рядами, довольно сложны и громоздки для эффективного их использования даже при расчетах ТС призмы. Для исследования ТНС они в принципе непригодны, так как не позволяют получить в явном виде координатную зависимость температурной функции.

В этом плане очевидную практическую ценность приобретают те аналитические методы, которые дают достаточно простые приближенные решения приемлемой инженерной точности. К таким методам относится, например, метод эквивалентных источников (МЭИ) [4], хорошо зарекомендовавший себя на многих, в том числе и нелинейных прикладных задачах теплопроводности [4-9].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую математическую модель теплопроводности неограниченной призмы 2H1x2H2:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi_1^2}+k^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi_2^2}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,; \quad \theta(\xi_1,\xi_2,0)=\theta_o\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi_i=1}=Sk_i\left[1-\theta^4(\xi_1,\xi_2,\tau)\right]_{\xi_i=1}; \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi_i=0}=0\,; \tag{2}$$

где введены безразмерные величины (в общепринятых обозначениях)

$$\theta(\xi_1,\xi_2,\tau)=\frac{T(\xi_1,\xi_2,\tau)}{T_c}\,;\ \xi_i=\frac{x_i}{H_i}\,;\ k=\frac{H_1}{H_2}<1\,;$$

$$\tau=\frac{at}{H_1^2}\,; \quad Sk_i=\frac{\sigma_{\hat{a}}\grave{O}_{\tilde{n}}^3H_i}{\lambda}\,;\ (i=1;2)\,. \tag{3}$$

Решение задачи. Трансформация математической модели. Нелинейное ГУ (2) физически отражает I-ый закон Фурье $\lambda\cdot\partial T/\partial x=q_{\ddot{I}}$ или в безразмерной форме

$$\partial\theta/\partial\xi_i\big|_{\xi_i=1}=Ki_i(\tau,\xi_j)\,,\ (j\neq i=1;2) \tag{4}$$

И если нам из каких-то источников (например, из эксперимента) известна температура поверхности призмы, то в ММ можно заменить нелинейное ГУ III - го рода (2), линейным ГУ II - го рода.

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi_i=1}=Ki_i(\tau)\left[1-p_i(\tau)\xi_j^2\right]; \quad (j\neq i=1,2)\,, \tag{5}$$

где

$$Ki_i(\tau)=\frac{q_{\ddot{I}з}(\tau)\acute{I}_{з}}{\lambda\cdot\grave{O}_{\tilde{n}}}\,. \quad Ki_1(\tau)=kKi_2(\tau); \tag{6}$$

$p_i(\tau)$ - параметр неоднородности теплового потока вдоль периметра призмы в безразмерном виде $kp_1(\tau)=p_2(\tau)$.

На этом основании исследование ТС призмы в условиях радиации будем строить на решении вспомогательной задачи (1), (2), (5).

Решение вспомогательной задачи. Для получения приближенного решения вспомогательной задачи (1), (2), (5) воспользуемся МЭИ по аналогии с работой [9]. Примем разрешающее уравнение МЭИ в виде

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi_1^2}+f_1(\xi_2,\tau)=f(\tau)\,, \tag{7}$$

где введены «эквивалентные источники»

$$f(\tau)=\int_0^1\!\!\int_0^1\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}d\xi_1\cdot d\xi_2=\frac{d}{d\tau}\int_0^1\!\!\int_0^1\theta_1\cdot d\xi_1 d\xi_2 \tag{8}$$

$$f_1(\tau)=k^2\int_0^1\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi_2^2}d\xi_1\,. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (7) дважды по ξ_1 и используя граничные условия (2), (5), находим

$$f_1(\xi_2,\tau)=f(\tau)-kKi_2(\tau)\left[1-p_1(\tau)\xi_2^2\right]; \tag{10}$$

$$\theta_1(\xi_1,\xi_2,\tau)=B_1(\xi_2,\tau)+kKi_2(\tau)\left[1-p_1(\tau)\xi_2^2\right]\frac{\xi_1^2}{2}\,. \tag{11}$$

Подставляя выражения (10), (11) в интегральное условие (9), приходим к дифференциальному уравнению относительно функции интегрирования $B_1(\xi_2,\tau)$, решая которое при условиях однозначности, соответствующих ГУ (2), (5)

$$\frac{\partial B_1}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=1}=Ki_2(\tau); \quad \frac{\partial B_1}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=0}=0\,, \tag{12}$$

в конечном счете получаем

$$\theta_1(\xi_1,\xi_2,\tau)=\theta_{\ddot{O}}(\tau)+\frac{Ki_2(\tau)}{2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[1-\frac{p_1(\tau)}{3k}\right]\xi_2^2+k\left[1-p_1(\tau)\xi_2^2\right]\xi_1^2+\frac{p(\tau)}{6k}\xi_2^4\right\} \tag{13}$$

$$f(\tau)=(1+k^2)Ki_2(\tau)\left[\frac{1+k}{1+k^2}+\frac{p_1(\tau)}{3}\right]. \tag{14}$$

Уточнение решения. Анализ функции (13) показывает, что она не адекватно отражает зависимость температурного поля вдоль координатных осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$. Например, определение температур в средних точках $M_1(\xi_1=1;\xi_2=0)$ и $M_2(\xi_1=0;\xi_2=1)$ граней квадратной ($k=1$) призмы по решению (13) дает различные результаты

$$\begin{aligned}\theta_{M_1}(\tau)&=\theta_{\ddot{O}}(\tau)+\frac{\hat{E}з_2(\tau)}{2};\\ \theta_{\grave{I}_2}(\tau)&=\theta_{\ddot{O}}(\tau)+\frac{\hat{E}з_2(\tau)}{2}\left[1-\frac{\eth_1(\tau)}{6}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

тогда как они должны быть одинаковы.

Для устранения этого противоречия и повышения точности повторим решение приняв за главное направление ось $O\xi_2$ и соответствующее разрешающее уравнение МЭИ в виде

$$k^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi_2^2}+f_1(\xi_1,\tau)=f(\tau);$$

$$f_1(\xi_1,\tau)=\int_0^1\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi_1^2}d\xi_2 \tag{16}$$

Проделав все предыдущие математические выкладки, получаем решение

$$\theta_2(\xi_1,\xi_2,\tau)=\theta_{\ddot{O}}(\tau)+\frac{Ki_2(\tau)}{2}\cdot$$

$$\cdot\left\{k\left[1-\frac{p_1(\tau)}{3}\right]\xi_1^2+\left[1-\frac{p_1(\tau)}{k}\xi_1^2\right]\xi_2^2+\frac{kp_1(\tau)}{6}\xi_1^4\right\} \tag{17}$$

которое, как и (13), также имеет координатное несогласование, подобное (15). Поэтому окончательное решение примем в виде средневзвешенной функции выражений (13), (17)

$$\theta(\xi_1,\xi_2,\tau)=\frac{\theta_1(\xi_1,\xi_2,\tau)+k\theta_2(\xi_1,\xi_2,\tau)}{1+k}=$$

$$=\theta_{\ddot{O}}(\tau)+\frac{Ki_2(\tau)}{2(1+k)}\left\{\left[1-\frac{p_1(\tau)}{3k}\right]\xi_2^2+\right.$$

$$+k\left[1-p_1(\tau)\xi_2^2\right]\xi_1^2+\frac{p_1(\tau)}{6k}\xi_2^4+k^2\left[1-\frac{p_1(\tau)}{3}\right]\xi_1^2+$$

$$\left.+\left[k-p_1(\tau)\xi_1^2\right]\xi_2^2+\frac{k^2p_1(\tau)}{6}\xi_1^4\right\}. \qquad (18)$$

Оставшуюся еще неизвестной функцию температуры центра $\theta_{\ddot{O}}(\tau)$ определяем интегральным условием (8), в которое подставляем выражения $f_1(\tau)$ (14) и $\theta(\xi_1,\xi_2,\tau)$ (18). С учетом начального условия $\theta(0{,}0{,}0)=\theta_{\ddot{O}}(0)=\theta_0$ окончательно имеем

$$\theta_{\ddot{O}}(\tau)=\int_{\tau_0}^{\tau}\left[\chi(\eta)-\dot{\Xi}(\eta)\right]d\eta+\theta_0 \qquad (19)$$

где

$$\chi(\tau)=k\left(1+k^2\right)Ki_2(\tau)\left[\frac{1+k}{1+k^2}-p_1(\tau)/3\right],$$

$$\Xi(\tau)=\frac{Ki_2(\tau)}{180k}\left[30\left(k^2+1\right)k-p_1(\tau)\left(7+3k+7k^2\right)\right]. \qquad (20)$$

Таким образом, вспомогательная задача (1), (2), (5) решена.

Решение основной задачи. Получаемое решение (18) вспомогательной задачи используем для исследования ТС призмы при лучистом нагреве. В работах [4…6] приведено высокоточное приближенное решение нелинейной задачи теплопроводности неограниченной пластины в условиях радиации, согласно которому температура поверхности $\bar{\theta}_{\ddot{I}}(t)$ определяется выражением

$$\left[\varphi\left(\bar{\theta}_{\Pi}\right)-\varphi\left(\bar{\theta}_{\Pi}^{0}\right)\right]+\frac{Sk}{3}\left[\psi\left(\bar{\theta}_{\Pi}\right)-\psi\left(\bar{\theta}_{\Pi}^{0}\right)\right]=Sk\tau\ ; \qquad (21)$$

где

$$\varphi\left(\bar{\theta}_{\ddot{I}}\right)=\frac{1}{2}\left[arcth\,\bar{\theta}_{\Pi}(\tau)+arctq\,\bar{\theta}_{\Pi}(\tau)\right]; \qquad (22)$$

$$\psi\left(\bar{\theta}_{\Pi}\right)=-ln\left[1-\bar{\theta}_{\Pi}^{4}(\tau)\right]; \qquad (23)$$

Здесь температурная функция поверхности θ_{Π}^{0} в конце $(\tau=\tau_0)$ начального прогрева детерминируется решением алгебраического уравнения

$$\bar{\theta}_{\Pi}^{0\ 4}+a_1\bar{\theta}_{\Pi}=a_0\ ;\quad a_0=1+2\bar{\theta}_0/Sk;\ \ a_1=2/Sk. \qquad (24)$$

Полагая, что температура поверхностей центральных точек граней призмы, ввиду осевой симметрии, изменяются по закону, близкому к трансцендентному уравнению (20), а по периметру – в соответствии с ГУ (2), можем принять

$$Ki(\tau)=Sk_i\left[1-\bar{\theta}_{\Pi}^{4}(\tau)\right]; \qquad (25)$$

В таком случае выражениями (18)...(24) полностью определяется ТС призмы.

Проведенные на численном примере расчеты по предложенному решению и численному интегрированию дали расхождение в пределах 3÷5 %.

Заключение. Путем приближенного аналитического решения поставленной краевой задачи теплопроводности с нелинейным ГУ при помощи МЭИ получена функция, определяющая в явном виде координатную зависимость температурного поля призмы. Это дает возможность использовать известные методы термомеханики для исследования термонапряженного состояния соответствующих объектов призматической формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В.В., Видин Ю.В., Колесник В.А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным телом. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1990. 160 с.
2. Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1992. 69 с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
4. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев-Донецк: Высш. шк. Головн. изд-во, 1984. 158 с.
5. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Нелінійна прикладна термомеханіка. Київ: УМЦ ВО МОНУ, 2000. 280 с. ISBN 5-7763-2753-9.
6. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Метаругійна термомеханіка. Дніпропетровськ: Сисмтемні технології, 2002. 633 с. ISBN 966-7316-69-6.
7. Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Пекарский М.Я. Кольцевые печи. Минск: Высш. шк., 1993. -248 с.
8. Прикладные задачи металлургической теплофизики/В.И.Тимошпольский, Н.М.Беляев, А.А.Рядно и др. Минск: Наука і техніка, 1991. – 320 с.
9. Постольник Ю.С. Фролова Л.В. Исследование теплового режима работы кессона конвертера //Изв.вузов. Черн. Металлургия, 1979. № 10. С. 84-87.

пост. 17.01.06.