Теореми вкладення і нерівності типу Колмогорова

С.О. ПІЧУГОВ, О.Л. КІРЕЙКО

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна

Робота присвячена дослідженню питання зв'язку між теоремами вкладення функціональних класів і нерівностями для норм похідних періодичних функцій однієї змінної. Розглянуті теореми вкладення ліпшицевих класів, нерівності для норм похідних функцій типу Колмогорова-Надя та аналог нерівності Надя. Доведений факт еквівалентності між теоремами вкладення класів H_p^β, H_p^ω і аналогом нерівності Надя.

Работа посвящена исследованию вопроса связи между теоремами вложения функциональных классов и неравенствами для норм производных периодических функций одной переменной. Рассмотрены теоремы вложения липшицевых классов, неравенства для норм производных функций типа Колмогорова-Надя и аналог неравенства Надя. Доказан факт эквивалентности между теоремами вложения классов H_p^β, H_p^ω и аналогом неравенства Надя.

Work is devoted to research of a question of communication between theorems of an investment of functional classes and inequalities for norms of derivative periodic functions in an one-dimensional case. Theorems of an investment of lipshic's classes, inequalities for norms of derivative functions such as Kolmogorov - Nady and analogue of Nady's inequality are considered. The fact of equivalence between theorems of an investment of classes H_p^β, H_p^ω and analogue of inequality Nady's is proved.

Нехай p – дійсне число, таке, що $1 \le p < \infty$. Через $L_p(G)$ будемо позначати простір вимірних на множині G функцій однієї змінної $x(t)$: $G \to R$, для яких функція $|x(t)|^p$ інтегровна у сенсі Лебега. Кожній функції $x(t)$ поставимо у відповідність число

$$\|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1)$$

що називається нормою елементу $x \in L_p(G)$. У випадку $p = \infty$ нормою $x \in L_\infty(G)$ будемо називати число

$$\|x\|_{L_\infty(G)} := \sup_{t \in G} \, vrai \, |x(t)|.$$

Нехай $x(t) \in L_p(T)$, де T – коло, реалізоване як відрізок *[0;1]* з ототожненими кінцями, $1 \le p < \infty$. Розглянемо для періодичної функції $x(t)$ та $\delta \ge 0$ інтегральний модуль неперервності:

$$\omega(x,\delta)_p = \omega(x,\delta)_{L_p} := \sup_{|h| \le \delta} \|\Delta_h x\|_p . \qquad (2)$$

Для фіксованого модуля неперервності $\omega(\delta) \ne 0$ через H_p^ω будемо позначати множину функцій $x(t) \in L_p$, для яких $\omega(x,\delta)_p \le \omega(\delta)$, ($\delta \ge 0$).

Клас H_p^β є частинним випадком класу H_p^ω, коли $\omega(\delta) = \delta^\beta$, $0 \le \delta \le 1$, $0 < \beta \le 1$.

Зважаючи на те, що функції, які відрізняються на сталу ми ототожнюємо на класі H_p^ω, введемо числовий функціонал для функцій з класу H_p^ω наступним чином:

$$\|x\|_{H_p^\omega} := \sup_{\delta > 0} \frac{\omega(x,\delta)_p}{\omega(\delta)} < \infty . \qquad (3)$$

1. Теореми вкладення. Задача теорії вкладення полягає в тому, щоб з належності функції до одного з функціональних просторів вивести належність її до інших. Нехай E і E_1 - два нормовані функціональні простори. Кажуть, що E вкладено в E_1, та пишуть $E \subset E_1$, якщо, по-перше, усі елементи E містяться в E_1 та, по-друге, існує незалежна від $x(t)$ стала c, така що: $\|x\|_{E_1} \le c \cdot \|x\|_E$, $\forall x \in E_1$.

***Теорема 1.*[1]** *(*Харді, Літлвуд *) Нехай функція* $x(t) \in H_p^\alpha$ *з* $0 < \alpha \le 1$ *та* $1 \le p < \infty$. *Тоді :*

1) якщо $\alpha \cdot p \le 1$, *то* $x(t) \in H_q^{\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ *при всіх* $q \in \left(p, \dfrac{p}{1 - \alpha \cdot p} \right)$;

2) якщо $\alpha \cdot p > 1$, *то* $x(t)$ *еквівалентна неперервній функції* $x_1(t)$ *і* $x_1(t) \in H_q^{\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ *при всіх* $q \in (p, \infty]$.

Умови теореми можна переписати у вигляді : при $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < q \le \infty$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ має місце вкладення $H_p^\alpha \subset H_q^{\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$.

Теорема 2* [2].*(Ульянов) *Нехай дані числа* $1 \le p < q < \infty$ *і модуль неперервності* $\omega(\delta)$. *Тоді для того, щоб мало місце вкладення* $H_p^\omega \subset L_q$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p} - 2} \omega^q \left(\frac{1}{n} \right) < \infty . \qquad (4)$$

Перепишемо необхідну і достатню умову (4) у більш зручному інтегральному вигляді, застосувавши інтегральну ознаку Коші-Маклорена збіжності знакосталих рядів : $\int_0^1 \left(\frac{\omega(\delta)}{\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \right)^q \frac{d\delta}{\delta} < \infty$.

2. Нерівності типу Колмогорова. Нерівності для норм проміжних похідних функцій $x(t) \in L^r_{p,s}(G)$ (де $L^r_{p,s}(G) = L_p(G) \cap L^r_s(G)$), $G=R$ або T, тобто нерівності виду :

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q(G)} \le K \|x\|^{\alpha}_{L_p(G)} \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(G)} \qquad (5),$$

де k , $r \in Z_+$, $k<r$, а особливо нерівності зі сталими, що не покращуються, відіграють важливу роль у багатьох областях математики (див. напр. [5]). В наступній теоремі сформульовані умови існування нерівностей типу Колмогорова.

Теорема 3. **[3, 4]** *Нехай* $1 \le p,q,s \le \infty$, $\alpha \in (0;1)$, k , $r \in Z_+$, $k<r$. *Для того, щоб для будь-якої функції* $x(t) \in L^r_{p,s}(T)$ *мала місце нерівність :*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le K \|x\|^{\alpha}_p \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_s \qquad (6),$$

з константою K *, що не залежить від* $x(t)$ *, необхідно і достатньо, щоб показник* α *задовольняв умову :*

$$\alpha \le \alpha_{cr} = min\left\{ 1 - \frac{k}{r}; \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}} \right\}.$$

Розглянемо частинний випадок (5) при $k=0$, $r=1$. У цій ситуації для функцій, визначених на прямій, Б. С. Надь при усіх припустимих значеннях параметрів q , p , s довів точні нерівності і описав екстремальні функції. Тому нерівності типу :

$$\|x\|_{L_q(G)} \le K \|x\|^{\alpha}_{L_p(G)} \|x'\|^{1-\alpha}_{L_s(G)} \qquad (7)$$

носять назву нерівностей типу Надя. Вони неможливі на усьому класі $L^1_s(T)$, тому будемо розглядувати весь клас функцій з $L^1_s(T)$, але замість $\|x\|_q$ оцінювати, наприклад, $\|x - \hat{x}_0\|_q$, де $\hat{x}_0 = \int_0^1 x(t)dt$ - середнє значення функції $x(t)$ на періоді $T = [0;1]$ (див., напр. [5]).

3. Еквівалентність теорем вкладення і нерівностей типу Колмогорова-Надя.

Дослідимо зв'язок теорем Харді-Літлвуда (Теорема 1) і Ульянова (Теорема 2) про вкладення ліпшицевих класів H^{β}_p і класів H^{ω}_p в L_q $(1 \le p < q \le \infty)$ з нерівностями для норм функцій типу Надя. Так як оператор вкладення H^{β}_p в клас $H_q^{\beta - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$ обмежений, то цей факт означає, що
$\exists C = C(q,p,\beta) > 0$, $\forall x \in H^{\beta}_p$, $\forall h > 0$

$$\omega(x,h)_q \le C \|x\|_{H^{\beta}_p} h^{\beta - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} . \qquad (8)$$

Співвідношення (8) непокращуване у тому сенсі, що в правій частині показник степеня $\beta - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ взагалі кажучи неможливо замінити на менший. В подальшому П. Л. Ульянов довів, що для вкладення H^{ω}_p в L_q, необхідна і достатня умова : $\forall x \in H^{\omega}_p$, $\exists C_x = C_x(q,p) > 0$, $\forall h > 0$

$$\omega(x,h)_q \le C_x \left(\int_0^h \left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

З означення вкладення слідує, що оператор вкладення є обмеженим. Також у даному випадку він є лінійним, а слід – неперервним. З неперервності оператору вкладення слідує, що остання нерівність може бути представлена у наступному вигляді :

$$\exists C = C(q,p,\beta) > 0 ,\ \forall x \in H^{\omega}_p ,\ \forall h > 0$$

$$\omega(x,h)_q \le C \|x\|_{H^{\omega}_p} \left(\int_0^h \left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} . \qquad (9)$$

Нас буде цікавити частинний випадок нерівностей Надя. В роботах [3], [4] досліджені умови на параметри q,p,s,k,r,α , при яких існують нерівності (6). Зокрема, у випадку періодичних функцій при $p < q$ справедлива нерівність

$$\|x - \hat{x}_0\|_q \le K \|x - \hat{x}_0\|^{\alpha}_p \|x'\|^{1-\alpha}_s \qquad (10),$$

(з деякою константою K, що не залежить від x) для всіх локально абсолютно неперервних функцій x, $x' \in L_p$ тоді і тільки тоді, коли: $\alpha \le \alpha_{cr} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

В багатьох застосуваннях нерівностей (6) до задач аналізу випадок максимально допустимого α виявився особливо важливим (роботи [5], [6]).

Наступна теорема показує, що нерівність Надя (10) для $s = p$ при $\alpha = \alpha_{cr}$ у випадку $\beta = 1$ еквівалентна теоремі вкладення Харді-Літлвуда.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le p < q \le \infty$. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists C_1 > 0$, $\forall x \in H^1_p$, $\forall h > 0$

$$\omega(x,h)_q \le C_1 \|x\|_{H^1_p} \cdot h^{1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} ; \qquad (11)$$

2) $\exists C_2 > 0$, $\forall x \in H^1_p$

$$\|x - \hat{x}_0\|_q \le C_2 \|x - \hat{x}_0\|_p^{1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|x\|_{H^1_p}^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} . \qquad (12)$$

□ Доведення : Покажемо спочатку, що з (11) слідує (12). При $h \in (0;1]$ через x_h позначимо середню Стєклова функції x з кроком h : $x_h(t) = \frac{1}{h} \int_0^h x(t+s)ds$, і використаємо її для наближення x: $\|x\|_q \le \|x-x_h\|_q + \|x_h\|_q$. Тоді з (11) слідує, що

$$\|x-x_h\|_q = \left\| x(t) - \frac{1}{h}\int_0^h x(t+s)\,ds \right\|_q =$$

$$= \left\| \frac{1}{h}\int_0^h \left[x(t) - x(t+s) \right] ds \right\|_q \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int_0^h \|x(t)-x(t+s)\|_q\, ds$$

$$\le \frac{1}{h}\cdot\int_0^h \omega(x,s)_q\, ds \le \frac{1}{h}\omega(x,h)_q \cdot h \le$$

$$\le C_1 \|x\|_{H_p^1} \cdot h^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \text{ отже}$$

$$\|x-x_h\|_q \le C_1\|x\|_{H_p^1}\cdot h^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} . \qquad (13)$$

Далі для оцінки $\|x_h\|_q$ представимо x_h у вигляді згортки функції x з функцією $\aleph_{[0;h]}(t) = \begin{cases} 1, & t\in[0;h] \\ 0, & t\notin[0;h] \end{cases}$, а потім застосуємо нерівність Юнга [7] для згорток з показниками $p, r,$ де $\frac{1}{r} = 1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$:

$$\|x_h\|_q = \left\|\frac{1}{h}\int_0^h x(t+s)ds\right\|_q = \left\|\frac{1}{h}\int_0^1 x(t+s)\cdot\aleph_{[0;h]}(s)ds\right\|_q \le$$

$$\le \|x\|_p \cdot \left\|\frac{1}{h}\aleph_{[0;h]}\right\|_r = \|x\|_p \cdot h^{\frac{1}{r}-1} =$$

$$= \|x\|_p \cdot h^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} . \qquad (14)$$

З (13) і (14) слідує, що для $h\in(0;1]$:

$$\|x\|_q \le C_1\|x\|_{H_p^1}\cdot h^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} + \|x\|_p\cdot h^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} . \qquad (15)$$

Мінімум правої частини реалізується при $h_1 = \|x\|_p \|x\|_{H_p^1}^{-1}$. Однак, немає гарантії, що $h_1\in(0;1]$. Для усунення цього недоліку зазначимо, що співвідношення (15) залишається вірним при заміні x на $x-\hat{x}_0$. Тепер покладемо $h_0 = \dfrac{\|x-\hat{x}_0\|_p}{\|x\|_{H_p^1}}$ і відмітимо, що $h_1\in(0;1)$: це слідує з того, що $(x-\hat{x}_0)\perp 1$, а тоді за нерівністю Бора-Фавара [8] для функцій з періодом 1 : $\|x-\hat{x}_0\|_p \le \frac{1}{4}\|x\|_{H_p^1}$.

Тому з (15) для функції $x-\hat{x}_0$ при $h=h_0$ слідує (12) . Для доведення $(12)\Rightarrow(11)$ достатньо застосувати (12) до функції $\Delta_h x$, де $x\in H_p^1$:

$$\|\Delta_h x\|_q \le C_2\|\Delta_h x\|_p^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\cdot\|\Delta_h x\|_{H_p^1}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C_2\left(\|x\|_{H_p^1}\cdot h\right)^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\cdot\left(2\|x\|_{H_p^1}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} C_2\|x\|_{H_p^1}\cdot h^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} .$$

Теорема 4 доведена. ■

Зробимо три зауваження :

1. Добре відомо, що нерівності Надя-Колмогорова в „мультиплікативній" формі (6), (10) мають еквівалентну „адитивну" форму з вільним параметром. Зокрема, такою адитивною нерівністю є (15) .

2. Відмітимо, що в нерівності Надя (12) показник степеня при $\|x-\hat{x}_0\|_p$ дорівнює α_{cr} , тобто максимальний з можливих. Той факт, що його збільшити неможливо, виявився еквівалентним факту непокращуваності показника $1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ у відповідній теоремі вкладення (11) . Такий же зв'язок між непокращуваністю цих двох показників можна прослідити і в наступних узагальненнях цього результату на класи Ліпшиця.

3. Доведене твердження робить правдоподібною гіпотезу про те, що у загальному випадку для теорем вкладення (8), (9) повинні існувати еквівалентні формулювання у виді деяких нерівностей типу Надя. Відповідні результати викладені в наступних двох теоремах.

Теорема 5. *Нехай* $1\le p<q\le\infty$, $\beta > 1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. *Тоді наступні твердження* (16) *та* (17) *еквівалентні :*

1) $\exists C_1>0$, $\forall x\in H_p^\beta$, $\forall h>0$

$$\omega(x,h)_q \le C_1\|x\|_{H_p^\beta}\cdot h^{\beta-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}; \qquad (16)$$

2) $\exists C_2>0$, $\forall x\in H_p^\beta$

$$\|x-\hat{x}_0\|_q \le C_2\|x-\hat{x}_0\|_p^{1-\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\beta}}\cdot\|x\|_{H_p^\beta}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\beta}} . \qquad (17)$$

Теорема 6. *Нехай* $1\le p<q<\infty$, *а модуль неперервності* ω *задовольняє умову* $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q \frac{dt}{t} < \infty$.

Тоді наступні твердження (18) *та* (19) *еквівалентні :*

1) $\exists C_1>0$, $\forall x\in H_p^\omega$, $\forall h>0$

$$\omega(x,h)_q \le C_1\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\left[\int_0^h\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}; \qquad (18)$$

2) $\exists C_2>0$, $\forall x\in H_p^\omega$

$$\|x-\hat{x}_0\|_q \le C_2\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\left[\int_0^{h_0}\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}, \qquad (19)$$

де h_0 *з* $(0;1]$ *визначається умовою*

$$\omega(h_0)=\frac{\|x-\hat{x}_0\|_p}{\|x\|_{H_p^\omega}}. \qquad (20)$$

Легко бачити, що при $\omega(t)=t^\beta$, $\beta>1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ з Теореми 6 слідує твердження Теореми 5.

□ Доведення Теореми 6. Покажемо, що (18) $\Rightarrow$ (19).

Для $x\in H_p^\omega$ з (18) для $h\in(0;1]$ слідує, що $\|x-x_h\|_q\le$

$$\le\omega(x,h)_q\le C_1\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\left[\int_0^{h}\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Звідси, маючи на увазі (14), маємо :

$$\|x\|_q\le\|x\|_p\cdot h^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}+$$

$$+C_1\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\left[\int_0^{h}\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (21)$$

Це є „адитивна" форма аналогу нерівності Надя. Замінимо функцію x на функцію $x-\hat{x}_0$ і виберемо $h=h_0$ з умови (20). Зазначимо, що таке значення h_0 з $(0;1]$ дійсно існує :

так як $\|x-\hat{x}_0\|_p\le\omega(x;1)\le\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\omega(1)$, то $\omega(1)\ge\frac{\|x-\hat{x}_0\|_p}{\|x\|_{H_p^\omega}}$. Оскільки $\frac{\omega(t)}{t}\ge\frac{1}{2}\frac{\omega(h_0)}{h_0}$, $t\in(0;h_0]$, то

$$\left[\int_0^{h_0}\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}\ge\frac{1}{2}\frac{\omega(h_0)}{h_0}\left[\int_0^{h_0}\left(t^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}=$$

$$C_3\omega(h_0)h_0^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}=C_3\frac{\|x-\hat{x}_0\|_p}{\|x\|_{H_p^\omega}}h^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Використовуючи це в (21) для функції $x-\hat{x}_0$, отримаємо твердження (19).

В інший бік, з (19) слідує, що

$$\|x-\hat{x}_0\|_q\le C_2\|x\|_{H_p^\omega}\cdot\left[\int_0^{1}\left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}},$$

а звідси, в свою чергу, слідує (18) [2]. Теорема 6 доведена. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood.* Contribution to the arythmetic theory of series.- Proc. London Math. Soc. - 11, 2 .- 1912.- p.411-478.
2. П. Л. Ульянов „Вложение некоторых классов функций H_p^ω" // Ведомости АН СССР. Серия математики. 1968г. т.32., с. 649-686.
3. *В. Н. Габушин.* Неравенства для норм функций и их производных в метриках L_p. // *Матем. заметки.*- т.1, №3.- 1967.- с. 291-298.
4. *Б. Е. Клоц.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости. // *Матем. заметки.*- т.21, №1, 1977.- с.21-32.
5. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов „Неравенства для производных и их приложения", Київ, „Наукова думка", 2004р., 590с.
6. *A. Ligun.* Inequalities for upper bounds of functionals. // *Analisis Math.*- v.2, №1.- 1976.- p.11-40.
7. А. В. Бесов, В. П. Ильин, С. Н. Никольський „Интегральные представления функций и теоремы вложения", Москва, „Наука", 1975р., с.123-126, 236-252.
8. Н. П. Корнейчук „Экстремальные задачи теории приближения", Москва, „Наука", 1976р., с.94-104, 176-187.

пост. 03.04.06.