\times\Lambda$ була сідловою точкою функції Лагранжа (12), необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні умови:

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)\le h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*)\ \forall\{\lambda(\cdot),\tau\}\in\Gamma\times\Omega^N, \quad (16)$$

$$\lambda_*(\cdot)\in\Gamma_1 \text{ і } \Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i)=0,\ i=1,...,N\ . \quad (17)$$

<u>*Теорема 2.*</u> Нехай $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)\in\Gamma\times\Omega^N\times\Lambda$ - сідлова точка функції Лагранжа $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ виду (12). Тоді точка $\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\}\in\Gamma_1\times\Omega^N$ є розв'язком задачі 3.

<u>Доведення.</u> З умови (17) леми 2 випливає, що $\lambda_*(\cdot)\in\Gamma_1$ і $h(\{\lambda_*,\tau_*\},\Psi^*)=I(\lambda_*,\tau_*)+\sum\limits_{i=1}^{N}\Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_{*i}(x)dx-b_i)=I(\lambda_*,\tau_*)$.

Тоді нерівність (16) набуває вигляду

$$I(\lambda_*,\tau_*)\le h(\{\lambda,\tau\},\Psi^*)=I(\lambda,\tau)+ \\ +\sum_{i=1}^{N}\Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_{*i}(x)dx-b_i),\ \{\lambda,\tau\}\in\Gamma\times\Omega^N. \quad (18)$$

Зокрема, (18) має місце і для всіх $\{\lambda,\tau\}\in\Gamma_1\times\Omega^N$. Але

$\sum\limits_{i=1}^{N}\Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i)\le 0,\ \lambda\in\Gamma_1$,

бо $\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i\le 0$ і $\Psi_i^*\ge 0\ \forall i=1,...,N$, а значить $\Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i)\le 0\ \forall i=1,...,N$.

Тому з (18) випливає, що

$$I(\lambda_*,\tau_*)\le h(\{\lambda,\tau\},\Psi^*)\le I(\lambda,\tau)\ \forall\{\lambda,\tau\}\in\Gamma_1\times\Omega^N,$$

тобто $\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\}\in\Gamma_1\times\Omega^N$ - точка мінімуму функції $I(\lambda(\cdot),\tau)$ на множині $\Gamma_1\times\Omega^N$.

Введемо функціонал:

$$\chi(\lambda(\cdot),\tau)=\sup_{\Psi\in\Lambda}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi), \quad (19)$$

тоді очевидно:

$$\chi(\lambda(\cdot),\tau)=\sup_{\Psi\in\Lambda}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)=\begin{cases}I(\lambda(\cdot),\tau), \text{ якщо } \lambda(\cdot)\in\Gamma_1\\ +\infty, \text{ якщо } \lambda(\cdot)\in\Gamma\setminus\Gamma_1.\end{cases} \quad (20)$$

Позначимо

$$I_*=\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau),\ \Gamma_*\times T_*=\{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N: I(\lambda(\cdot),\tau)=I_*\}. \quad (21)$$

Якщо ця точна нижня грань досягається на $\Gamma_1\times\Omega^N$, то

$$I_*=\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau),\ \Gamma_*\times T_*=\{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N: I(\lambda(\cdot),\tau)=I_*\}. \quad (22)$$

Покладемо $I_*=+\infty$, якщо $\Gamma=\varnothing$, тобто якщо

$$\sup_{\Psi\in\Lambda}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)=+\infty,\ \forall\lambda(\cdot)\in\Gamma_1,\ \forall\tau\in\Omega^N,$$

тобто якщо задача 3 не розв'язна.

Якщо задача 3 розв'язна, покладемо $I_*>-\infty,\ \Gamma_*\ne\varnothing,\ T_*\ne\varnothing$.

Розглянемо задачу, яку назвемо прямою задачею:

$$\chi(\lambda(\cdot),\tau)\to\inf,\ (\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N. \quad (23)$$

$$\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\chi(\lambda(\cdot),\tau)=\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\begin{Bmatrix}I(\lambda(\cdot),\tau),\ \lambda(\cdot)\in\Gamma_1\\ +\infty,\ \lambda(\cdot)\in\Gamma\setminus\Gamma_1\end{Bmatrix}= \\ =\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau)=I_*.$$

В тому випадку, коли досягається $\inf\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau)$, він дорівнює $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau)=I_*$.

Тобто задача 3 рівносильна задачі (23).

Тоді, якщо задача 3 розв'язна, то розв'язною є і задача (23) і $\inf\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\chi(\lambda(\cdot),\tau)=I_*$.

Тоді $\Gamma_*\times T_*$ можна переписати в виді

$$\Gamma_*\times T_*=\{\lambda(\cdot)\in\Gamma,\ \tau\in\Omega^N:\ \chi(\lambda(\cdot),\tau)=I_*\}.$$

Введемо функціонал:

$$G(\Psi)=\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}h(\lambda(\cdot),\tau),\ \Psi\in\Lambda. \quad (24)$$

Розглянемо задачу:

$$G(\Psi)\to\sup,\ \Psi\in\Lambda. \quad (25)$$

Задача (25) називається двоїстою задачею до задачі (23), а, значить, у випадку, коли досягається максимум функції $G(\Psi)$, двоїстою до задачі 3, на множині Λ_1, тобто $\Psi\in\Lambda_1=\{\Psi\in\Lambda:\ G(\Psi)>-\infty\}$.

Позначимо $G^*(\Psi)=\sup\limits_{\Psi\in\Lambda}G(\Psi),\ \Lambda^*=\{\Psi\in\Lambda:\ G(\Psi)=G^*\}$.

Покладемо $G^*(\Psi)=-\infty$, якщо $\Lambda_1=\varnothing$, тобто

$$\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}h(\lambda(\cdot),\tau)=-\infty,\ \forall\Psi\in\Lambda.$$

Якщо двоїста задача (25) є розв'язною, то $G^*(\Psi)<+\infty,\ \Lambda^*\ne\varnothing$.

В самому загальному випадку, незалежно від того, є розв'язними пряма та двоїста задачі чи ні, можна записати:

$$I_*=\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\sup_{\Psi\in\Lambda}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi), \quad (26)$$

$$G^*=\sup_{\Psi\in\Lambda}\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi). \quad (27)$$

Теорема 3. Має місце нерівність:

$$I(\lambda(\cdot),\tau) \ge G(\Psi)\ ,\ \forall\lambda(\cdot)\in\Gamma_1,\ \forall\tau\in\Omega^N,\ \forall\Psi\in\Lambda\ , \quad (28)$$

причому, якщо $\Gamma_1 \ne 0,\ \Lambda_1 \ne 0$,

$$I_* \ge G^*\ . \quad (29)$$

Доведення. $\forall\lambda(\cdot)\in\Gamma_1,\ \forall\tau\in\Omega^N,\ \forall\Psi\in\Lambda$ маємо

$$I(\lambda(\cdot),\tau) \ge I(\lambda(\cdot),\tau) + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\Psi_i}_{\ge 0} \underbrace{(\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i)}_{\le 0} =$$

$$= h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi) \ge \inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi) = G(\Psi),$$

Тобто $I(\lambda(\cdot),\tau) \ge G(\Psi)$.

Означення 2. Множина Γ_1 називається регулярною, якщо всі обмеження $\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i) \le 0,\ i=1,\dots,N$, є регулярними на Γ , тобто

$$\forall i=1,\dots,N:\ \exists\lambda^{(i)}\in\Gamma:\ \int_\Omega \rho(x)\lambda_i^{(i)}(x)dx - b_i < 0\ . \quad (30)$$

Означення 3. Вектор $\Psi^*\in\Lambda$ називається вектором Куна-Таккера задачі 3, якщо

$$I_* \le I(\lambda(\cdot),\tau) + \sum_{i=1}^{N} \Psi_i^*(\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i) = \quad (31)$$
$$= h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*),\ (\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N .$$

Нескладно довести дві поміжні леми.

Лема 3. Нехай

$$f_0(\lambda(\cdot),\tau), f_1(\lambda(\cdot)) = \int_\Omega \rho(x)\lambda_1(x)dx - b_1,\dots, f_N(\lambda(\cdot)) = \int_\Omega \rho(x)\lambda_N(x)dx - b_N$$

- опуклі функції на Γ_1 . Якщо система

$$I(\lambda(\cdot),\tau) < 0\ , \quad (32)$$

$$f_i(\lambda(\cdot)) = \int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i < 0,\ i=1,\dots,N, \quad (33)$$

не має розв'язків на Γ_1 , а її підсистема (33) має розв'язки, тоді існують числа $\Psi_0>0, \Psi_1\ge 0,\dots,\Psi_N\ge 0$ такі, що

$$\Psi_0 I(\lambda(\cdot),\tau) + \sum_{i=1}^{N} \Psi_i (\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i) \ge 0, \text{ де } (\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N . \quad (34)$$

Зауваження 2. У співвідношенні (34) можна вважати $\Psi_0 = 1$. Для цього досить всі його доданки поділити на $\Psi_0 > 0$.

Лема 4. Нехай у задачі 3 існує $\bar\lambda(\cdot)\in\Gamma$ така, що

$$\int_\Omega \rho(x)\bar\lambda_i(x)dx - b_i < 0,\ i=1,\dots,N\ ,$$

тоді вектор Куна-Таккера $\Psi^*\in\Lambda$ існує.

Зауваження 3. Якщо існує пара $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in\Gamma\times\Omega^N$, яка є розв'язком задачі 3, тобто $I_* = I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau)$, то існування вектора Куна-Таккера Ψ^* випливає безпосередньо з умови існування сідлової точки $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*)\in\Gamma\times\Omega^N\times\Lambda$ для функції Лагранжа.

З леми 4 та теореми 3 випливає наступна теорема.

Теорема 4 (двоїстості). Нехай множина Γ_1 в задачі 3 є регулярною. Якщо $I_* > -\infty$, або, якщо пряма задача має розв'язок, то множина розв'язків двоїстої задачі (25) не порожня і співпадає з множиною $\{\Psi^*\}$ векторів Куна-Таккера задачі 3. При цьому має місце співвідношення двоїстості:

$$I_* = G^*\ , \quad (35)$$

або $$\inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} \sup_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi) = \sup_{\Psi\in\Lambda} \inf_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi). \quad (36)$$

Теорема 5. Нехай множина Γ_1 задовільняє умову регулярності. Якщо припустима множина Λ_1 двоїстої задачі (25) не порожня, то двоїста задача має розв'язок. Якщо $\Lambda = \varnothing$, то $I_* = -\infty$.

Доведення. Якщо $\Lambda_1 \ne \varnothing$, то $I_* \ge G^* > -\infty$ в силу теореми 3. Тоді за теоремою 4 задача (25) має розв'язок.

Якщо $\Lambda_1 = \varnothing$, то, згідно з теоремою 4, випадок $I_* > -\infty$ неможливий.

Теорема 6 (Куна-Таккера в формі двоїстості). Нехай множина Γ_1 в задачі 3 задовільняє умову регулярності. Для того, щоб пара $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in\Gamma_1\times\Omega^N$ була розв'язком задачі 3, необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\Psi^*\in\Lambda$ такий, що виконується співвідношення двоїстості:

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = G(\Psi^*)\ , \quad (37)$$

яке рівносильне умовам:

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) = \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*)\ , \quad (38)$$

$$\Psi_i^*(\int_\Omega \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i) = 0,\ i=1,\dots,N\ . \quad (39)$$

Множина векторів $\Psi^*\in\Lambda$, яка задовільняє (37), співпадає з множиною розв'язків двоїстої задачі (25) або з множиною векторів Куна-Таккера прямої задачі 3.

Доведення. Необхідність. Якщо $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in\Gamma_1\times\Omega^N$ - розв'язок задачі 3, тоді, згідно з теоремою 4, задача (25) має розв'язок, і будь-який її розв'язок Ψ^* задовільняє умову $I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = I_* = G^* = G(\Psi^*)$, тобто має місце (37).

Достатність. Нехай існує вектор $\Psi^*\in\Lambda$ такий, що виконується (37). Тоді $\forall(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N$, застосовуючи нерівність теореми 3: $I(\lambda(\cdot),\tau) \ge G(\Psi)$, отримуємо $I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = G(\Psi^*) \le I(\lambda(\cdot),\tau)$, звідси $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)$ - розв'язок задачі 3. Аналогічно $\forall\Psi\in\Lambda_1$ маємо: $G(\Psi^*) = I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) \ge G(\Psi)$, звідси Ψ^* - розв'язок задачі (25).

Доведемо, що рівність (37) еквівалентна умовам (38), (39). Нехай має місце (37). Тоді за означенням функції $G(\Psi)$, маємо

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = G(\Psi^*) \le I(\lambda(\cdot),\tau) + \sum_{i=1}^{N} \Psi_i^*(\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx - b_i),\ (\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N . \quad (40)$$

При $\lambda(\cdot)=\lambda_*(\cdot),\ \tau=\tau_*$: $I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) \le I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) + \sum_{i=1}^{N} \Psi_i^*(\int_\Omega \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i)$

або $$\sum_{i=1}^{N} \Psi_i^*(\int_\Omega \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i) \ge 0\ .$$

Але $\lambda_*(\cdot) \in \Gamma_1 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i \le 0 \ \forall i = 1,...,N$,

і з урахуванням того, що $\Psi_i^* \ge 0, \ i = 1,...,N$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{N} \Psi_i^* (\int\limits_{\Omega} \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i) = 0 , \qquad (41)$$

тобто виконано (39).

Із (41), з урахуванням означення функції Лагранжа, випливає:

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) = I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) + \sum_{i=1}^{N}\Psi_i^*(\int\limits_{\Omega}\rho(x)\lambda_{*i}(x)dx - b_i) = I(\lambda_*(\cdot),\tau_*). \quad (42)$$

Тоді (40) можна записати в виді

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) \le h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) \le h(\{\lambda(\cdot),\tau_*\},\Psi^*), \ (\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma \times \Omega^N,$$

А це те ж, що і (38).

Нехай тепер виконані умови (38), (39). Із (39) випливає (41), а, звідси, і (42). Тоді (38) набуває виду:

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) = I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi^*) = G(\Psi^*),$$

тобто виконано (37).

<u>*Теорема 7.*</u> Для того, щоб виконувалися умови

$$\Gamma_* \ne \varnothing, \ T_* \ne \varnothing, \ \Psi^* \ne \theta_N, \ I_* = G^*, \qquad (43)$$

необхідно і достатньо, щоб функція Лагранжа $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$, де $(\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma \times \Omega^N, \Psi \in \Lambda$, мала сідлову точку на $\Gamma \times \Omega^N \times \Lambda$.

Множина $S \subset \Gamma \times \Omega^N \times \Lambda$ сідлових точок функції $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ на $\Gamma \times \Omega^N \times \Lambda$ співпадає з множиною $\Gamma_* \times T_* \times \Lambda^*$, тобто $S = \Gamma_* \times T_* \times \Lambda^*$.

Доведення теореми 7 випливає з попередніх теорем.

<u>*Наслідки з теореми 7.*</u>

З теореми 7 випливає, що наступні 4 твердження еквівалентні:

1) пара $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) \in \Gamma \times \Omega^N \times \Lambda$ - сідлова точка функції $h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi)$ на $\Gamma \times \Omega^N \times \Lambda$;
2) виконується співвідношення (43);
3) виконується рівність
$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = \chi(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = G(\Psi^*) ;$$
4)
$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\Psi^*) = \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} \max_{\Psi\in\Lambda} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi) =$$
$$= \max_{\Psi\in\Lambda} \max_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N} h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\Psi).$$

Повернемось до задачі 2. Можна показати по аналогії з [5], що при будь-якому фіксованому $\tau \in \Omega^N$ обмежена, замкнена , опукла множина Γ_1 гільбертова простору $L_2(\Omega)$ слабо компактна і (згідно з теоремою Крейна –Мільмана) містить хоча б одну граничну точку. Також, аналогічно тому, як це робиться в [5], можна показати, що серед множини точок Γ_1, в яких опуклий відносно $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda,\tau)$, для якого виконується умова сильної регулярності з [6], досягає при кожному фіксованому $\tau \in \Omega^N$ мінімального по $\lambda(\cdot)$ значення на множині Γ_1, знайдеться хоча б одна гранична точка множини Γ_1. Відмітимо також, що, згідно з [5], граничні точки множини Γ_1 є характеристичними функціями деяких підмножин $\Omega_i, \ i = 1,...,N$, що образують розбиття множини Ω при будь-якому фіксованому $\tau \in \Omega^N$. Тоді, можемо зробити вивод, що якщо функціонал $I(\lambda,\tau)$ опуклий по $\lambda(\cdot)$ на множині Γ_1, при виконанні умови сильної регулярності з [6] множина перших компонент $\lambda_*(\cdot)$ розв'язків задачі 2 містить множину розв'язків задачі 1 при будь-якому фіксованому $\tau \in \Omega^N$, тоді множина розв'язків задачі 2 (а тому і задачі 2) містить множину розв'язків задачі 3.

Висновки

Сформульовано необхідні та достатні умови для неперервних нелінійних задач ОРМ із розташуванням центрів підмножин, що застосовуються при розв'язанні цілого ряда практичних задач, таких як нескінченновимірні транспортні задачі і нескінченновимірні задачі розташування підприємств із одночасним розбиттям даного регіону, непрерервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується одним підприємством, із метою мінімізації транспортних і виробничих витрат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ус С. А. Решение одного класса бесконечномерных задач оптимизации: Автореф. дис. к-та физ.-мат. наук: Х., 1992.
2. Киселёва Е. М., Шор Н. З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
4. А. Балакришнан. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1974. – 260 с.
5. Киселёва Е. М. Решениезадачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств// Журнал вычислительной математики и математической физики.-1989.-№5.-С.712.
6. Трухаев Р. И., Хоменюк В. В. Теория неклассических вариационных задач. – Ленинград: ЛГУ, 1971. – 168 с.

пост. 15.06.07.

