Аналіз досліджень та постановка задачі. На сьогоднішній день беззаперечним лідером застосувань серед методів локальної неперервної апроксимації є лінійні комбінації *B*-сплайнів. Задача відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О. Лигуном, В.В. Кармазіною [1 – 3] та у авторських дослідженнях [4].

Так для сплайнів однієї змінної мають місце наступні визначення. Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \ge 2$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)dt$, при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається так:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i\ ,\ i \in Z\ , \tag{1}$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h , вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}\left(t-(i+0,5)h\right),\ r = 2,4\ ,$$

$$S_{3,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{3,h}(t-ih)\ ,$$

де *B*-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r \ge 1$) визначається рекурентно наступним чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2;h/2], \\ 1, & t \in [-h/2;h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)d\tau\ . \tag{2}$$

Наприклад, *B*-сплайн четвертого порядку такий:

$$B_{4,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-5h/2;5h/2], \\ (t/h+5/2)^4/24, & t \in [-5h/2;-3h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h+1/2)^4/12, & t \in [-3h/2;-h/2], \\ \Psi(t/h), & t \in [-h/2;h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h-1/2)^4/12, & t \in [h/2;3h/2], \\ (t/h-5/2)^4/24, & t \in [3h/2;5h/2], \end{cases} \tag{3}$$

де $\Psi(t) = \frac{115}{192} - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{4}t^4$.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r = 2,3,4$ свідчать наступні твердження [2 – 4]. При $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується наступне:

$$\left\|p(t) - S_{2,0}(p,t)\right\| = h^2\left\|p''(t)\right\|/6 + \varepsilon\left\|p(t)\right\| + o\left(h^2\right),$$

$$\left\|p(t) - S_{3,0}(p,t)\right\| = 5h^2\left\|p''(t)\right\|/24 + \varepsilon\left\|p(t)\right\| + o\left(h^2\right), \tag{4}$$

$$\left\|p(t) - S_{4,0}(p,t)\right\| = h^2\left\|p''(t)\right\|/4 + \varepsilon\left\|p(t)\right\| + o\left(h^2\right).$$

Поставимо за мету даної роботи отримати подання *B*-сплайну п'ятого порядку та дослідити відповідний поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією зазначених *B*-сплайнів.

Виклад основного матеріалу. На підставі виразів (2), (3) неважко отримати наступний вираз для *B*-сплайну п'ятого порядку:

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h;3h], \\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h;-2h], \\ \psi_1(t), & t \in [-2h;-h], \\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h;0], \\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0;h], \\ \psi_2(t), & t \in [h;2h], \\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h;3h]. \end{cases} \tag{5}$$

де

$$\psi_1(t) = -\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}$$

Із (5) зрозуміло, що сплайн $B_{5,h}(t)$ - симетрична функція відносно носія $d_5 = [-3h;3h]$ з наступними властивостями:

$$B_{5,h}(0) = \frac{11}{20},\quad B_{5,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{1051}{1920},\quad B_{5,h}(\pm h) = \frac{13}{60},$$

$$B_{5,h}\left(\pm\frac{3h}{2}\right) = \frac{399}{1280},\quad B_{5,h}(\pm 2h) = \frac{1}{120},$$

$$B_{5,h}\left(\pm\frac{5h}{2}\right) = \frac{1}{3840},$$

$$B_{5,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right) = 0\ ,\ k > 5\ ,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} B_{5,h}(t)dt = \frac{5887}{11520},\quad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm1-1/2)h}^{(\pm1+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{10543}{46080},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm2-1/2)h}^{(\pm2+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{361}{23040},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm3-1/2)h}^{(\pm3+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{1}{46080},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm k-1/2)h}^{(\pm k+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = 0\,,\ k>3\,.$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 1/2-1/2)h}^{(\pm 1/2+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{151}{360}\,,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 3/2-1/2)h}^{(\pm 3/2+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{19}{240}\,,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 5/2-1/2)h}^{(\pm 5/2+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = \frac{1}{720}\,,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm k/2-1/2)h}^{(\pm k/2+1/2)h} B_{5,h}(t)dt = 0\,,\quad k>5\,.$$

За аналогією зі сплайнами $B_{r,h}(t)$, $r=2,3,4$ можна стверджувати, що якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{5,h}(t)\in S_5(\Delta_h)$, то лінійна комбінація $S_5(t)$ сплайнів $B_{5,h}(t)$ також буде належати множині $S_5(\Delta_h)$, отже, лінійна комбінація $S_5(t)$ – є сплайн мінімального дефекту.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, введемо таку лінійну комбінацію B-сплайнів (5):

$$S_{5,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{5,h}(t-ih)\,, \tag{6}$$

Подання сплайну $S_{5,0}(p,t)$ у вигляді (6) не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі. Якщо ввести заміну $x=2(t-ih)/h$, $|x|\le 1$, то сплайн $S_{5,0}(p,t)$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$\begin{aligned}S_{5,0}(p,t)&=\frac{1}{3840}(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3})x^5+\\&+\frac{1}{768}(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3})x^4+\\&+\frac{1}{384}(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3})x^3+\\&+\frac{1}{384}(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3})x^2+\\&+\frac{1}{768}(-p_{i-2}-75p_{i-1}-144p_i+144p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3})x+\\&+\frac{1}{3840}(p_{i-2}+237p_{i-1}+1682p_i+1682p_{i+1}+237p_{i+2}+p_{i+3})\end{aligned} \tag{7}$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (6) має місце наступна рівність

$$S_{5,0}(p,t)=S_{5,0}(\overline{p},t)+S_{5,0}(\varepsilon,t)\,.$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$\left|p(t)-S_{5,0}(p,t)\right|=\left|p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)-S_{5,0}(\varepsilon,t)\right|$$

або для $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in Z$, до оцінки нерівності

$$\left|p(t)-S_{5,0}(p,t)\right|\le\left|p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)\right|+\varepsilon\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|\,, \tag{8}$$

де $\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|=\sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_t\left|S_{5,0}(\varepsilon,t)\right|$ – норма оператора $S_{5,0}(p,t)$.

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норми сплайн-оператора $S_{5,0}(p,t)$ і задача визначення похибки відтворення. Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайну $S_{5,0}(\overline{p},t)$, свідчить наступна теорема та наслідки.

Теорема 1. Якщо $p(t)\in C^2$, то при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)=-\frac{7}{24}p''(t)h^2+o\left(h^2\right).$$

Доведення. Розглянемо розкладення функції $p(t,q)\in C^5$ у ряд Тейлора в околі точки $((i-0{,}5)h)$. Введемо позначення $t^*=(i-0{,}5)h$, $\tau=t-t^*$. Тоді

$$p(t)=p(t^*)+p'(t^*)\tau+\frac{1}{2!}p''(t^*)\tau^2+\frac{1}{3!}p'''(t^*)\tau^3+$$
$$+\frac{1}{4!}p^{(4)}(t^*)\tau^4+\frac{1}{5!}p^{(5)}(t^*)\tau^5+o\left(h^5\right). \tag{9}$$

Розглянемо представлення величин $\overline{p}_{i-2}$, $\overline{p}_{i-1}$, $\overline{p}_i$, $\overline{p}_{i+1}$, $\overline{p}_{i+2}$, $\overline{p}_{i+3}$ у вигляді розкладення в ряд Тейлора. Так, для $\overline{p}_i$ отримаємо (тут і далі будемо записувати $p=p(t^*)$, $p'=p'(t^*)\ldots$):

$$\overline{p}_i=\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0}\left(p+p'\tau+\frac{1}{2}p''\tau^2+\frac{1}{6}p'''\tau^3+\ldots\right)d\tau=$$
$$=p-\frac{1}{2}p'h+\frac{1}{6}p''h^2-\frac{1}{24}p'''h^3+\frac{1}{120}p^{(4)}h^4-\frac{1}{720}p^{(5)}h^5+o\left(h^5\right)$$

$$\overline{p}_{i+1}=\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\left(p+p'\tau+\frac{1}{2}p''\tau^2+\frac{1}{6}p'''\tau^3+\ldots\right)d\tau=$$
$$=p+\frac{1}{2}p'h+\frac{1}{6}p''h^2+\frac{1}{24}p'''h^3+\frac{1}{120}p^{(4)}h^4+\frac{1}{720}p^{(5)}h^5+o\left(h^5\right)$$

$$\overline{p}_{i+2}=p+\frac{3}{2}p'h+\frac{7}{6}p''h^2+\frac{5}{8}p'''h^3+\frac{31}{120}p^{(4)}h^4+\frac{7}{80}p^{(5)}h^5+o\left(h^5\right)$$

$$\overline{p}_{i-2}=p-\frac{5}{2}p'h+\frac{19}{6}p''h^2-\frac{65}{24}p'''h^3+\frac{211}{120}p^{(4)}h^4-\frac{665}{720}p^{(5)}h^5+o\left(h^5\right)$$

$$\overline{p}_{i+3}=p+\frac{5}{2}p'h+\frac{19}{6}p''h^2+\frac{65}{24}p'''h^3+\frac{211}{120}p^{(4)}h^4+\frac{665}{720}p^{(5)}h^5+o\left(h^5\right)$$

Розкладення сплайну $S_{5,0}(\overline{p},t)$ в ряд Тейлора поблизу точки t^* має вигляд:

$$S_{5,0}(\overline{p},t)=\left(p+\frac{7}{24}p''h^2+\frac{77}{1920}p^{(4)}h^4\right)+$$
$$+\left(p'+\frac{7}{24}p'''h^2+\frac{77}{1920}p^{(5)}h^4\right)\tau+\left(p''+\frac{7}{48}p^{(4)}h^2\right)\tau^2+$$
$$+\left(\frac{1}{6}p'''+\frac{7}{144}p^{(5)}h^2\right)\tau^3+\frac{1}{24}p^{(4)}\tau^4+\frac{1}{120}p^{(5)}\tau^5+o\left(h^5\right).$$

Тоді

$$p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)=-\frac{7}{24}h^2\left(p''+p'''\tau+\frac{1}{2}p^{(4)}\tau^2+\frac{1}{6}p^{(5)}\tau^3\right)-$$
$$-\frac{77}{1920}h^4\left(p^{(4)}+p^{(5)}\tau\right)+o\left(h^2\right)=-\frac{7}{24}h^2p''(t)+o\left(h^2\right),$$

де $$p''(t)=p''+p'''\tau+p^{(4)}\tau^2+\frac{1}{6}p^{(5)}\tau^3+o\left(h^3\right).$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. При $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^2$ виконується

$$\left\|p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)\right\|=\frac{7h^2}{24}\left\|p''(t)\right\|+o\left(h^2\right).$$

Проведемо оцінку норми сплайну (1).

Теорема 2. Для сплайну $S_{5,0}(p,t)$ є вірним

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|=\left\|p(t)\right\|.$$

Доведення. Проведемо перегрупування у виразі (7) та розглянемо представлення $S_{5,0}(p,t)$ у вигляді:

$$S_{5,0}(p,t)=\frac{1}{3840}\Big((1-x)^5p_{i-2}+$$
$$\left(237-375x+210x^2-30x^3-15x^4+5x^5\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(1682-770x-220x^2+140x^3+10x^4-10x^5\right)p_i+$$
$$+\left(1682+770x-220x^2-140x^3+10x^4+10x^5\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(237+375x+210x^2+30x^3-15x^4-5x^5\right)p_{i+2}+(1+x)^5p_{i+3}\Big)$$

Тоді

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|\le\frac{1}{3840}\left\|p(t)\right\|\max_{|x|\le 1}A(x),$$

де

$$A(x)=\left|(1-x)^5\right|+\left|237-375x+210x^2-30x^3-15x^4+5x^5\right|+$$
$$+\left|1682-770x-220x^2+140x^3+10x^4-10x^5\right|+$$
$$+\left|1682+770x-220x^2-140x^3+10x^4+10x^5\right|+$$
$$+\left|237+375x+210x^2+30x^3-15x^4-5x^5\right|+\left|(1+x)^5\right|.$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in[0;1]$. Для цих x, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$A(x)=3840.$$

Таким чином

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|\le\left\|p(t)\right\|. \tag{10}$$

З іншого боку для будь-якого частинного випадку

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|\ge\left\|S_{5,0}\left(p^*,t\right)\right\|.$$

Тоді для $x=0$ маємо

$$S_{5,0}(p,t)=\frac{1}{3840}\left(p^*_{i-2}+237p^*_{i-1}+1682p^*_i+1682p^*_{i+1}+237p^*_{i+2}+p^*_{i+3}\right).$$

Якщо $p^*_{i-2}=p^*_{i-1}=p^*_i=p^*_{i+1}=p^*_{i+2}=p^*_{i+3}=\|p\|$, то

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|\ge\left\|S_{3,0}\left(p^*,t\right)\right\|\ge\left|S_{3,0}\left(p^*,0\right)\right|=\left\|p(t)\right\|,$$

а отже, з урахуванням (10), приходимо, що

$$\left\|S_{5,0}(p,t)\right\|=\left\|p(t)\right\|.$$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Для $\forall p(t)\in C^2$ має місце

$$\left\|p(t,q)-S_{5,0}(p,t)\right\|\le\frac{7h^2}{24}\left\|p''(t)\right\|+\varepsilon\|p\|+o\left(h^2\right).$$

Висновки. В роботі отримано подання та властивості *B*-сплайну п'ятого порядку, визначеному на рівномірній сітці вузлів. Досліджено поліноміальний сплайн, близький до інтерполяційних у середньому, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів п'ятого порядку. Усі розглянуті оцінки носять асимптотичний характер, проте це дає повну уяву про відхилення сплайну $S_{5,0}(p,t)$ близького до інтерполяційних у середньому, від функції $p(t)$, яку він апроксимує.

Зокрема, встановлено, що у порівняні зі сплайнами $S_{r,0}(p,t)$, $r=2,3,4$, сплайн сплайнів $S_{5,0}(p,t)$ має більш виражені властивості згладжування. Крім того встановлено, що при $r=2,3,4,5$ похибка апроксимації функції $p(t)\in C^2$, визначеної на рівномірному розбитті значеннями типу (1), збільшується на величину $\frac{h^2}{24}\left\|p''(t)\right\|$ при кожному збільшенні ступеня поліному.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
2. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.-30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559-Ук89.
3. Лигун А.А., Кармазина В.В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. – 38 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569– Ук89.
4. Приставка П.О. Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

пост. 02.04.07