Теоретико-груповий опис викривлених просторів зі скрутом

К.О. ШТЕФАН, Ю.М. МАКОГОН

Дніпродзержинський державний технічний університет

Розглядається теоретико-груповий підхід для опису ріманових просторів. Загальна методика побудови деформованих нескінчених груп Лі [1] конкретизована для деформованої групи $G_M^g = DiffM \times)GL(n,R)^g$. Показано, що група своєю дією у реперному розшаруванні многовиду М задає структуру викривленого простору зі скрутом.

В данной работе рассматривается теоретико-групповой подход для описания римановых пространств. Общая методика построения деформированных бесконечных групп Ли [1] конкретизирована для случая деформированной группы $G_M^g = DiffM \times)GL(n,R)^g$. Показано, что группа своим действием в реперном расслоении над многообразием М задает структуру искривленного пространства с кручением.

In this article the theoretic-group description of riemannian spaces was studied. The general technique of construction of the infinite deformed Lie groups [1] concretized for the deformed group $G_M^g = DiffM \times)GL(n,R)^g$. It was shown that the group's action on the frames' bundle of the manifold M sets the structure of the curved space with the torsion.

Вступ. Вивчення викривлених просторів набуває дедалі більшого значення через їх застосування в сучасних фізичних теоріях, в тому числі у теорії гравітації. У роботах [1], [2] з фізичних міркувань була запропонована ідея використання деформованих нескінчених груп Лі для опису довільно викривлених просторів. Ефективність цього підходу проявляється у можливості реалізації ерлангенської програми Ф.Клейна [3] для довільно викривлених просторів. У [4] була наведена методика побудови деформованих груп дифеоморфізмів.

У даній роботі розглянуто групу $G_M^g = DiffM \times)GL(n,R)^g$, що діє у реперному розшаруванні многовиду М. Згідно з вищезгаданою методикою була побудована деформована група G_M^{gH}, досліджена її дія на розшаруванні та показано відповідність групових об'єктів елементам геометричної структури, що задається дією групи.

Отримано структурні функції даної деформованої групи і показано, що тензор кривизни Рімана-Крістоффеля утворюється з цих функцій. Зв'язність в розшаруванні природним чином задається дією групи G_M^{gH}. Показано, що структурні рівняння групи співпадають зі структурними рівняннями простору лінійної зв'язності зі скрутом, і саме можливістю теоретико-групового опису скруту даний підхід відрізняється від підходу, основаного на деформованій групі дифеоморфізмів [4].

1. Основні відомості з методики деформацій. *Нехай x^μ - координати (індекси μ, ν, ρ, σ) деякого околу U многовиду M а G_M^g - нескінчена група Лі, яка параметризована гладкими* функціями $\tilde{g}^\alpha(x)$ (як індекси використовуються $\alpha, \beta, \gamma, \delta$). *Позначимо* $\partial_\nu := \frac{\partial}{\partial x^\nu}$.

Закон множення у групі задається формулою

$$(\tilde{g} \cdot \tilde{g}')^\alpha(x) = \tilde{\varphi}^\alpha(\tilde{g}(x), \tilde{g}'(x')) . \tag{1}$$

Формула
$$x'^\mu = \tilde{f}^\mu\left(x, \tilde{g}(x)\right) \tag{2}$$
задає дію групи G_M^g на многовиді M. Функції $\tilde{f}^\mu\left(x, \tilde{g}(x)\right)$ задовольняють умові

$$\left|\partial_\nu \tilde{f}^\mu\left(x, \tilde{g}(x)\right)\right| \neq 0, \forall x \in M .$$

Перехід між деформованою і недеформованою групами здійснюється за допомогою ізоморфізму

$$g^a(x) = H^a(x, \tilde{g}(x)) . \tag{3}$$

Гладкі функції $H^a(x, \tilde{g})$, які називаються функціями деформації, мають наступні властивості:

1H) $H^a(x,0) = 0, \forall x \in M$;

2H) $\exists K^\alpha(x,g) : K^a(x, H(x,\tilde{g})) = \tilde{g}^a$, $\forall \tilde{g} \in G, x \in M$.

Закон множення групи G_M^{gH} визначається ізоморфізмом (3) і формулами (1), (2):

$$\begin{aligned}(g * g')^a(x) = \varphi^a(x, g(x), g'(x')) := \\ := H^a(x, \tilde{\varphi}(K(x, g(x)), K(x', g'(x'))))\end{aligned} \tag{4}$$

$$x'^\mu = f^\mu(x, g(x)) := \tilde{f}^\mu(x, K(x, g(x))) . \tag{5}$$

Формула (5) описує дію групи G_M^{gH} на M .

Допоміжні функції $h(x)^a_\alpha := \partial H^a(x, \tilde{g}) / \partial \tilde{g}^\alpha \Big|_{\tilde{g}=0}$ називаються коефіцієнтами деформації, а група G_M^{gH} – нескінченною (узагальненою калібрувальною) деформованою групою.

2. Деформована група на головному розшаруванні. Нехай $P = M \times GL(n,R)$ – головне розшарування з базою M та структурною групою $GL(n,R)$ з координатами $\tilde{L}^i{}_j$ та законом множення

$$(\dot{\tilde{L}} \cdot \tilde{L}')^i{}_j = \tilde{\varphi}^i_j(\tilde{L}, \tilde{L}') = \tilde{L}^i_k \cdot \tilde{L}'^k{}_j .$$

Визначимо ліву та праву дії групи $GL(n,R)$ на P :

$$l_{\tilde{L}} : P = M \times GL(n,R) \to P' = M \times \tilde{L}^{-1} \cdot GL(n,R), \quad (6)$$

$$r_{\tilde{L}} : P = M \times GL(n,R) \to P' = M \times GL(n,R) \cdot \tilde{L}. \quad (7)$$

Розглянемо групу $G_M^g = DiffM \times)GL(n,R)^g$. Група G_M^g параметризується гладкими функціями $\tilde{g}^{\alpha}(x) = \tilde{t}^{\alpha}(x)$ і $\tilde{g}^i_j(x) = \tilde{L}^i{}_j(x)$, які задовольняють умові: $|\delta_\nu^\mu + \partial_\nu t^\mu(x)| \neq 0$, $\forall x \in M$.

Закон множення в G_M^g буде мати вигляд:

$$(\tilde{g} \times \tilde{g}')^\mu(x) = \tilde{t}(x) + \tilde{t}'(x'),$$

$$(\tilde{g} \times \tilde{g}')^i{}_j(x) = \tilde{\varphi}^i{}_j(\tilde{L}(x), \tilde{L}'(x')).$$

У довільному координатному околі U задаємо координатний репер:

$$\hat{e}_k = \delta_k^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (8)$$

Множина $\Re$ усіх реперів в усіх точках многовиду M, база M, базис усіх реперів та проекція $\pi : \Re \to M, \pi(\hat{e}(x)) = x$ формують реперне розшарування над многовидом M.

Конкретизуючи (6), для дії групи G_M^g маємо

$$\hat{e}_n^{\tilde{t}\tilde{L}}(x + \tilde{t}(x)) = \tilde{L}^{-1}(x)^m{}_n \cdot \hat{e}_m. \quad (9)$$

Деформуватимемо групу $G_M^g \to G_M^{gH}$ з допомогою функцій деформації з наступними додатковими властивостями:

3Н) $H^\mu(x, \tilde{t}, \tilde{L}) = \tilde{t}^\mu$, $\forall \tilde{t} \in Diff\, M$, $\tilde{L} \in GL(n,R)$, $x \in M$;

4Н) $H^i{}_j(x, 0, \tilde{L}) = \tilde{L}^i{}_j$, $\forall \tilde{L} \in GL(n,R)$, $x \in M$.

Нехай $\Lambda(x, t(x)) \in GL(n, M \times DiffM)$ – гладка функція, така що $\Lambda(x,0)^k{}_j = \delta_j^k, \forall x \in M$. Функції деформації визначимо таким чином:

$$H^i{}_j(x, \tilde{t}(x), \tilde{L}(x)) = \tilde{L}^i{}_k(x) \cdot \Lambda^{-1}(x, \tilde{t}(x))^k{}_j.$$

Деформована група G_M^{gH} параметризується функціями

$$t^i(x) = H^i(x, \tilde{t}(x), \tilde{L}(x)) = \tilde{t}^i(x) \quad (10)$$

та

$$L^i{}_j(x) = H^i{}_j(x, \tilde{t}(x), \tilde{L}(x)). \quad (11)$$

Через ізоморфізм груп G_M^{gH} має структуру $Diff\, M \times)GL(n,R)$. Закон множення у деформованій групі G_M^{gH} випливає з закону множення у G_M^g:

$$L_3(x)^k_l = L_1(x)^k_q \Lambda(x, t_1(x))^q_s L_2(x')^s_p \cdot \\ \cdot \Lambda(x', t_2(x'))^p_n \Lambda^{-1}(x, t_3(x))^n_l, \quad (12)$$

$$t_3{}^\mu(x) = t_1{}^\mu(x) + t_2{}^\mu(x'). \quad (13)$$

Група G_M^{gH} діє на реперах за формулою:

$$\hat{e}_n^{tL}(x + t(x)) = L^{-1}(x)^m_s \Lambda^{-1}(x, t(x))^s_n \hat{e}_m(x). \quad (14)$$

Властивості 3Н), 4Н) призводять до того, що серед коефіцієнтів деформації групи G_M^{gH} залежать від x тільки

$$h(x)_\mu{}^i{}_j = \partial_{\tilde{\mu}} H^i_j(x, \tilde{t}(x), \tilde{L}(x))\Big|_{\tilde{g}=0} =: -\Gamma(x)_\mu{}^i{}_j, \quad (15)$$

де $\partial_{\tilde{\mu}} := \partial / \partial \tilde{t}^\mu$.

3. Структурні функції. Знайдемо структурні функції деформованої групи. Розкладаючи $H^a(x, \tilde{g})$ з точністю до $O(\tilde{g})$ та беручи до уваги властивості 3Н-4Н, отримаємо, що $H^a(x, \tilde{g}) = h^a_\alpha(x) \tilde{g}^\alpha$. Звідси

$$H^m(x, \tilde{g}) = h^m_\mu(x) \tilde{t}^\mu(x), \\ H^i{}_j(x, \tilde{g}) = \tilde{L}(x)^i{}_j - \Gamma(x)_\mu{}^i{}_j(x) \tilde{t}^\mu(x). \quad (16)$$

Аналогічно, з $K^\alpha(x, g) = h_a^\alpha(x) g^a$ слідує, що

$$K^\mu(x, g) = h^\mu_m(x) t^m(x), \\ K^i{}_j(x, g) = L(x)^i{}_j + \Gamma(x)_m{}^i{}_j(x)\, t^m(x). \quad (17)$$

Конкретизуючи формулу (12) та вважаючи g_1, g_2 незалежними від x, отримаємо розклад групового закону множення в наступному вигляді:

$$L_{3j}^i = L_{1j}^i + L_{2j}^i + L_{1r}^i L_{2j}^r + \Gamma(x')_p{}^i{}_j t_2{}^p + \\ + L_{1r}^i \Gamma(x')_p{}^r{}_j t_2{}^p + \Gamma(x)_n{}^i{}_r L_{2j}^r\, t_1{}^n + \\ + \Gamma(x)_n{}^i{}_r \Gamma(x')_p{}^r{}_j t_1{}^n t_2{}^p - \Gamma(x)_n{}^i{}_j t_2{}^n. \quad (18)$$

Використовуючи (18) знайдемо допоміжні функції

$$\lambda(g_1)^a_b := \partial_{g_2^b} \varphi^a(x, g_1, g_2)\Big|_{g_2=0} \quad (19)$$

та структурні функції

$$F(x)^a_{bc} := \partial_b \lambda(g)^a_c \Big|_{g=0} - \partial_c \lambda(g)^a_b \Big|_{g=0}. \quad (20)$$

Для G_M^{gH} отримуємо:

$$\lambda(g_1)^m_n = \delta^m_n,$$

$$\lambda(g_1)^m{}_k{}^l = 0,$$

$$\lambda(g_1)^i{}_{jn} = L_1(x)^i{}_r \Gamma(x)_n{}^r{}_j + \Gamma(x)_m{}^i{}_r \Gamma(x)_n{}^r{}_j t_1{}^m(x),$$

$$\lambda(g_1)^i{}_j{}_k{}^l = \delta^i_k \delta^l_j + L_1(x)^i{}_k \delta^l_j + \delta^l_j \Gamma(x)_m{}^i{}_k t_1{}^m(x).$$

З формули (20) для деформованої групи

$$F(x)^m_{bc} = 0, \quad (21)$$

для довільних індексів b та c, та трансляційного параметру m.

$$F(x)^i{}_{j\nu\mu} = \Gamma(x)_\nu{}^i{}_r \Gamma(x)_\mu{}^r{}_j - \\ -\Gamma(x)_\mu{}^i{}_r \Gamma(x)_\nu{}^r{}_j + \partial_\nu \Gamma(x)_\mu{}^i{}_j - \partial_\mu \Gamma(x)_\nu{}^i{}_j, \quad (22)$$

$$F(x)^i{}_j{}_k{}^l{}_p{}^q = \delta^i_p \delta^q_k \delta^l_j - \delta^i_k \delta^l_p \delta^q_j, \quad (23)$$

$$F(x)^i{}_j{}_p{}^q{}_\mu = \delta^i_p \Gamma(x)_\mu{}^q{}_j - \Gamma(x)_\mu{}^i{}_p \delta^j_q = \\ = F(x)^i{}_j{}_k{}^l{}_p{}^q\, \Gamma(x)_\mu{}^k{}_l. \quad (24)$$

Частково структурні функції визначаються структурними константами недеформованої групи. Формула (23) відповідає структурним константам групи $GL(n,R)$. Формула (21) виникає з абелевості групи трансляцій. Вираз (22) тотожний виразу для ріманового тензора кривизни.

4. Структурні рівняння деформованої групи.

Генератори дії G_M^{gH} (14) на реперах розпадаються на пару

$$X_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma(x)_{\mu}{}^{i}{}_{j} X_i{}^{j}, \qquad (25)$$
$$X_i{}^{j} = \tilde{X}_i{}^{j},$$

де $\tilde{X}_i{}^{j}$ є генератором лівої дії групи $GL(n,R)$ на P.

Розглянемо дію групи G_M^{gH} на дотичних векторах $\tau = \tau^n(x)\, e_n(x)$. Відповідно до (14) отримуємо:

$$\tau^{tL}(x)^m = L(x)^m{}_p \Lambda(x,t(x))^p{}_n \tau^n(x'). \qquad (26)$$

Тоді оператору (25) в дотичному просторі співставляється оператор

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma(x)_{\mu}{}^{i}{}_{j} \nabla_i{}^{j}, \qquad (27)$$

де $\nabla_i{}^{j} = \tau(x)^j \partial_{\tau^i}$ – матричний оператор. Тобто формула для інфінітезимальної дії групи на τ згідно з (27) має вигляд:

$$\nabla_{\mu}\tau^n = \partial_{\mu}\tau^n + \Gamma(x)_{\mu}{}^{n}{}_{m}\tau^m. \qquad (28)$$

Отже, функції $\Gamma(x)_k{}^m{}_n$ мають смисл коефіцієнтів зв'язності, а оператор (27) відповідає коваріантній похідній.

Рівнянням Маурера-Картана в термінах форм може бути записане у вигляді :

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} c^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c. \qquad (29)$$

Форми зв'язності у координатному базисі мають вигляд:

$$\omega^m = \delta^m_{\mu} dx^{\mu}, \qquad \omega^m{}_n = \Gamma(x)_{\mu}{}^{m}{}_{n} dx^{\mu}. \qquad (30)$$

Зважаючи на те, що

$$F^m{}_{np}{}^q{}_k \omega^p{}_q \wedge \omega^k + F^m{}_{nkp}{}^q \omega^k \wedge \omega^p{}_q = 0,$$

з (29) отримуємо

$$d\omega^m = 0, \qquad (31)$$

$$d\omega^m{}_n = \frac{1}{2} F^m{}_{np}{}^q{}_i{}^j \omega^p{}_q \wedge \omega^i{}_j + \frac{1}{2} F^m{}_{nkl}\omega^k \wedge \omega^l. \qquad (32)$$

Структурні функції $F^m{}_{nkl}$ задані формулою (22). Розглянемо

$$F^m{}_{np}{}^q{}_i{}^j \omega^p{}_q \wedge \omega^i{}_j = (\delta^m_p \delta^q_i \delta^j_n - \delta^m_i \delta^j_p \delta^q_n)\omega^p{}_q \wedge \omega^i{}_j = 2\omega^p{}_n \wedge \omega^m{}_p$$

Оскільки

$$\omega^j \wedge \omega^i{}_j = \omega^j \wedge (\Gamma_{\mu}{}^i{}_j dx^{\mu}) = \omega^j \wedge (\Gamma_{\mu}{}^i{}_j h^{\mu}_k \omega^k) = \frac{1}{2}(\Gamma_k{}^i{}_j - \Gamma_j{}^i{}_k)\omega^j \wedge \omega^k,$$

де $S^i_{kj} = \Gamma(x)_k{}^i{}_j - \Gamma(x)_j{}^i{}_k$ – тензор скруту, отримуємо

$$\omega^j \wedge \omega^i{}_j + \frac{1}{2} S^i_{kj}\omega^k \wedge \omega^j = 0.$$

Отже, структурні рівняння групи G_M^{gH} мають вигляд

$$d\omega^i = \omega^p \wedge \omega^i_p + \frac{1}{2} S^i_{pq}\omega^p \wedge \omega^q, \qquad (33)$$

$$d\omega^k{}_l = \omega^t{}_l \wedge \omega^k{}_t + \frac{1}{2} R^k_{lpq}\omega^p \wedge \omega^q, \qquad (34)$$

і співпадають зі структурними рівняннями простору лінійної зв'язності зі скрутом

Висновки. Згідно загальної методики деформації побудовано та досліджено групу $G_M^{gH} = DiffM \times) GL(n,R)^{gH}$ та її дію на реперному розшаруванні.

1. Отримано всі основні характеристики групи, а саме структурні функції та структурні рівняння. Однією зі структурних функцій є тензор кривизни Рімана-Крістоффеля.

2. Показано, що дія групи задає зв'язність на розшаруванні, коефіцієнти лінійної зв'язності виникають як похідні від функції деформації. В ролі коваріантної похідної виступає генератор дії групи.

3. Показано відповідність структурних рівнянь групи структурним рівнянням простору лінійної зв'язності зі скрутом.

Таким чином, деформована група G_M^{gH} своєю дією на розшаруванні реперів задає структуру простору лінійної зв'язності зі скрутом та довільною змінною кривизною. Саме розгляд більш широкої в порівнянні з [4] групи дає можливість отримати опис простору зі скрутом. Структурні рівняння слідують з групових аксіом та є необхідною умовою існування групи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповое описание калибровочных полей // ТМФ. – 1988. – 76, №1. – С. 66 - 77.
2. Самохвалов С.Е. О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, №12. – С. 1599 - 1603.
3. Klein F. Vergleichende Betrachtungen Uber Neuere Geometrische Forschungen (Erlanger Programm), Erlangen// 1872
4. Самохвалов С.Е. Теоретико-груповий опис рімановых просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №9. – С. 1238 - 1248.

пост. 06.09.06.