Усереднення задач оптимального керування з фазовими обмеженнями типу рівностей

Н.О. ДЕКУН

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту

Досліджується проблема усереднення задачі оптимального керування з фазовими обмеженнями типу рівностей для лінійного еліптичного рівняння. У припущенні, що всі компоненти математичного опису даної задачі залежать від деякого малого параметру ε , вивчається її поведінка при $\varepsilon \to \theta$, а також ідентифікується математична модель граничної (усередненої) задачі оптимального керування та її варіаційні властивості.

Изучается проблема усреднения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств для линейного эллиптического уравнения. В предположении, что все компоненты математического описания данной задачи зависят от некоторого малого параметра ε , изучается ее поведение при $\varepsilon \to \theta$, а также идентифицируется математическая модель предельной (усредненной) задачи оптимального управления и ее вариационные свойства.

The optimal control problem with the equality state constraints for the linear elliptic equation is studied. Each component of the mathematical description of this problem may depend on some small parameter ε . The limit of this problem as $\varepsilon \to \theta$ is investigated. The result of identification of the limit optimal control problem and of its variational properties is given.

Робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки задач оптимального керування (ЗОК) з фазовими обмеженнями типу рівностей для розподілених систем, які описуються рівняннями в частинних похідних. Особливістю розглянутих задач є те, що їхні математичні моделі суттєво залежать від деякого параметра ε. При досить малих значеннях ε чисельні методи, як правило, неспроможні в аналізі таких задач. Таким чином, природно розглядати задачу в усередненні, тобто вивчати її асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to \theta$. У зв'язку з цим пропонується метод усереднення, зміст якого полягає в тому, щоб для різних значень ε представити ЗОК у вигляді послідовності відповідних задач умовної мінімізації (ЗУМ) з подальшою реалізацією граничного переходу на сукупності ЗУМ і реконструкцією граничної ЗУМ до форми ЗОК [1]. При цьому повинна виконуватися основна варіаційна властивість: збіжність оптимальних розв'язків і найменших значень функціоналів якості вихідної задачі (при $\varepsilon \to \theta$) до аналогічних характеристик граничної (усередненої).

Необхідність в дослідженні таких проблем продиктована потребами механіки композитних матеріалів та теорії обчислювальних методів [2]. Взагалі питанням математичної теорії задач оптимального керування системами з розподіленими параметрами присвячена значна кількість досліджень таких вчених, як Kesavan, S.J. Paulin, Dal Maso J., Zoubairi H., Buttazzo, Когут П.І., Leugering G. та інших. Проте наявність фазових обмежень типу рівностей суттєво ускладнює процедуру усереднення таких задач з використанням усталених схем. Вперше проблема усереднення крайової задачі Діріхлє із залученням її апроксимації в просторах з мірою була розв'язана в роботі [3]. Недослідженою залишалась асимптотична поведінка (коли $\varepsilon \to \theta$) задачі оптимального керування такими системами.

1. Постановка задачі. Нехай Ω - відкрита обмежена зв'язна множина в R^n з досить гладкою границею $\partial\Omega$, E - частково упорядкована за спаданням множина з мінімальним елементом θ, $\{S_\varepsilon \subset \Omega\}_{\varepsilon \in E}$ - сімейство замкнутих підмножин з непустою внутрішністю. Для заданих функцій $z_d \in L^2(\Omega)$,
$\{f_\varepsilon \in L^2(\Omega)\}_{\varepsilon\in E} \xrightarrow{w_{L^2(\Omega)}} f_0$,
$\{\Psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\}_{\varepsilon\in E} \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} \Psi_0$ і фіксованого $\varepsilon \in E$ розглянемо наступну ЗОК з фазовими обмеженнями типу рівностей для оператора Лапласа:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta y = f_\varepsilon + v \ \text{ в } D'(\Omega), \\ v \in M(\Omega), y \in H_0^1(\Omega), y = \Psi_\varepsilon \text{ на } S_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$I_\varepsilon(v, y) = \|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega \setminus S_\varepsilon)} + \|v\|_{M(\Omega)} \to \inf . \tag{2}$$

2. Апроксимація. Оскільки допустимі керування беруться з класу радонових мір $M(\Omega)$, то задача (1)-(2) в такій постановці може, взагалі кажучи, не мати розв'язків в просторі $M(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Крім того, наявність сильних фазових обмежень значно ускладнює процес розв'язання задачі. У зв'язку з цим виникає питання про регуляризацію вихідної задачі. Найпростіший спосіб – це обрати більш прийнятний клас функцій керування, ніж $M(\Omega)$, і оштрафувати цільовий функціонал (2):

$$v \in H^{-1}(\Omega),\ I(v, y) = \|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega \setminus S_\varepsilon)} + \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} + \\ + \|y - \Psi_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \to \inf .$$

Однак, всупереч можливості розв'язання отриманої в такий спосіб задачі, мінімізація функціонала якості, на жаль, не гарантує виконання фазових обмежень. Можна ще більше звузити клас керувань і оштрафувати цільовий функціонал таким чином, щоб його мінімізація все ж таки гарантувала виконання фазових обмежень:

$$v \in L^2(\Omega),\ I^\delta_{\varepsilon,\alpha}(v, y) = \|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega \setminus S_\varepsilon)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} + \\ + \delta^{-1}\left[\beta\left(\alpha - \|y - \Psi_\varepsilon\|_{L^2(S_\varepsilon)}\right)\right]^2 \to \inf,$$

$\beta : R^1 \to R^1_+,\ \beta(t)$ спадає на $R^1_-,\ \beta(t)=0\ \ \forall t\ge 0.$

В цьому випадку маємо більш прийнятну і просту з точки зору практичного застосування задачу, але при цьому 3-параметричну, що істотно ускладнює процедуру усереднення.

Пропонується наступний спосіб регуляризації, який полягає в тому, щоб звузити клас допустимих керувань $M(\Omega)$ до таких , котрі допускають представлення

a) $v=-(y-\Psi_\varepsilon)\mu_\varepsilon+u, u\in L^2(\Omega), \mu_\varepsilon\in M_0^2(\Omega),$

де перший доданок відповідає за реалізацію фазових обмежень. Тут μ_ε - міра Бореля із простору

$$M_0^2(\Omega):\ \begin{array}{l}(i)\mu(B)=0\ \ \forall B\subseteq\Omega\ \text{ з }\ \operatorname{cap}(B,\Omega)=0,\\ (ii)\mu(B)=\inf\left\{\mu(U):\ U-\text{к.в.},\ \ B\subseteq U\subseteq\Omega\right\},\end{array}$$

$\operatorname{cap}(B,\Omega)=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla y|^2dx \,\middle|\, y\in H_0^1(\Omega): y\ge 1\ \ \textit{м.в.в}\ \ \Omega\right\}$ - ємність множини B відносно множини Ω (див. [3]).

Можна показати, що при певному виборі міри μ_ε

b) $\mu_\varepsilon(B)=\begin{cases}0, & \operatorname{cap}(B\cap S_\varepsilon,\Omega)=0,\\ +\infty, & \operatorname{cap}(B\cap S_\varepsilon,\Omega)>0,\end{cases}$

вихідну ЗОК (1)-(2) можна підмінити наступною задачею в мірах:

$$\left.\begin{array}{l}u\in L^2(\Omega), y\in H_0^1(\Omega), y-\Psi_\varepsilon\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\\ \int_\Omega(\nabla y,\nabla\varphi)dx+\int_\Omega(y-\Psi_\varepsilon)\varphi d\mu_\varepsilon=\\ \qquad\qquad=\langle f_\varepsilon+u,\varphi\rangle\forall\varphi\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\\ V_{\mu_\varepsilon}(\Omega)=H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\end{array}\right\}\quad(3)$$

$$\begin{array}{l}I_\varepsilon(u,y)=\int_{\Omega\setminus S_\varepsilon}|y-z_d|^2dx+\int_\Omega u^2dx+\\ \quad+\int_\Omega|\nabla(y-\Psi_\varepsilon)|^2dx+\int_\Omega(y-\Psi_\varepsilon)^2d\mu_\varepsilon\to\inf\end{array}\quad(4)$$

Остання задача, взагалі кажучи, суттєво відрізняється за своєю структурою від вихідної задачі. Проте вона не містить фазових обмежень в явному вигляді, є розв'язною, має єдиний розв'язок, і що саме головне, її розв'язок є також розв'язком вихідної задачі і навпаки. Функціонал якості апроксимаційної задачі (3)-(4) є не що інше, як оцінка зверху функціонала якості вихідної задачі.

3. Усереднення. Будемо виходити з наступної схеми усереднення:

1) запишемо ЗОК (3)-(4) у вигляді задачі умовної мінімізації

$$\left\{\left\langle\inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon}I_\varepsilon(u,y)\right\rangle\right\}_{\varepsilon\in E},\quad(5)$$

$$\Xi_\varepsilon=\left\{(u,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}u\in L^2(\Omega), y\in H_0^1(\Omega), y-\Psi_\varepsilon\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\\ \langle-\Delta y,\varphi\rangle+\int_\Omega(y-\Psi_\varepsilon)\varphi d\mu_\varepsilon=\\ \qquad=\langle f_\varepsilon+u,\varphi\rangle\forall\varphi\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\end{array}\right\}\quad(6)$$

$$\begin{array}{l}I_\varepsilon(u,y)=\int_{\Omega\setminus S_\varepsilon}|y-z_d|^2dx+\int_\Omega u^2dx+\\ \quad+\int_\Omega|\nabla(y-\Psi_\varepsilon)|^2dx+\int_\Omega(y-\Psi_\varepsilon)^2d\mu_\varepsilon\to\inf;\end{array}\quad(7)$$

2) для сукупності задач (5) визначимо граничну (при $\varepsilon\to\theta$) ЗУМ;

3) по граничній ЗУМ відновимо граничну ЗОК.

Оскільки при різних значеннях $\varepsilon\in E$ розв'язки задач (5) належать до різних функціональних просторів, то для здійснення процедури граничного переходу в (5) скористаємося концепціями варіаційної S-збіжності задач умовної мінімізації (див. [1]) і γ^Δ-збіжності мір в просторі $M_0^2(\Omega)$ (див. [3]), на підставі яких вводимо наступне

Означення 1. ЗУМ $\left\langle\inf_{(u,y)\in\Xi_0}I_0(u,y)\right\rangle$ є варіаційною границею сукупності (5) відносно γ^Δ-збіжності, якщо виконуються умови:

$$\text{(I) }\Xi_0=\left\{(u,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}u\in L^2(\Omega), y\in H_0^1(\Omega), y-\Psi_0\in V_{\mu_0}(\Omega),\\ \langle-\Delta y,\varphi\rangle+\int_\Omega(y-\Psi_0)\varphi d\mu_0=\\ \qquad=\langle f_0+u,\varphi\rangle\forall\varphi\in V_{\mu_0}(\Omega),\\ V_{\mu_0}(\Omega)=H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_0}(\Omega),\end{array}\right\}$$

(II) $\forall(u,y)\in\Xi_0,\ \ \forall H\in H^\#$ ($H^\#$ - решітка на E)

$$\forall\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}\xrightarrow{w_{L^2(\Omega)}\times w_{H_0^1(\Omega)}}(u,y):$$
$$I_0(u,y)\le\liminf_{H\ni\varepsilon\to\theta}I_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon);$$

(III) $\forall(u,y)\in\Xi_0,\ \ \forall H\in \mathrm{H}$ (H - фільтр на E)

$$\forall\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}\xrightarrow{w_{L^2(\Omega)}\times w_{H_0^1(\Omega)}}(u,y):$$

$$I_0(u,y)\ge\limsup_{H\ni\varepsilon\to\theta}I_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon);$$

Можна показати, що ЗУМ, гранична в сенсі означення 1, зберігає необхідні варіаційні властивості**:**

$$\left\{(u_\varepsilon^0,y_\varepsilon^0)\in\Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon\in E}\xrightarrow{w_{L^2(\Omega)}\times w_{H_0^1(\Omega)}}(u^0,y^0)\in\Xi_0,$$
$$I_\varepsilon(u_\varepsilon^0,y_\varepsilon^0)\xrightarrow[\varepsilon\to\theta]{}I_0(u^0,y^0),$$

де $(u_\varepsilon^0,y_\varepsilon^0)$ і (u^0,y^0) - оптимальні розв'язки вихідної (при кожному ε) та усередненої задачі відповідно.

Використовуючи концепції γ^Δ-збіжності мір Бореля [3], Γ-збіжності функціоналів [4] і варіаційної збіжності задач умовної мінімізації відносно γ^Δ-збіжності (означення 1), можна показати справедливість наступного результату.

Теорема 1. Нехай для ЗОК (1)-(2) виконуються умови a-b. Тоді в припущенні, що $\chi_{\Omega_\varepsilon}\xrightarrow{w^*_{L^\infty(\Omega)}}\chi_0$, існує міра $\mu_0\in M_0^2$, $\mu_0=\gamma^\Delta-\lim_{\varepsilon\to\theta}\mu_\varepsilon$, така що варіаційна границя відносно γ^{Δ}-збіжності сукупності задач (5) існує, і при цьому відповідна до неї ЗОК може бути представлена в наступному вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} u\in L^2(\Omega),\ y\in H_0^1(\Omega),\ y-\Psi_0\in V_{\mu_0}(\Omega),\\ -\Delta y+(y-\Psi_0)\mu_0=f_0+u \ \text{ в } V'_{\mu_0}(\Omega), \end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l} I_0(u,y)=\int\limits_{\Omega}\chi_0(y-z_d)^2dx+\int\limits_{\Omega}u^2dx+\\ +\int\limits_{\Omega}|\nabla(y-\Psi_0)|^2dx+\int\limits_{\Omega}|y-\Psi_0|^2d\mu_0\to\inf. \end{array} \tag{9}$$

4. Випадок перфорованих областей. Нехай Ω - відкрита обмежена зв'язна множина в R^n з досить гладкою границею $\partial\Omega$, E - частково упорядкована за спаданням множина з мінімальним елементом θ, $\{\Omega_\varepsilon\subset\Omega\}_{\varepsilon\in E}$ - сімейство відкритих підмножин. Для заданих функцій $z_d\in L^2(\Omega)$, $\{f_\varepsilon\in L^2(\Omega)\}_{\varepsilon\in E}\xrightarrow{w_{L^2(\Omega)}}f_0$ і фіксованого $\varepsilon\in E$ розглянемо наступну ЗОК:

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta y=f_\varepsilon+\chi_{\Omega_\varepsilon}u \ \text{ в } D'(\Omega_\varepsilon),\\ u\in L^2(\Omega_\varepsilon),\ y\in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\\ \widetilde{u}\in U_\varepsilon=\left\{u\in L^2(\Omega)\left|\begin{array}{l}\xi_1\chi_{\Omega_\varepsilon}\le u\le\xi_2\chi_{\Omega_\varepsilon},\\ u\in\Lambda\subset L^2(\Omega),\end{array}\right.\right\} \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$I_\varepsilon(u,y)=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla y|^2dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|y-z_d|^2dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}u^2dx\to\inf. \tag{11}$$

Тут $\widetilde{u}$ - продовження нулем функції $u\in L^2(\Omega_\varepsilon)$ ($\Omega_\varepsilon\subset\Omega$) на множину $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$.

Задачу (10)-(11) можна також усереднити наведеним вище способом. Для цього потрібно скористатися наступним зауваженням.

Зауваження 1.[3] Якщо продовжити функцію $y\in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ ($\Omega_\varepsilon\subset\Omega$) нулем на множину $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$, то $\widetilde{y}\in H_0^1(\Omega)$. Тому, якщо визначити міру $\mu_\varepsilon\in M_0^2(\Omega)$ як

$$\mu_\varepsilon(B)=\begin{cases}0, & \operatorname{cap}(B\cap(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon),\Omega)=0,\\ +\infty, & \operatorname{cap}(B\cap(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon),\Omega)>0,\end{cases} \tag{12}$$

то функції $\widetilde{y}_\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$ будуть розв'язками задач

$$\begin{array}{l} y_\varepsilon\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega):\\ \langle-\Delta y_\varepsilon,\varphi\rangle+\int\limits_{\Omega}y_\varepsilon\varphi d\mu_\varepsilon=\langle f_\varepsilon+\chi_{\Omega_\varepsilon}u,\varphi\rangle\ \ \forall\varphi\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega) \end{array} \tag{13}$$

тоді і тільки тоді, коли їхні звуження $y_\varepsilon\in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ будуть розв'язоками задач

$$\begin{array}{l} y_\varepsilon\in H_0^1(\Omega_\varepsilon):\\ -\Delta y_\varepsilon=f_\varepsilon+\chi_{\Omega_\varepsilon}u \ \text{ в } D'(\Omega_\varepsilon). \end{array} \tag{14}$$

Завдяки цьому зауваженню можна переписати задачу (10)-(11) в наступному вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} u\in L^2(\Omega),\ \chi_{\Omega_\varepsilon}u\in U_\varepsilon,\ y\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega),\\ \int\limits_{\Omega}(\nabla y,\nabla\varphi)dx+\int\limits_{\Omega}y\varphi d\mu_\varepsilon=\\ \qquad=\langle f_\varepsilon+\chi_{\Omega_\varepsilon}u,\varphi\rangle\ \ \forall\varphi\in V_{\mu_\varepsilon}(\Omega), \end{array}\right\} \tag{15}$$

$$\begin{array}{l} I_\varepsilon(u,y)=\int\limits_{\Omega}|\nabla y|^2dx+\int\limits_{\Omega}(y-\chi_{\Omega_\varepsilon}z_d)^2dx+\\ \qquad+\int\limits_{\Omega}\chi_{\Omega_\varepsilon}u^2dx\to\inf. \end{array} \tag{16}$$

Слідуючи запропонованій схемі усереднення (запис ЗОК у вигляді ЗУМ, знаходження для неї границі в сенсі означення 1, відновлення граничної ЗОК по граничній ЗУМ), одержуємо усереднену до (15)-(16) задачу, яка має вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta y+\mu_0y=f_0+u \ \text{ в } V'_{\mu_0}(\Omega),\\ y\in H_0^1(\Omega),\ y-\Psi_0\in V_{\mu_0}(\Omega),\\ u\in U_0=\left\{u\in L^2(\Omega)\left|\begin{array}{l}\xi_1\chi_0\le u\le\xi_2\chi_0,\\ \chi_0^{-1}u\in\Lambda\subset L^2(\Omega),\end{array}\right.\right\} \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$\begin{array}{l} I_0(u,y)=\int\limits_{\Omega}|\nabla y|^2dx+\int\limits_{\Omega}y^2d\mu_0+\int\limits_{\Omega}(y-\chi_0z_d)^2dx+\\ \qquad+\int\limits_{\Omega}\chi_0^{-1}u^2dx\to\inf, \end{array} \tag{18}$$

$$\chi_0=w^*_{L^\infty(\Omega)}-\lim\chi_{\Omega_\varepsilon},\quad \mu_0=\gamma^{\Delta}-\lim_{\varepsilon\to\theta}\mu_\varepsilon.$$

5. Приклад. Нехай Ω - підобласть в R^2 з достатньо гладкою границею, перфорована зростаючою кількістю «дір», що зменшуються в розмірах при $\varepsilon\to\theta$. Множина Ω_ε інтерпретується як зона керування і має решітчану періодичну структуру з періодом ε (рис.1), яка задається в такий спосіб:

$$\Omega_\varepsilon=\Omega\cap Q_\varepsilon,\quad Q_\varepsilon=R^n\setminus\bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)}T_i^\varepsilon,\ \ (n\ge 2),$$

$$T_i^\varepsilon:\ \begin{cases} a_\varepsilon=\exp\left(\dfrac{-C_0}{\varepsilon^2}\right), & n=2,\\ a_\varepsilon=C_0\varepsilon^{n/n-2}, & n\ge 3,\end{cases}$$

T_i^ε - сфери радіуса a_ε, центровані в центрах кубів P_i^ε (комірка періодичності представлена на рисунку 2). Такий тип перфорації був запропонований в [5].

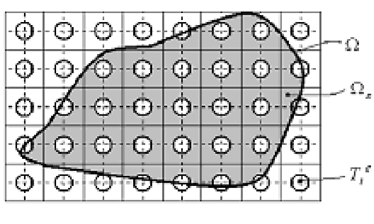

рис.1

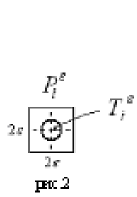

рис.2

Для заданої функції $f\in L^2(\Omega)$ і $\varepsilon\in E$ розглянемо наступну ЗОК:

$$
\left.\begin{array}{l}
-\Delta y = f + u \quad \hat{a} \quad D'(\Omega_\varepsilon), \\
u \in L^2(\Omega_\varepsilon), \;\; y \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\
\widetilde{u} \in U_\varepsilon = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \|u\|_{L^2(\Omega)} \le 2, -(\operatorname{meas} \Omega)^{-1/2} * \\ * \, \chi_{\Omega_\varepsilon} \le \chi_{\Omega_\varepsilon} u \;\; \text{і.â. â} \;\; \Omega, \end{array} \right. \right\}
\end{array}\right\} \qquad (19)
$$

$$
I_\varepsilon(u, y) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 dx \to \inf . \qquad (20)
$$

Застосовуючи описану вище процедуру усереднення і враховуючи той очевидний факт, що для означеного випадку перфорації підмножина Ω_ε в границі при $\varepsilon \to \theta$ співпадає з усією множиною Ω, тобто $\chi_0 = w^*_{L^\infty(\Omega)} - \lim \chi_{\Omega_\varepsilon} = 1$, можна показати, що усереднена задача оптимального керування в цьому випадку існує і може бути представлена у вигляді ЗОК:

$$
\left.\begin{array}{l}
-\Delta y + \mu_0 y = f + u \;\; в \;\; V'_{\mu_0}(\Omega), \\
y \in V_{\mu_0}(\Omega), \\
u \in U_0 = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \|u\|_{L^2(\Omega)} \le 2, \\ -(\operatorname{meas}\Omega)^{-\frac{1}{2}} \le u \;\; \text{м.в. в}\, \Omega, \end{array} \right. \right\}
\end{array}\right\} \qquad (21)
$$

$$
I_0(u, y) = \int_\Omega |\nabla y|^2 dx + \int_\Omega y^2 d\mu_0 + \int_\Omega u^2 dx \to \inf, \qquad (22)
$$

$$
\mu_0 = \gamma^\Delta - \lim_{\varepsilon \to \theta} \mu_\varepsilon .
$$

Для того, щоб визначити граничну міру, скористаємося наступним результатом.

Теорема 2.[5] Якщо існує послідовність $\{\omega_\varepsilon \in H^1(\Omega)\}_{\varepsilon \in E} \xrightarrow{w_{H^1(\Omega)}} 1$, така що $\omega_\varepsilon = 0$ на "дірах" T_ε^i $(1 \le i \le n(\varepsilon))$, то існує міра $\mu_* \in M_0^2(\Omega)$, для якої є справедливою збіжність

$$
\langle -\Delta \omega_\varepsilon, \eta_\varepsilon \rangle \to \int_\Omega \eta \, d\mu_* \qquad (23)
$$

$$
\forall \eta_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \forall \eta \in H_0^1(\Omega) : \; \chi_{\Omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon \xrightarrow{w_{H^1(\Omega)}} \eta .
$$

Для даного виду перфорованих областей такі послідовності були побудовані в [5] і було доведено, що збіжність (23) виконується, якщо μ_* визначається співвідношенням

$$
d\mu_* = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{C_0} dx, & n = 2, \\ S_n (n-2) C_0^{n-2}, & n \ge 3. \end{cases} \qquad (24)
$$

Тут S_n - поверхня одиничної сфери в R^n, C_0 - додатна константа.

Можна показати, що гранична міра μ_0 в задачі (21)-(22) задовольняє рівності $\mu_0 = \mu_*$. Для цього для будь-яких фіксованих елементів $f \in L^2(\Omega)$ і $u \in L^2(\Omega)$ розглянемо варіаційне формулювання вихідної задачі, приймаючи за тестову функцію $\omega_\varepsilon \varphi$, $\varphi \in D(\Omega)$. Одержуємо

$$
\begin{array}{l}
\int_\Omega (f + u) \omega_\varepsilon \varphi dx = \int_\Omega \varphi (\nabla \widetilde{y}_\varepsilon, \nabla \omega_\varepsilon) dx + \\
+ \int_\Omega \omega_\varepsilon (\nabla \widetilde{y}_\varepsilon, \nabla \varphi) dx = \int_\Omega \omega_\varepsilon (\nabla \widetilde{y}_\varepsilon, \nabla \varphi) dx + \\
+ \langle -\Delta \omega_\varepsilon, \varphi \widetilde{y}_\varepsilon \rangle - \int_\Omega \widetilde{y}_\varepsilon (\nabla \omega_\varepsilon, \nabla \varphi) dx.
\end{array} \qquad (25)
$$

Тоді, використовуючи (23) і той факт, що

$$
\omega_\varepsilon \xrightarrow{s_{L^2(\Omega)}} 1 , \qquad \nabla \omega_\varepsilon \xrightarrow{w_{(L^2(\Omega))^n}} \nabla 1 = 0 ,
$$

$$
\widetilde{y}_\varepsilon \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} y ,
$$

та переходячи в (25) до границі (коли $\varepsilon \to \theta$), отримуємо

$$
\int_\Omega (f + u) \varphi dx = \int_\Omega (\nabla y, \nabla \varphi) dx + \int_\Omega y \varphi d\mu_* \quad \forall \varphi \in D(\Omega).
$$

Отже, гранична функція $y \in H_0^1(\Omega)$ задовольняє рівнянню

$$
-\Delta y + \mu_* y = f + u \;\; в \;\; \mathrm{D}'(\Omega).
$$

Оскільки функція $y \in H_0^1(\Omega)$ задовольняє також і рівнянню (21), то завдяки результату єдності (див. лему 5.4 [3]) маємо: $\mu_0 = \mu_*$.

Таким чином, усереднена задача для сімейства (19)-(20) остаточно має наступний вигляд (для $n = 2$):

$$
\left.\begin{array}{l}
-\Delta y + \dfrac{\pi}{2C_0} y = f + u \;\; в \;\; \mathrm{D}'(\Omega), \\
y \in V_{\mu_0}(\Omega), \\
u \in U_0 = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \|u\|_{L^2(\Omega)} \le 2, \\ -(\operatorname{meas}\Omega)^{-\frac{1}{2}} \le u \;\; \text{м.в. в}\, \Omega, \end{array} \right. \right\}
\end{array}\right\} \qquad (26)
$$

$$
I_0(u, y) = \int_\Omega |\nabla y|^2 dx + \frac{\pi}{2C_0} \int_\Omega y^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \to \inf . \qquad (27)
$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Когут П.И. S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства. // Проблемы управления и информатики, 1997. - №4. - с.64-79.
2. Хвальків Н.С., Панасенко Г.П. Осереднение процесів у періодичних середовищах.- М.: Наука, 1984.- 352 с.
3. Dal Maso J., Murat F. Asymptotic behaviour and correctors for Dirihlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators // Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.-1997.-IV, Ser. 24, №2- P.239-290.
4. Dal Maso G. An introduction to Γ-Convergence. - Birkhäuser, Boston, 1993.
5. Cioranescu D., Murat F. A strange term comming from nowhere, in the book "Topic in the Math.Modelling of Composit Materials", Boston,Birkh\"auser, 1997, Prog.Nonlinear Diff.Equ.Appl., Vol.31, P.49-93.

пост. 15.05.06.