МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Об одном обобщении принципа сжимающих отображений и его приложениях

Б.И. ПЕЛЕШЕНКО, А.А. РЯДНО

Днепропетровский государственный аграрный университет
Днепропетровская государственная финансовая академия

Рассматриваются непрерывные отображения, действующие из прямого произведения единичных шаров $U\times V$ банаховых пространств X и Y в банахово пространство Y и удовлетворяющие для каждого $x\in X$ условию $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|_Y \le \varpi(\|y_2-y_1\|_Y)$, $y_1\in V, y_2\in V$. Доказана теорема существования для каждого такого отображения неподвижной точки при условии $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varpi(t)}{t}=1$. В качестве следствия получены теоремы о существовании обратных отображений.

Розглядаються неперервні відображення $v(x,y)$, що діють із прямого добутку одиничних куль $U\times V$ банахових просторів X і Y в банаховий простір Y та задовольняють для кожного $x\in X$ умові $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|_Y \le \varpi(\|y_2-y_1\|_Y)$, $y_1\in V, y_2\in V$. Доведена теорема про існування для кожного такого відображення нерухомої точки за умови $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varpi(t)}{t}=1$. Як наслідок одержані теореми про існування обернених відображень.

The continuous mappings $v(x,y)$ that map from right product of unit balls $U\times V$ of Banach spaces X and Y into Banach space Y and satisfy condition $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|_Y \le \varpi(\|y_2-y_1\|_Y)$ for any $x\in X$, $y_1\in V, y_2\in V$ are considered. The theorem of existence of fixed point for each mapping on condition that $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varpi(t)}{t}=1$ is proved. The theorems of existence of reverse mappings are obtained as a result.

Введение и обозначения. Важную роль в исследовании существования и единственности решений различного вида уравнений и нахождении приближённых их решений играет принцип сжимающих отображений. Этот принцип формулируется в виде теорем о существовании и единственности неподвижной точки отображений полного метрического или нормированного пространства в себя. На скорость изменения отображения при этом накладываются ограничения "липшицевского" типа. Далее сформулируем принцип сжимающих отображений в форме, приведенной в [1]. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $\rho(x_1,x_2)$, $A(x)$ – сжимающее отображение метрического пространства X в себя, т.е. такое отображение, что существует число $K\in(0,1)$, что для любых элементов $x_1,x_2\in X$ выполняется неравенство

$$\rho(A(x_1),A(x_2))\le K\rho(x_1,x_2). \qquad (1)$$

Теорема A. Всякое сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве X имеет одну и только одну неподвижную точку.

Отметим, что неравенство (1) есть условие Липшица с модулем непрерывности $\varpi(t)=Kt$. Сформулированная теорема неверна, если $K=1$; тогда существует отображение $A(x)$, удовлетворяющее условию (1) и не имеющее ни одной неподвижной точки. Возникает вопрос: существует ли такой модуль непрерывности $\varpi(t)$, что выполняются условия $\varpi(t)<t$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varpi(t)}{t}=1$, и теорема A остается верной для отображений, удовлетворяющих условию

$$\rho(A(x_1),A(x_2))\le\varpi(\rho(x_1,x_2))\,?$$

Ответ на поставленный вопрос следует из теоремы 1 данной статьи; таким модуля непрерывности, например, является

$$\varpi(t)=t/(1+\sqrt[a]{t})^a,\ a>1.$$

Пусть X и Y – банаховые пространства, U и V – единичные открытые шары соответственно пространств X и Y. Через $\|x\|_x$ и $\|y\|_Y$ обозначаются нормы элементов $x\in X$ и $y\in Y$. Через $\varpi(t)$ далее будем обозначать такой заданный на $[0,\infty)$ модуль непрерывности, что $\varpi(t) < t$, последовательность $\varpi_1(t) = \varpi(t),..., \varpi_n(t) = \varpi(\varpi_{n-1}(t)),...$ убывает к нулю при $n \to \infty$ для всякого $t \in (0,\infty)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \varpi_n(t) < \infty$. Через δ обозначим такое число, что $\sum_{n=1}^{\infty} \varpi_n(\delta) + \delta \le 1$.

Основные результаты. Сформулируем утверждения, доказанные в данной статье.

Теорема 1. Пусть $v(x,y)$ непрерывное отображение произведения U и V в Y обладающее тем свойством, что для любых $x \in U, y_1 \in V, y_2 \in V$ выполняется неравенство $\|v(x,y_1) - v(x,y_2)\|_Y \le \varpi(\|y_2 - y_1\|_Y)$. Если для каждого элемента $x \in U$ выполняется неравенство $\|v(x,0)\|_Y < \delta$, то существует такое единственное отображение $f(x)$ шара U в V, что $f(x) = v(x, f(x))$ для любого $x \in U$ и $f(x)$ непрерывно в U.

Следствие. Пусть $a > 1$, $\varpi(t) = t/(1+t^{\frac{1}{a}})^a$ – модуль непрерывности, определенный на $[0,\infty)$, f(x) – непрерывное отображение шара U в X, для которого выполняется неравенство $\| f(x) - f(\tilde{x}) \|_X \le \varpi(\| x - \tilde{x} \|_X)$ для всех $x, \tilde{x} \in U$.

Если δ удовлетворяет неравенству $\delta + \sum_{k^a}^{\infty} \frac{1}{k^a} \le 1$ и начальный элемент удовлетворяет условию $\rho(x_0, f(x_0)) \le \delta$, то последовательность $\{x_n\}$ сходиться к некоторому элементу x из U, являющегося решением уравнения $f(x) = x$. Для приближения x_n элемента x верна оценка $\rho(x_n, x) \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^a}$.

В качестве второго следствия получаем теорему о существовании обратного отображения.

Теорема 2. Пусть $h(y)$ – отображение шара V в Y, имеющее такое свойство, что для любой пары элементов $y_1, y_2 \in V$ выполняется неравенство $\|h(y_1) - h(y_2)\|_Y \le \varpi(\|y_1 - y_2\|_Y)$. Если $\|h(0)\|_Y < \frac{\delta}{2}$, то существует такая открытая окрестность $W \in V$ нулевого элемента, что сужение на W отображения $p(y) = y + h(y)$ есть гомеоморфизм W на некоторую окрестность нулевого элемента в Y.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ – линейное отображение X в Y. Если для каждого элемента $y \in Y$ существует такой элемент $x \in X$, что $\|f(x) - y\|_Y \le \varpi(\|y\|_Y)$, $\|x\|_x \le C_1\varpi(\|y\|_Y)$, где C_1 – положительная константа, то тогда уравнение $f(x) = y$ при всяком $y \in Y$ имеет решение x, удовлетворяющее условию $\|x\|_x \le C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \varpi_i(\|y\|_Y)$.

Из теоремы 3 получаем теорему о существовании решения приближенного уравнения. Пусть X – нормированное пространство, X_1 – его полное подпространство, $f(x): X \to X$, $\tilde{f}: X_1 \to X_1$ – соответственно линейные отображения, $p: X \to X_1$ – проективное отображение, т.е. $p(p(x)) = p(x)$ для всякого $x \in X$. Обозначим $k(x) = x - \lambda f(x)$, $\tilde{k}(\tilde{x}) = \tilde{x} - \lambda \tilde{f}(\tilde{x})$ для действительного λ и $\|k\|_x = \sup_{\|x\|_x \le 1} \|k(x)\|_x$.

Теорема 4. Пусть для любого $\tilde{x} \in X_1$ $\|p(f(\tilde{x})) - \tilde{f}(\tilde{x})\|_x \le \varpi(\|\tilde{x}\|_x)$ и для каждого $x \in X$ найдется такое $\tilde{x} \in X_1$, что $\|f(x) - \tilde{x}\|_x \le \mu\varpi(\|\tilde{x}\|_x)$, где $\mu > 0$. Если отображение $k(x) = x - \lambda f(x)$ имеет обратное и $|\lambda| \max\{\|k^{-1}\|_x, 1\}(1 + |\lambda|\mu + \mu\|p(k)\|_x) \le 1$, то уравнение $\tilde{k}\tilde{x} = \tilde{y}$ имеет решение $\tilde{x}^*$ при всяком $\tilde{y} \in X_1$. При этом $\|\tilde{x}^*\|_x \le N\left(\|\tilde{y}\|_x + \sum_{i=1}^{\infty} \varpi_i(\|\tilde{y}\|_x)\right)$, где $N = \|k^{-1}\|_x (1 + |\lambda|\mu)$.

3. Далее приведем доказательства сформулированных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Пусть $y_0 = 0$, покажем, что для любого $x \in U$ точки последовательности $y_n = v(x, y_{n-1})$ при любом $n \ge 1$ принадлежат шару V. Предполагая, что точки y_m определены для $1 \le m \le n$ и принадлежат V, докажем, что $y_{n+1} = v(x, y_n) \in V$. Для $2 \le m \le n$ имеем $y_m - y_{m-1} = v(x, y_{m-1}) - v(x, y_{m-2})$ и, следовательно, $\|y_m - y_{m-1}\|_Y \le \varpi(\|y_{m-1} - y_{m-2}\|_Y)$. Тогда индукцией по m получаем

$$\begin{aligned} \|y_m - y_{m-1}\|_Y &\le \varpi_{m-1}(\|y_1 - y_0\|_Y) = \\ &= \varpi_{m-1}(\|v(x,0)\|_Y) < \varpi_{m-1}(\delta) \end{aligned},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_Y &\le \sum_{k=2}^{n+1} \|y_m - y_{m-1}\|_Y + \|y_1\|_Y < \\ &< \sum_{m=2}^{n+1} \varpi_{m-1}(\delta) + \delta \le 1 \end{aligned}, \qquad (2)$$

то есть $y_{n+1} \in V$.

Пусть $f_0(x) = 0$ для всех $x \in U$, по индукции введем для каждого $m \ge 1$ непрерывное отображение $y_m = f_m(x) = v(x, f_{m-1}(x))$, действующее из U в V,

Тогда для всякого $x \in U$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_m(x) - f_{m-1}(x)\|_Y &= \|v(x, f_{m-1}(x))\|_Y \le \\ &\le \varpi(\|f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x)\|_Y) \le \\ &\le \varpi_{m-1}(\|f_1(x) - f_0(x)\|_Y) \le \\ &\le \|v(x, f_0)\|_Y \le \varpi_{m-1}(\delta) \end{aligned}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m(x) - f_{m-1}(x)\|_Y$ сходиться для любой $x \in U$ и

$$\sup_{x\in U}\left\|\sum_{m=1}^{\infty}\left\|f_m(x)-f_{m-1}(x)\right\|_y\right\|_Y<\infty .$$

В силу полноты пространства Y ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\left(f_m(x)-f_{m-1}(x)\right)_Y$ сходиться для всякого $x\in U$. Обозначим через $f(x)$ сумму этого ряда, которая есть непрерывной функцией в U. Переходя в неравенстве (2) к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $\|f(x)\|_Y\le 1$ для любой точки $x\in U$. Поэтому $f(x)$ есть отображение шара U в V. Из равенства $f_n(x)=v(x,f_{n-1}(x))$ при $n\to\infty$ получаем соотношение $f(x)=v(x,f(x))$.

Осталось доказать, что отображение $f(x)$ – единственное. Пусть $g(x)$ – такое другое отображение шара U в V, что $g(x)=v(x,g(x))$ для любой точки $x\in U$. Тогда

$$\|g(x)-f(x)\|_Y=\|v(x,g(x))-v(x,f(x))\|_Y\le$$
$$\le\varpi\left(\|g(x)-f(x)\|_Y\right),$$

а так как $\varpi(t)<t$ для всех $t>0$ и $\varpi(0)=0$, то $g(x)=f(x)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть в условии теоремы 1 X=Y, U – открытый шар с центром 0 и радиусом $\frac{\delta}{2}$ и $g(x)=x-h(y)$. Тогда условие теоремы 1 выполняется, следовательно, существует такое непрерывное отображение $f(x)$ шара U в V, что $f(x)=x-h(f(x))$. Это означает, что $p(f(x))=x$ для любого $x\in U$.

Так как $f(x)$ – инъективное отображение шара U в V (т.е. из $f(x_1)=f(x_2)$ следует $x_1=x_2$), то для доказательства того, что $f(x)$ есть гомеоморфизм, достаточно показать, что $p(x)$ – инъективное отображение шара V в p(V). Пусть $g(y_1)=g(y_2)$, тогда из соотношений

$$\|y_1-y_2\|_Y=\|h(y_1)-h(y_2)\|_Y\le\varpi\left(\|y_1-y_2\|_Y\right)$$

и следует, что $y_1=y_2$. Следовательно, $p(x)$ есть гомеоморфизм множества $W=f(U)$ на U, обратный $f(x)$; при этом множество $W=p^{-1}(U)$ открыто в Y, так как U открыто в Y. Условие $\|h(0)\|_Y\le\frac{\delta}{2}$ означает, что $p(0)\in U$ или $0\in W$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Для заданного в условиях следствия модуля непрерывности члены монотонной последовательности $\{\varpi_n(\delta)\}$ ограничены соответствующими членами последовательности $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}$, т.е. $\varpi_n(\delta)<\frac{1}{n^a}$ для $\forall n\in N$. Тогда условие теоремы $\delta+\sum_{k=1}^{\infty}\varpi_k(\delta)\le 1$ запишется в виде $\delta+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a}\le 1$. Применяя доказанную теорему, получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Пусть $y\in Y$, положим $y_1=y$. По условию найдется такое $x_1\in X$, что $\|f(x_1)-y_1\|_Y\le\varpi\left(\|y_1\|_Y\right)$, $\|x_1\|_x\le C_1\varpi\left(\|y_1\|_Y\right)$. Полагаем $y_2=y_1-f(x_1)$. По y_2 найдется такое $x_2\in X$, для которого выполняются неравенства

$$\|f(x_2)-y_2\|_Y\le\varpi\left(\|y_2\|_Y\right)\le\varpi\left(\varpi\left(\|y_1\|_Y\right)\right);$$
$$\|x_2\|_x\le C_1\varpi\left(\|y_2\|_Y\right)\le C_1\varpi\left(\varpi\left(\|y_1\|_Y\right)\right).$$

Продолжая, построим такие последовательности $\{y_k\},\{x_k\}$, что $y_{k+1}=y_k-f(x_k)$, k = 1,2,..., $\|y_k\|_Y\le\varpi_{k-1}\left(\|y_1\|_Y\right)$, $\|x_k\|_x\le C_1\varpi_{k-1}\left(\|y_1\|_Y\right)$. Складывая полученные неравенства и учитывая линейность отображения f, имеем

$$y_{k+1}=y_1-f(x_1+x_2+...+x_k),\ k=1,2,... \tag{3}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ сходится и для его суммы x верна оценка

$$\|x\|_X\le\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X\le C_1\left(\|y\|_Y+\sum_{k=1}^{\infty}\varpi_k\left(\|y\|_Y\right)\right).$$

Так как $\lim_{k\to\infty}\|y_k\|_Y=0$, то переход к пределу (при $k\to\infty$) в (3) дает равенство $\theta=y-f(x)$, где θ – нулевой элемент пространства Y.

Отсюда следует, что x есть решение уравнения $f(x)=y$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что для уравнения $\tilde{k}(\tilde{x})=\tilde{y}$ выполняются условия теоремы 3. Пусть для заданного $\tilde{y}$ решением уравнения $k(x)=\tilde{y}$ есть $x_0=k^{-1}(\tilde{y})$. Полагая $x_0=z+\tilde{y}$, имеем $z=x_0-\tilde{y}=x_0-k(x_0)=\lambda f(x_0)$. По условию теоремы найдется такой элемент $\tilde{z}\in X_1$, что

$$\left\|f(x_0)-\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right\|_X\le\mu\varpi\left(\|x_0\|_X\right),\ \text{т.е.}\ \|z-\tilde{z}\|_x\le|\lambda|\mu\varpi\left(\|x_0\|_x\right).$$

Положим $\tilde{x}=\tilde{z}+\tilde{y}$ и покажем, что $\left\|\tilde{k}(\tilde{x})-\tilde{y}\right\|_x\le L\varpi\left(\|\tilde{y}\|_x\right)$. Используя условие $\left\|p(f(\tilde{x}))-\tilde{f}(\tilde{x})\right\|_x\le\tilde{\varpi}\left(\|\tilde{x}\|_x\right)$, имеем

$$\left\|\tilde{k}(\tilde{x})-\tilde{y}\right\|_x=\left\|\tilde{k}(\tilde{x})-p(\tilde{y})\right\|_x=\left\|\tilde{k}(\tilde{x})-p(k(x_0))\right\|_x\le$$
$$\le\left\|\tilde{k}(\tilde{x})-p\left(\tilde{k}(\tilde{x})\right)\right\|_x+\left\|p\left(\tilde{k}(\tilde{x})\right)-p\left(\tilde{k}(x_0)\right)\right\|_x\le$$
$$\le\left\|\tilde{x}-\lambda\tilde{f}(\tilde{x})-p(\tilde{x})+\lambda p(f(x))\right\|_x+$$
$$+\|p(k)\|_{x\to x}\|\tilde{x}-x_0\|_x=$$
$$=|\lambda|\left\|p(f(\tilde{x}))-\tilde{f}(\tilde{x})\right\|_x+\|p(k)\|_{x\to x}\|\tilde{x}-x_0\|_x\le$$
$$\le|\lambda|\varpi\left(\|\tilde{x}\|_x\right)+\|p(k)\|_{x\to x}\|\tilde{x}-x_0\|_x. \tag{4}$$

Так как

$$\|\tilde{x}-x_0\|_x=\|\tilde{z}-z_0\|_x\le|\lambda|\mu\varpi\left(\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x\right)$$

и

$$\begin{gathered}\|\tilde{x}\|_x \le \|x_0\|_x + \|\tilde{x} - x_0\|_x \le \left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x + \\ +|\lambda|\,\mu\varpi\left(\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x\right) \le \\ \max\left\{1,\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\right\}|\lambda|\,\mu\varpi\left(\|\tilde{y}\|_x\right) + \left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x \le \\ \le \left(|\lambda|\mu+1\right)\max\left\{1,\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\right\}\|\tilde{y}\|_x\end{gathered},$$

тогда подставляя эти неравенства в (4), имеем

$$\begin{gathered}\left\|\tilde{k}(\tilde{x}) - \tilde{y}\right\|_x \le \\ \le |\lambda|\,\varpi\left(\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x + |\lambda|\,\mu\varpi\left(\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x\right)\right) + \\ +|\lambda|\,\|p(k)\|_{x\to x}\cdot\varpi\left(\|x_0\|_x\right) \le \\ \le |\lambda|\Big[\max\left\{1,\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\right\}\left(1+|\lambda|\mu\right)\varpi\left(\|\tilde{y}\|_x\right) + \\ +\|p(k)\|_{x\to x}\,\varpi\left(\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\|\tilde{y}\|_x\right)\Big] \le \\ \le |\lambda|\max\left\{\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x},1\right\}\left\{1+|\lambda|\mu + \mu\|p(k)\|_{x\to x}\right\}\times \\ \times\varpi\left(\|\tilde{y}\|_x\right) \le \varpi\left(\|\tilde{y}\|_x\right)\end{gathered}.$$

Осталось отметить, что для норм членов последовательности $\{\tilde{x}_k\}$, построенной таким же способом, как и при доказательстве теоремы 3, справедлива оценка

$$\|\tilde{x}_k\|_x \le \mu\varpi_{k-1}\left(\|\tilde{y}_1\|_x\right)\ (\mathrm{k} > 1)$$

с $\mu = \left(|\lambda|\mu+1\right)\max\left\{1,\left\|k^{-1}\right\|_{x\to x}\right\}$; поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{x}_k$ сходиться.

Теорема 4 доказана.

Отметим, что в случае $\varpi(t) = Kt$, $K \in (0,1)$, теоремы 1,2 доказаны в [2], а 3,4 доказаны в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теоремы функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. – 542 с.
2. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. М.: «Мир», 1964. С. 430.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: «Физ.мат. лит.», 1959. С. 684.

пост. 22.01.07.

Совершенствование метода рентгеновской компьютерной томографии

В.И. БОЙКО, Л.П. ЛАРИЧЕВА

Днепродзержинский государственный технический университет

В статье проанализированы существующие методы усовершенствования метода компьютерной томографии. Предложен метод цифровой фильтрации первичного сигнала для повышения информативности метода РТ. Показана эффективность первичной обработки данных, искаженных небелым шумом, с помощью структурно оптимального инерционно-форсирующего фильтра Винера первого порядка.

У статті проаналізовані методи удосконалення комп'ютерної томогафіі що існують і повязани, в основному, з удосконаленням методів обробці зображення. Пропонований метод цифрової фільтрації первинного сигналу для підвищення інформативності КТ. Показана ефективність первинної обробки даних, що викривлені небілим шумом, за допомогою структурно оптимального інерційно-форсуючого фільтра Вінера першого порядку.

In the article analyzed existing principles of improving of computer tomography methods which mainly lies in the improving of rendering methods. The method of the digital filtration of the primary signal for upgrading of self-descriptiveness is suggested. The efficiency of the first order Winner's filter for the primary processing of the data which was perverted by the non-white noise is represented

Рентгеновская компьютерная томография (РКТ) в настоящее время является наиболее перспективным и информативным методом диагностики. С помощью томографической аппаратуры можно получить снимки множества сечений тела пациента, которые характеризуют особенности его анатомии и физиологии. Эти снимки с чрезвычайной четкостью показывают различные органы, причем изображения органов не налагаются друг на друга.

Томографическая система включает источник излучения; экран-преобразователь, регистрирующий излучение; устройство преобразования исходных данных в цифровой код; процессор и программное обеспечение, реализующее какой-либо алгоритм трехмерной реконструкции (рис. 1).

Пациент помещается во вращающееся вокруг объекта исследования сканирующее устройство. Рентгеновские лучи от излучателя расходящимся тонким веерным пучком проходят через пациента, лежащего на кушетке, и попадают на детектор, представляющий собой матрицу из 500-1000 фотоэлементов (ионизационных камер). В процессе вращения сканирующего