Канонічні деформовані групи дифеоморфізмів та скінченні паралельні перенесення в ріманових просторах

С.Є. САМОХВАЛОВ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Показано, що скінченні паралельні перенесення векторів в ріманових просторах, які задаються законом множення в деформованих групах дифеоморфізмів, еквівалентні послідовності інфінітезимальних паралельних перенесень векторів вздовж геодезичних.

Показано, что конечные параллельные переносы векторов в римановых пространствах, которые задаются законом умножения в деформированных группах дифеоморфизмов, эквивалентны последовательности инфинитезимальных параллельных переносов векторов вдоль геодезических.

We show that finite parallel transports of vectors in Riemannian spaces, which are determined by the multiplication law in the deformed groups of diffeomorphisms, and sequences of infinitesimal parallel transports of vectors along geodesics are equivalent.

При здійсненні теоретико-групового опису просторів афінної зв'язності без скруту та ріманових просторів за допомогою деформованих груп дифеоморфізмів Γ_T^H в роботі [1] було введено поняття паралельного перенесення векторів на скінченну, а не тільки інфінітезимальну відстань $\tilde{t}=x'-x$, яке випливало з закону множення в групах Γ_T^H. З іншого боку, в класичному підході скінченні паралельні перенесення генеруються з інфінітезимальних при русі вздовж кривих [2], причому в викривленому просторі результат залежить від обраної кривої. При інфінітезимальних зрушеннях $\tilde{t}$ обидва перенесення дають однаковий результат, причому поле афінних реперів та коефіцієнти афінної зв'язності, котрі задаються дією деформованої групи дифеоморфізмів Γ_T^H, визначаються першими двома порядками в розкладі функцій деформації за зрушеннями $\tilde{t}$, а всі більш високі порядки в просторах афінної зв'язності залишаються невизначеними, хоча й впливають на результат скінченних паралельних перенесень.

В даній роботі показано, що вимоги того, щоби для довільних двох точок x і x' в довільно викривленому просторі існувала хоча б одна крива що їх з'єднує, для якої послідовність інфінітезимальних паралельних перенесень давала би той же результат, що і скінченне паралельне перенесення (яке задається законом множення деформованої групи дифеоморфізмів Γ_T^H) достатньо для доведення того, що така крива (локально) єдина і є геодезичною. При цьому похідні від функцій деформації в напрямку геодезичної є першими інтегралами системи диференціальних рівнянь, які її задають. Останнім функції деформації (а не тільки перші два їх порядки в розкладі по зрушенням $\tilde{t}$) однозначно визначаються за полем афінних реперів та за коефіцієнтами афінної зв'язності, отже скінченне паралельне перенесення на відстань $\tilde{t}=x'-x$, яке задається законом множення групи Γ_T^H - єдине і дає результат паралельного перенесення вздовж геодезичної, що з'єднує точки x і x'.

Групи Γ_T^H, одержані такими деформаціями, є певним узагальненням скінченнопараметричних канонічних груп Лі [3] на нескінченний випадок і тому також називаються тут канонічними, як і деформації, за допомогою яких вони будуються.

В рімановому просторі функції деформації (в тому числі і другий їх порядок в розкладі за зрушеннями, який задає зв'язність) повністю визначаються за полем ортонормованих реперів вимогою того, щоби при скінченних паралельних перенесеннях теоретико-груповим способом вектори не змінювали своєї довжини, а лише оберталися [1]. В даній роботі показано, що такі деформації є канонічними.

Показано також, що в рімановому просторі, де геодезичні в натуральній параметризації є екстремалями функціоналу енергії, який визначається метрикою, функція центральних полів екстремалей, що виходять з кожної точки [4] (функція дії) однозначно (з точністю до вибору узгодженого з метрикою поля ортонормованих реперів) визначає функції деформації. Більше того, рівняння Гамільтона-Якобі, яке задовольняє функція дії, для функцій деформації зводиться до рівняння, що слідує з вимоги незмінності довжини вектора при скінченних паралельних перенесеннях.

Знайдений зв'язок перших інтегралів рівнянь геодезичних, а також функції дії з функціями деформації дає нове їх розуміння і може мати прикладне значення, зокрема в теорії гравітації.

У даній статті використовуються ті ж позначення і припущення, що і в [1]. Зокрема, всі співвідношення одержуються в межах однієї координатної області в фіксованих, хоча й довільних координатах.

1. Деформовані групи дифеоморфізмів

Хай в координатній області O з координатами x^μ (координатні індекси вибиратимуться з грецького алфавіту) діє локальна група дифеоморфізмів в адитивній параметризації $\Gamma_T=\{\tilde{t}(x)\}$ (*недеформована група дифеоморфізмів*) [1] за формулою

$$x'^\mu=x^\mu+\tilde{t}^\mu(x).$$

Гладкі функції $\tilde{t}^\mu(x)$, що параметризують групу Γ_T, задовольняють умову $\det\{\delta_\nu^\mu+\partial_\nu\tilde{t}^\mu(x)\}\neq 0$, $\forall x\in O$, де $\partial_\nu:=\partial/\partial x^\nu$, а закон множення в ній $\tilde{t}''=\tilde{t}\times\tilde{t}'$ задається формулою:

$$\tilde{t}''^{\mu}(x)=\tilde{t}^{\mu}(x)+\tilde{t}'^{\mu}(x')\,. \tag{1}$$

Деформована група дифеоморфізмів $\Gamma_T^H=\{t(x)\}$ [1] параметризується функціями $t^m(x)$ (для них будемо використовувати індекси з латинського алфавіту) і одержується з групи Γ_T ізоморфізмом, який задається *деформацією* H згідно формулі

$$t^m(x)=H^m(x,\tilde{t}(x)) \tag{2}$$

за допомогою гладких *функцій деформації* $H^m(x,\tilde{t}(x))$ з властивостями

$1H)$ $H^m(x,0)=0$, $\forall x\in O$;

$2H)$ $\exists$ функції $K^{\mu}(x,t(x))$:

$$K^{\mu}(x,H(x,\tilde{t}(x)))=\tilde{t}^{\mu}(x)\,,\ \forall x\in O\,,\ \tilde{t}\in\Gamma_T\,.$$

Функції $t^m(x)$ задовольняють умову $\det\{\delta_\nu^\mu+d_\nu K^\mu(x,t(x))\}\neq 0$, $\forall x\in O$, де $d_\nu:=d/dx^\nu$. Функції $K^{\mu}(x,t(x))$, які фігурують у властивості $2H$), задають зворотній перехід $\Gamma_T^H\to\Gamma_T$. Закон множення $t''=t*t'$ в групі Γ_T^H визначається законом множення (1) в групі Γ_T та ізоморфізмом (2):

$$t''^m(x)=\varphi^m(x,t(x),t'(x')):=$$
$$=H^m(x,K(x,t(x))+K(x',t'(x')))\,, \tag{3}$$

де

$$x'^{\mu}=f^{\mu}(x,t(x)):=x^{\mu}+K^{\mu}(x,t(x))\,. \tag{4}$$

Група Γ_T^H гладко діє в області O за формулою (4).

За допомогою функцій $\varphi(x,t,t')$, що задають закон множення (3), визначаються допоміжні матриці:

$$\lambda(x,t)^m{}_n:=\partial_{n'}\varphi^m(x,t,t')\Big|_{t'=0}=$$
$$=h(x+\tilde{t})_n^{\mu}\,\partial_{\tilde{\mu}}H^m(x,\tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=K(x,t)} \tag{5}$$

$$\mu(x,t)^m{}_n:=\partial_{n'}\varphi^m(x,t',t)\Big|_{t'=0}=$$
$$=h(x)_n^{\nu}(\delta_\nu^\mu+\partial_\nu\tilde{t}^{\mu})\partial_{\tilde{\mu}}H^m(x,\tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=K(x,t)}\,, \tag{6}$$

де $h(x)_m^{\mu}:=\partial_m K^{\mu}(x,t)\Big|_{t=0}$ і $\partial_m:=\partial/\partial t^m$ (індекс зі штрихом означає диференціювання по t', а з тильдою – по $\tilde{t}$).

Підкреслимо, що незважаючи на те, що деформації означаються як ізоморфізми групи дифеоморфізмів, в загальному випадку вони не можуть бути скомпенсованими координатними перетвореннями в області O, які призводять лише до внутрішніх автоморфізмів групи дифеоморфізмів. Як показано в роботі [1], деформована група дифеоморфізмів Γ_T^H задає своєю дією в області O геометричну структуру простору афінної зв'язності без скруту, і деформації ведуть до зміни її характеристик, зокрема до викривлення.

Генератори $X_m=h(x)_m^{\mu}\partial_\mu$ дії (4) групи Γ_T^H задають в O поле афінних реперів, причому матриці $h(x)_m^{\mu}$ і обернені до них матриці $h(x)_\mu^m$ здійснюють перехід між координатним і афінним реперами. Елементам групи Γ_T^H зіставляються векторні поля $t=t^m(x)X_m$ і параметри $t^m(x)$ групи Γ_T^H виступають в якості компонентів цих полів в базисі X_m. Закон множення (3) в групі Γ_T^H, записаний для елементів t і τ у випадку інфінітезимального другого множника

$$(t*\tau)^m(x)=t^m(x)+\lambda(x,t(x))^m{}_n\tau^n(x')\,,$$

визначає правило додавання векторів, заданих в різних точках, або *правило паралельного перенесення* векторного поля τ з точки x' в точку x *на скінченну відстань* $x'-x=\tilde{t}=K(x,t)$:

$$\tau_{||}^m(x)=\lambda(x,t)^m{}_n\tau^n(x')\,.$$

В координатному базисі це співвідношення приймає вигляд:

$$\tau_{||}^{\mu}(x)=\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\nu}\tau^{\nu}(x')=\partial_{\tilde{\nu}}H^{\mu}(x,\tilde{t})\tau^{\nu}(x')\,, \tag{7}$$

(тут, зокрема, $H^{\mu}(x,\tilde{t})=h(x)_m^{\mu}H^m(x,\tilde{t})$) або, при інфінітезимальному $\tilde{t}$:

$$\tau_{||}^{\mu}(x)=\tau^{\mu}(x)+\tilde{t}^{\nu}(x)\nabla_\nu\tau^{\mu}(x)\,,$$

де

$\nabla_\nu\tau^{\mu}(x)=\partial_\nu\tau^{\mu}(x)+\Gamma(x)_{\sigma\nu}^{\mu}\tau^{\sigma}(x)$ – коваріантна похідна, причому функції

$$\Gamma(x)_{\sigma\nu}^{\mu}:=\partial_{\tilde{\sigma}\tilde{\nu}}^2H^{\mu}(x,\tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0} \tag{8}$$

здобувають геометричний смисл коефіцієнтів афінної зв'язності (без скруту) в координатному базисі. Більш високі порядки розкладу функції $H^{\mu}(x,\tilde{t})$ по $\tilde{t}$ на зв'язність не впливають, хоча, як слідує з формули (7), визначають результат скінченних паралельних перенесень, отже потребують конкретизації, що і зроблено в наступному розділі роботи. Антисиметрична частина

$$R^m{}_{lkn}:=\rho^m{}_{lkn}-\rho^m{}_{lnk} \tag{9}$$

коефіцієнтів $\rho^m{}_{lkn}:=\partial_{lk}^2\mu(x,t)^m{}_n\Big|_{t=0}$ (тут і далі залежність від x, де вона очевидна, явно не показується), будучи записаною в координатному базисі, має вигляд [1]:

$$R^{\mu}{}_{\lambda\kappa\nu}=\partial_\kappa\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}-\partial_\nu\Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu}+\Gamma_{\kappa\sigma}^{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}-\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma}\,, \tag{10}$$

отже є тензором кривизни Рімана - Крістоффеля.

В рімановому просторі функції деформації задовольняють рівняння

$$\partial_{\tilde{\mu}}H^{\rho}(x,\tilde{t})\partial_{\tilde{\nu}}H^{\sigma}(x,\tilde{t})g(x)_{\rho\sigma}=g(x+\tilde{t})_{\mu\nu}\,, \tag{11}$$

яке слідує з вимоги того, щоб при скінченних паралельних перенесеннях вектори не змінювали своєї довжини, а лише оберталися. Рівняння (11) дозволяє за метрикою однозначно визначити функції деформації в координатному базисі $H^{\mu}(x,\tilde{t})$, зокрема їх другий порядок в розкладі по $\tilde{t}$, тобто згідно (8) – коефіцієнти афінної зв'язності, які стають рівними символам Крістоффеля:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}=\tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\mu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu})\,. \tag{12}$$

2. Канонічні деформації

Припустимо, що група Γ_T^H є такою, що між довільними двома точками x, $x'\in O$ існує параметрична крива $x(s)$, $s\in I=[0,T]$: $x(0)=x$, $x(T)=x'$, вздовж якої всі дотичні до неї вектори $\tau(s):=\dot{x}(s)$ (крапкою позначено диференціювання по s) паралельні між собою в смислі скінченних паралельних перенесень, тобто згідно (7)

$$\tau^{\mu}(s)=\lambda(x(s),\tilde{t}(s,s'))^{\mu}{}_{\nu}\tau^{\nu}(s'), \quad \forall \; s, s'\in I, \quad (13)$$

де $\tilde{t}(s,s'):=x(s')-x(s)$. Умова (13) для функцій деформації приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\tau^{\mu}(s)&=\partial_{\tilde{\nu}}H^{\mu}(x(s),\tilde{t}(s,s'))\tau^{\nu}(s')=\\&=\frac{d}{ds'}H^{\mu}(x(s),\tilde{t}(s,s'))\end{aligned}, \quad \forall \; s, s'\in I. \quad (14)$$

Означення. *Деформації називаються **канонічними**, а одержані за їх допомогою групи Γ_T^H – **канонічними деформованими групами дифеоморфізмів,** якщо між довільними двома точками x, $x'\in O$ існує хоча би одна крива $x(s)$, вздовж якої функції деформації задовольняють умову (14).*

Диференціювання рівняння (14) по s' при $s'=s$, з врахуванням формули (8), дає рівняння кривої $x(s)$, існування якої припускається в Означенні:

$$\dot{\tau}^{\mu}(s)+\Gamma(x(s))^{\mu}_{\sigma\nu}\tau^{\sigma}(s)\tau^{\nu}(s)=0, \quad \dot{x}^{\mu}(s)=\tau^{\mu}(s), \quad (15)$$

що свідчить про те, що крива $x(s)$ є геодезичною в афінній параметризації для структури афінної зв'язності, яка задається в O дією групи Γ_T^H. Локально між двома точками x і x' можна провести лише одну геодезичну, отже *вимоги існування хоча би однієї кривої, для якої виконується умова (14), достатньо для з'ясування того, що така крива єдина і є геодезичною.*

Перепишемо тепер умови (13) та (14) для $s=0$ (і замінивши s' на s) з врахуванням означення зміщення $\tilde{t}(0,s)=x(s)-x$:

$$\tau^{\mu}=\lambda(x,x'-x)^{\mu}{}_{\nu}\tau'^{\nu}=\dot{H}^{\mu}(x,x'-x)=:u^{\mu}(x,x',\tau'). \quad (16)$$

Тут прийнято $\tau:=\tau(0)$, а також позначено поточні точки і дотичні вектори до кривої як $x':=x(s)$, $\tau':=\tau(s)$. Отже функції $u^{\mu}(x,x',\tau')$, які є похідними від функцій деформації вздовж геодезичних, для канонічної деформації постійні і є незалежними першими інтегралами автономної системи диференціальних рівнянь геодезичних (15). Таким чином, функції $u^{\mu}(x,x',\tau')$ повинні задовольняти рівняння [5]

$$\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\tau'^{\nu}-\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \tau'^{\nu}}\Gamma(x')^{\nu}_{\rho\sigma}\tau'^{\rho}\tau'^{\sigma}=0, \quad (17)$$

характеристиками якого є геодезичні. З врахуванням співвідношення (16) рівняння (17) зводиться до наступного рівняння для допоміжних матриць $\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\nu}$:

$$[\partial_{\tilde{\rho}}\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\sigma}-\Gamma(x+\tilde{t})^{\nu}_{\rho\sigma}\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\nu}]\tau'^{\rho}\tau'^{\sigma}=0, \quad (18)$$

яке в термінах функцій деформації може бути записане у вигляді:

$$[\partial^{2}_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}H^{\mu}(x,\tilde{t})-\Gamma(x+\tilde{t})^{\nu}_{\rho\sigma}\partial_{\tilde{\nu}}H^{\mu}(x,\tilde{t})]\tau'^{\rho}\tau'^{\sigma}=0. \quad (19)$$

Граничні умови для допоміжних матриць $\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\nu}$ та функцій деформації $H^{\mu}(x,\tilde{t})$ задаються в точці x і слідують з властивостей 1 H), 2 H):

$$\lambda(x,0)^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}, \quad (20)$$

$$H^{\mu}(x,0)=0, \quad \partial_{\nu}H^{\mu}(x,0)=\delta^{\mu}_{\nu}, \quad (21)$$

що при виборі початкового вектора τ визначає граничні умови для перших інтегралів:

$$u^{\mu}(x,x,\tau)=\tau^{\mu}. \quad (22)$$

Згідно теоремі існування і єдиності розв'язку лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних [5], задача Коші (17), (22) для довільних симетричних за нижніми індексами гладких функцій $\Gamma(x)^{\nu}_{\rho\sigma}$ має єдиний розв'язок, що відповідає геодезичній, яка виходить з точки x в напрямку вектора τ. Це забезпечує однозначну розв'язуваність задачі (18), (20) для допоміжних матриць $\lambda(x,\tilde{t})^{\mu}{}_{\nu}$, а також задачі (19), (21) для функцій деформації в координатному базисі $H^{\mu}(x,\tilde{t})$, які, таким чином, відповідають центральному полю геодезичних, що виходять з точки x з різними початковими векторами τ. *Отже коефіцієнти довільної афінної зв'язності (без скруту) $\Gamma(x)^{\nu}_{\rho\sigma}$ для канонічних деформацій однозначно визначають функції деформації в координатному базисі.*

Нульовий і перший порядки розкладу функцій $H^{\mu}(x,\tilde{t})$ за зміщеннями $\tilde{t}$ визначаються граничними умовами (21). Послідовно диференціюючи рівняння (19) по s в нулі одержуємо наступну рекурентну формулу для знаходження коефіцієнтів розкладу функцій $H^{\mu}(x,\tilde{t})$ по $\tilde{t}$ в довільному порядку $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}&\partial^{(n)}_{\tilde{\nu}_1,\dots,\tilde{\nu}_n}H^{\mu}(x,0)=\\&=\partial^{(n-2)}_{\{\tilde{\nu}_1,\dots\tilde{\nu}_{n-2}}[\Gamma(x+\tilde{t})^{\sigma}_{\nu_{n-1}\tilde{\nu}_n\}}\partial_{\tilde{\sigma}}H^{\mu}(x,\tilde{t})]\Big|_{\tilde{t}=0}\end{aligned}$$

де фігурні дужки, як звичайно, означають симетризацію по індексам, що в них розміщені. Зокрема при $n=2$ одержуємо співвідношення (8), а при $n=3$:

$$\Delta^{\mu}_{\nu\rho\tau}=\partial_{\{\nu}\Gamma^{\mu}_{\rho\tau\}}+\Gamma^{\sigma}_{\{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\tau\}\sigma},$$

де $\Delta^{\mu}_{\nu\rho\tau}:=\partial^{3}_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\tau}}H^{\mu}(x,\tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0}$, звідки, як показано в [1], слідує, що коефіцієнти $\rho^{\mu}{}_{\nu\rho\tau}$ однозначно визначаються тензором кривизни (10):

$$\rho^{\mu}{}_{\nu\rho\tau}=\frac{1}{3}(R^{\mu}{}_{\nu\rho\tau}+R^{\mu}{}_{\rho\nu\tau}) \quad (23)$$

і означення (9) зводиться до відомої тотожності $R^{\mu}{}_{\nu\rho\tau}+R^{\mu}{}_{\rho\tau\nu}+R^{\mu}{}_{\tau\nu\rho}=0$.

Підсумуємо одержане.

Теорема 1 (про однозначність канонічних деформацій).

а) Умова канонічності деформацій (14) локально однозначно визначає криву між точками x і x', вздовж якої вона виконується, і ця крива є геодезичною в афінній параметризації простору афінної зв'язності *(без скруту), структура якого задається в* O *дією групи* Γ_T^H .

б) Функції канонічних деформацій в координатному базисі $H^{\mu}(x,\tilde{t}\,)$ *однозначно визначаються коефіцієнтами афінної зв'язності (без скруту)* $\Gamma(x)^{\nu}_{\rho\sigma}$, *а похідні від них вздовж геодезичних є першими інтегралами системи диференціальних рівнянь геодезичних.*

Легко перевірити, що для довільних трьох точок x , x' та x'' , які лежать на одній геодезичній, матриці $\lambda(x,x'-x)^{\mu}{}_{\sigma}\lambda(x',x''-x')^{\sigma}{}_{\nu}$ не залежать від x' і також задовольняють рівняння (18) і умову (20). З однозначності розв'язку задачі (18), (20) це забезпечує композиційний закон паралельних перенесень *довільних* векторів θ вздовж геодезичної:

$$\begin{aligned}\theta^{\mu}(x)&=\lambda(x,x''-x)^{\mu}{}_{\nu}\theta^{\mu}(x'')=\\&=\lambda(x,x'-x)^{\mu}{}_{\sigma}\lambda(x',x''-x')^{\sigma}{}_{\nu}\theta^{\mu}(x''),\end{aligned} \quad (24)$$

що, в свою чергу, призводить до *збіжності довільної послідовності паралельних перенесень векторів вздовж геодезичної (в тому числі й інтегральної послідовності інфінітезимальних перенесень) з результуючим скінченним перенесенням*. І навпаки, безпосередня перевірка показує, що якщо для довільних трьох точок x , x' і x'' на геодезичній та вектора θ для скінченних паралельних перенесень виконується композиційний закон (24), функції $\lambda(x,x'-x)^{\mu}{}_{\nu}$, за допомогою яких він здійснюється, задовольняють рівняння (18), а отже *відповідна деформація буде канонічною*.

Теорема 2 (про скінченні паралельні перенесення).

Для того, щоб скінченне паралельне перенесення довільних векторів θ *на відстань* $\tilde{t}=x'-x$ *давало результат інтегральної послідовності інфінітезимальних паралельних перенесень вздовж геодезичної, що з'єднує точки* x *і* x' , *необхідно і достатньо, щоб деформована група дифеоморфізмів* Γ_T^H , *яка його визначає, була канонічною.*

Відзначимо, що умова канонічності деформацій (14) накладається на функції деформації в координатному репері $H^{\mu}(x,\tilde{t}\,)$, отже вибір афінного репера X_m залишається довільним і на канонічності деформації не позначається. Тобто якщо деформація з функціями деформації $H^m(x,\tilde{t}\,)$ – канонічна, то канонічною буде і деформація з функціями

$$H'^m(x,\tilde{t}\,)=L(x)^m_n H^n(x,\tilde{t}\,),$$

де $L(x)^m_n$ – довільні залежні від x невироджені матриці.

3. Критерії канонічності

Розглянемо параметри деформованої групи дифеоморфізмів Γ_T^H , що відповідають зміщенням $\tilde{t}(s,s'):=x(s')-x(s)$ вздовж кривої $x(s)$:

$$t^m(s,s')=H^m(x(s),\tilde{t}(s,s')). \quad (25)$$

В їх термінах умова канонічності деформацій (14) може бути записана у вигляді

$$\tau^m(s):=\tfrac{d}{ds'}t^m(s,s'), \quad \forall\ s,\ s'\in I,$$

де $\tau^m(s)=h(x(s))^m_{\mu}\tau^{\mu}(s)$ є компонентами дотичного до кривої в точці $x(s)$ вектора в афінному базисі X_m , звідки для параметрів групи Γ_T^H слідує умова:

$$t^m(s,s')=(s'-s)\tau^m(s), \quad \forall\ s,\ s'\in I, \quad (26)$$

еквівалентна умові (14). Обертаючи з використанням властивості 2 H) рівняння (25), цю умову можна подати ще й в наступному еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{t}^{\mu}(s,s')&=x(s')^{\mu}-x(s)^{\mu}=\\&=K^{\mu}(x(s),(s'-s)\tau(s))\end{aligned} \quad \forall\ s,\ s'\in I. \quad (27)$$

Отже крива, для якої виконується умова (27), згідно першій частині Теореми 1 є геодезичною, яка проходить через точку $x(s)$ в напрямку вектора $\tau(s)$. Справедливе і зворотне.

Теорема 3 (критерій канонічності на рівняння геодезичної).

Якщо довільна геодезична в афінній параметризації в просторі O *записуються у вигляді (27) з функціями* $K^{\mu}(x,t)$, *які визначаються функціями деформації властивістю 2* H *), то такі деформації будуть канонічними.*

В цьому легко переконатися безпосередньо, виконавши подвійне диференціювання рівняння (27) по s' (поклавши $s=0$ і перепозначивши s' на s) та вимагаючи співпадіння одержаного з рівнянням геодезичної (15), що приводить до рівняння (19) для функцій деформацій, яке і забезпечує їх канонічність.

Розглянемо добуток елементів канонічної деформованої групи Γ_T^H , які відповідають зміщенням вздовж геодезичної, а тому мають зображення (26):

$$(s_1+s_2)\tau^m(s)=\varphi^m(x(s),s_1\tau(s),s_2\tau(s')), \quad (28)$$

де $s'=s+s_1$. Ця формула узагальнює *канонічний закон множення* [3] для канонічних скінченнопараметричних груп Лі на випадок нескінченних груп Γ_T^H , чим і пояснюється прийнятий нами термін „канонічні" для груп Γ_T^H і відповідних деформацій. Формула (28) визначає гомоморфізм 1-параметричної адитивної абелевої групи $T^1=\{s\}$ в групу Γ_T^H .

Диференціюючи (28) по s_2 в нулі одержуємо

$$\tau^m(s)=\lambda(x(s),s_1\tau(s))^m{}_n\tau^n(s'), \quad (29)$$

що з врахуванням формули (5) еквівалентно умові канонічності деформацій (14). Розглянемо „лівий" аналог умови (29). Для цього продиференціюємо (28) по s_1 в нулі. В результаті одержуємо:

$$\tau^m(s)=\mu(x(s),s_2\tau(s))^m{}_n\tau^n(s)+s_2\dot{\tau}^m(s). \quad (30)$$

Обидва рівняння (29) і (30) фіксують криву, вздовж якої має місце канонічний закон множення (28). Так, диференціюючи в нулі (29) по s_1 , або (30) по s_2 , одержуємо рівняння:

$$\dot{\tau}^m(s)+\gamma(x(s))^m_{kn}\tau^k(s)\tau^n(s)=0, \quad (31)$$

де

$$\gamma^m_{kn} := \partial^2_{kn'}\varphi^m(x,t,t')\Big|_{t=t'=0} = \\ = \partial_k \lambda(x,t)^m{}_n\Big|_{t=0} = \partial_n \mu(x,t)^m{}_k\Big|_{t=0} \quad (32)$$

Підстановка в першу рівність формули (32) виразу (3), з врахуванням означення (8), дає $\gamma^m_{kn} = h^m_\mu(\Gamma^\mu_{\kappa\nu} h^\kappa_k h^\nu_n + h^\kappa_k \partial_\kappa h^\mu_n)$, отже функції γ^m_{kn} є коефіцієнтами афінної зв‘язності, а рівняння (31) – рівнянням геодезичної в афінному репері.

Диференціюючи рівняння (30) по s_2 і покладаючи затим $s=0$ та заміняючи s_2 на s, з використанням рівняння (31) одержуємо рівняння на допоміжні матриці $\mu(x,t)^m{}_n$:

$$[\partial_k \mu(x,t)^m{}_n - \gamma(x)^m_{kn}]\tau'^k \tau'^n = 0\,, \quad (33)$$

аналогічне рівнянню (18). Тут згідно з (26) прийнято $t(0,s)=s\tau$. Підстановка виразу (6) матриць $\mu(x,t)^m{}_n$ через функції деформації $H^m(x,\tilde{t})$ в рівняння (33) знову приводить до рівняння (19), яке забезпечує канонічність деформацій. Отже умова канонічності деформацій може накладатись не тільки у вигляді рівняння (14), чи еквівалентного йому рівняння (29), але й у вигляді рівняння (30).

Послідовне диференціювання рівняння (33) по s в нулі призводить до наступної умови для допоміжних матриць $\mu(x,t)^m{}_n$ канонічних деформованих груп Γ^H_T:

$$\partial^{(n)}_{\{k_1,\ldots,k_n}\mu(x,t)^m_{k_{n+1}\}}\Big|_{t=0} = 0\,,$$

зокрема

$$\partial^{(n)}_{\{kl}\mu(x,t)^m_{s\}}\Big|_{t=0} = \rho^m{}_{\{kls\}} = 0\,,$$

звідки безпосередньо слідує вираз (23) коефіцієнтів $\rho^m{}_{kls}$ через тензор кривизни $R^m{}_{kls}$.

Отже доведено наступне.

Теорема 4 (критерій канонічності закону множення).

Деформована група дифеоморфізмів Γ^H_T має канонічний закон множення (28) вздовж геодезичних тоді і тільки тоді, коли вона є канонічною, при цьому для допоміжних матриць $\lambda(x,t)^m{}_n$ і $\mu(x,t)^m{}_n$ групи Γ^H_T виконуються рівняння (29) і (30) відповідно.

4. Канонічність деформацій ріманового простору

В роботі [1] з вимоги збереження довжини вектора при скінченних паралельних перенесеннях для функції деформації в координатному базисі було одержано рівняння (11), яке однозначно визначає їх за метричним тензором $g(x)_{\mu\nu}$, включаючи коефіцієнти $\Gamma(x)^\sigma_{\mu\nu}$ в другому порядок розкладу по $\tilde{t}$, які виявляються рівними символам Крістоффеля (12).

Канонічність таких деформацій слідує з того факту, що рівняння (11), будучи записаним відносно функцій $\lambda(x,x'-x)^\mu{}_\sigma$:

$$\lambda(x,x'-x)^\rho{}_\mu \lambda(x,x'-x)^\sigma{}_\nu g(x)_{\rho\sigma} = g(x')_{\mu\nu}\,,$$

забезпечує виконання для них вздовж геодезичних композиційного закону (24), а тому, згідно Теоремі 2, такі функції відповідають канонічним групам Γ^H_T. В цьому можна переконатися безпосередньо, якщо продиференціювати рівняння (11) по $\tilde{t}$ і результат

$$\partial_{\tilde{\lambda}} g(x+\tilde{t})_{\mu\nu} = 2\partial^2_{\tilde{\lambda}\{\tilde{\mu}} H^\rho(x,\tilde{t})\partial_{\tilde{\nu}\}} H^\sigma(x,\tilde{t}) g(x)_{\rho\sigma}$$

підставити в вираз (12), взятий в точці $x+\tilde{t}$. Після скорочень одержуємо:

$$\Gamma(x+\tilde{t})^\sigma_{\mu\nu} g(x+\tilde{t})_{\sigma\lambda} = \\ = \partial^2_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} H^\rho(x,\tilde{t})\partial_{\tilde{\lambda}} H^\sigma(x,\tilde{t}) g(x)_{\rho\sigma}\,. \quad (34)$$

Використовуючи ще раз рівняння (11) для вираження тензора $g(x+\tilde{t})_{\sigma\lambda}$ через похідні від функцій деформації і зважаючи на оборотність матриць $\partial_{\tilde{\lambda}} H^\sigma(x,\tilde{t})$ знаходимо, що з рівняння (34) слідує рівняння (19), яке забезпечує канонічність деформацій, функції яких задовольняють рівняння (11).

Відзначимо, що в рімановому просторі геодезичні в натуральній параметризації є екстремалями функціоналу енергії

$$S(x,x') = \frac{1}{2}\int_0^s g(x(\alpha))_{\mu\nu}\tau^\mu(\alpha)\tau^\mu(\alpha)d\alpha\,. \quad (35)$$

Функція центральних полів екстремалей, що виходять з кожної точки x - функція дії $S(x,x')$, яка визначається інтегралом (35) за умови його екстремальності, задовольняє рівняння Гамільтона-Якобі [4]:

$$g(x')^{\mu\nu}\partial_{\mu'} S(x,x')\partial_{\nu'} S(x,x') = g(x)_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu \quad (36)$$

і дозволяє знайти дотичні вектори τ' до геодезичної в поточній точці x' за формулою:

$$\tau'^\nu = g(x')^{\mu\nu}\partial_{\mu'} S(x,x')\,.$$

З іншого боку, цей вектор може бути знайдений шляхом паралельного перенесення початкового вектора τ в точку x', що дає:

$$\partial_{\mu'} S(x,x') = g(x')_{\mu\sigma}\partial_\nu H^\sigma(x',x-x')\tau^\nu\,.$$

Підстановка цього співвідношення в рівняння Гамільнона-Якобі (36) призводить до того, що вздовж геодезичних виконується рівняння (11), яке також можна називати рівнянням Гамільнона-Якобі для функцій деформації.

Таким чином, доведено наступне.

Теорема 5 (про канонічність деформацій ріманового простору).

Деформовані групи дифеоморфізмів Γ^H_T що задають своєю дією в O структуру ріманового простору, одержані за допомогою деформацій, функції яких задовольняють рівняння Гамільтона-Якобі (11), є канонічними.

На завершення відзначимо, що скінченні паралельні перенесення природним чином об‘єднуються в так званій групі паралельних перенесень $DT = \Gamma^H_T \times)GL^g(n)$ ($DT = \Gamma^H_T \times)SO^g(n)$ у випадку ріманового простору) [6], яка діє в дотичному розшаруванні простору O і є фундаментальною групою (в смислі Ерлангенскої програми Ф.Клейна) простору афінної зв‘язності (відповідно ріманового простору), причому у випадку канонічної групи Γ_T^H група DT має в множині чистих трансляцій без дообертань (яка у випадку викривленого простору не утворює підгрупи групи DT) однопараметричні підгрупи, що переводять довільні дві точки $x, x' \in O$ одну в іншу. Навпаки, існування таких підгруп в групі паралельних перенесень DT забезпечує канонічність групи Γ_T^H.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самохвалов С.Є.* Теоретико-груповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №9. – С. 1238 - 1248.
2. *Кобояси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2-х т. – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 334 с.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. *Буслаєв В.С.* Вариационное исчисление. – Ленинград: Изд. Ленинградского университета, 1980. – 288 с.
5. *Карташев А.И., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
6. *Samokhvalov S.E.* The group of parallel transports in the Riemannian space. – arXiv:math.DG/0605006 v1.

пост. 10.04.07.