Применение теории марковских процессов в исследовании эффективности компьютерных сетей

П.Е. ПУСТОВОЙТОВ, СА’ДИ АХМАД АБДЕЛЬХАМИД САЕД АХМАД

Украина, Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Функционирование компьютерных сетей описывается моделью марковских случайных процессов с дискретным множеством состояний. Для решения задачи высокой размерности предлагается алгоритм фазового укрупнения состояний.

Функціонування комп’ютерних мереж описується моделлю марковських випадкових процесів з дискретною множиною станів. Для розв’язання задачі високої розмірності пропонується алгоритм фазового укрупнення станів.

Network functioning is described by markov random processes model with discreet number of states. To solve the high dimension problem the algorithm of the state phase enlargement was offered.

Постановка задачи. Компьютерная сеть решает совокупность задач по обслуживанию потоков заявок. Заявки генерируются различными источниками случайным образом или в случайные моменты времени и поступают на вход узла-приемника компьютерной сети Затем узлом-приемником они передаются свободному интеллектуальному узлу для инициализации процесса обслуживания полученной заявки. Если все интеллектуальные узлы в данный момент заняты, то вновь прибывшая заявка из узла приемника поступает в очередь для ожидания обслуживание (рис. 1).

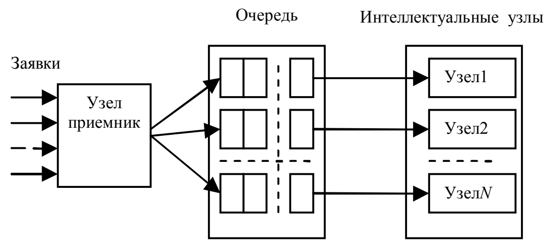


Рис. 1. Схема работы компьютерной сети по обслуживанию заявок

Функционирование компьютерной сети по обслуживанию потоков заявок может быть описано с помощью моделей многомерных непрерывных случайных процессов с дискретным множеством состояний.

Постулируем, что суммарный поток заявок на входе узла приемника, возникающий в результате суперпозиции нескольких потоков от различных источников, является марковским. Это допущение естественно и имеет следующее обоснование.

Будем считать, что каждый из потоков заявок, поступающих в компьютерную сеть, есть стационарный, ординарный случайный процесс, а количество источников генерации заявок достаточно велико. Если источники заявок имеют одинаковый приоритет, то они оказывают на суммарный процесс приблизительно равномерное влияние. Тогда, аналогично центральной предельной теореме, можно доказать, что при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных стационарных потоков с практически любым последействием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему. На практике достаточно сложить 4-5 потоков, чтобы получить поток, с которым можно оперировать как с простейшим [1].

Пусть в случайные моменты времени от разных источников на вход сети поступают заявки с интенсивностью λ_i, а интенсивность обслуживания заявок интеллектуальными узлами равна μ_j. Построим граф состояний и переходов для достаточно простой системы с тремя обслуживающими узлами, на вход которой поступает суперпозиция двух потоков (рис. 2).

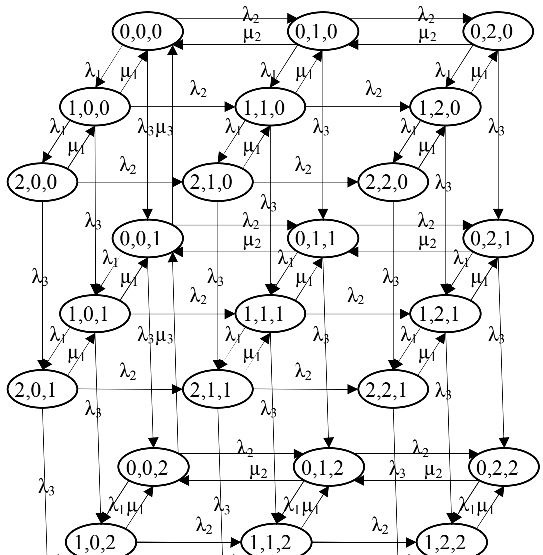


Рис. 2. Граф состояний и переходов марковской модели функционирования сети с тремя независимыми входящими потоками заявок, когда максимальное число заявок каждого типа в системе равно двум

В полученном графе вершинам соответствуют состояния системы. Каждому состоянию соответствует N-мерный вектор, компоненты которого отображают количество заявок, находящихся в очереди перед соответствующим узлом. При поступлении новой заявки или обработке уже поступившей, система переходит в другое состояние, соответствующее количеству заявок в очереди перед каждым узлом.

Для отыскания финального распределения вероятностей системы может быть использована система дифференциальных уравнений Колмогорова, на основе которой формируется система линейных алгебраических уравнений относительно искомых вероятностей состояний системы. При этом существенно, что для реальной компьютерной сети размерность задачи является очень большой и ее решение сопряжено с серьезными вычислительными проблемами. Граф состояний и переходов для простейшей сети, приведенный на рис. 2, хорошо иллюстрирует это замечание. В связи с этим цель работы состоит в обосновании практической методики решения задачи анализа реальных компьютерных сетей большой размерности.

Методика анализа марковских систем высокой размерности. Для решения задач большой размерности может быть применена технология фазового укрупнения состояний марковской цепи, реализующей декомпозиционный подход [2]. Суть метода состоит в следующем. Решение задачи является циклическим. Каждый цикл содержит некоторое число итераций. Рассмотрим содержание первого цикла. Множество всех состояний системы разбивается на подмножества и все подмножества, кроме одного, укрупняются. На первой итерации неукрупненным остается первое подмножество. В результате размерность задачи существенно снижается, что позволяет рассчитать вероятности состояний для такой системы (рис. 3 а).

На следующей итерации разукрупняется второе подмножество, а все остальные укрупняются. Рассчитываются вероятности состояний уже для такой системы (рис 3 б.).Вероятности пребывания системы в каждом из этих укрупненных состояний равны сумме вероятностей пребывания в состояниях соответствующего подмножества.

Таким образом, если укрупненное состояние I_q содержит состояния с номерами $i_{q1}, i_{q2}, \ldots, i_{qn_4}$, то вычисляемая на очередном шаге вероятность пребывания системы в этом укрупненном состоянии $\pi_{I_4}^{(k)}$ вычисляется по формуле

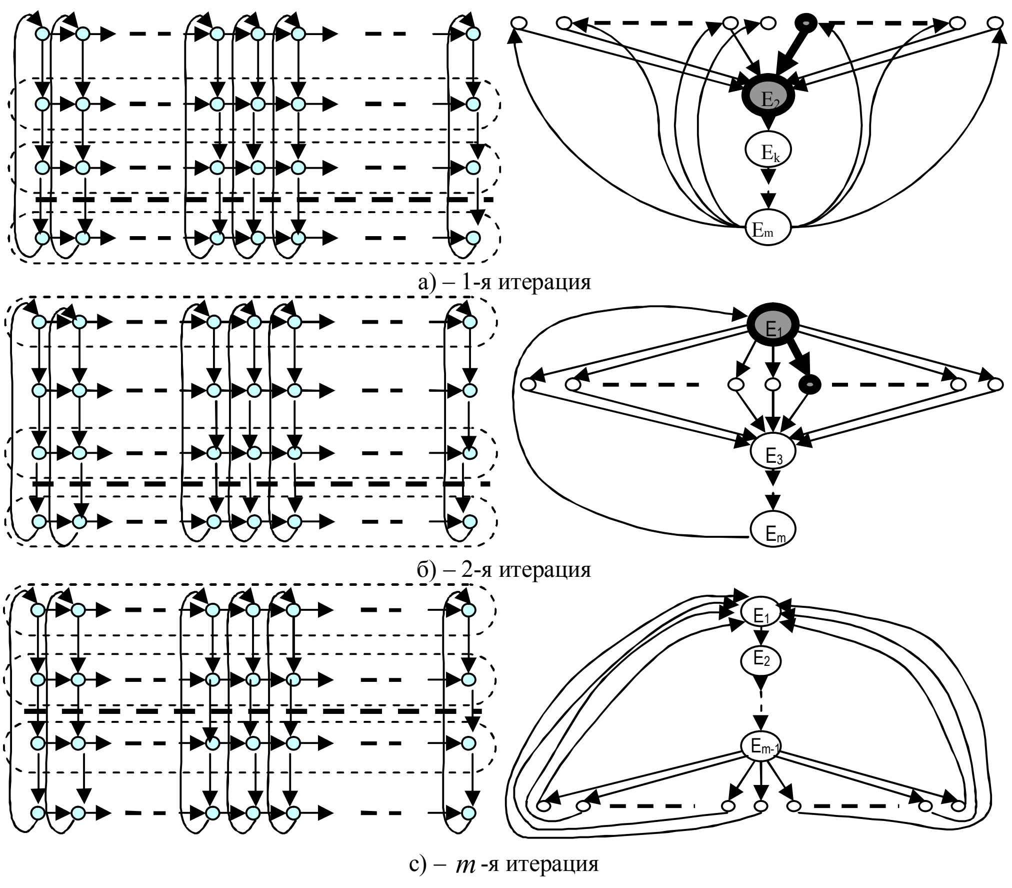
$$\pi_{I_4}^{(k)} = \sum_{s=1}^{n_4} \pi_{qs}^{(k)}, \quad q = 1,2,3,\ldots,\ell-1,\ell+1,\ldots,m. \qquad (1)$$

При этом получаем систему с множеством возможных состояний

$$\{I_1, I_2, \ldots, I_{\ell-1}, i_{\ell 1}, i_{\ell 2}, \ldots, i_{\ell n_1}, I_{\ell+1}, \ldots, I_m\}$$

и распределением вероятностей пребывания системы в этих состояниях

$$\widetilde{\pi}^{(k)} = \left(\pi_{I_1}^{(k)}, \pi_{I_2}^{(k)}, \ldots, \pi_{I_{\ell-1}}^{(k)}, \pi_{\ell 1}^{(k)}, \pi_{\ell 2}^{(k)}, \ldots, \pi_{\ell n_\ell}^{(k)}, \pi_{I_{\ell+1}}^{(k)}, \ldots, \pi_{I_m}^{(k)}\right).$$



а) – 1-я итерация

б) – 2-я итерация

с) – m-я итерация

Рис. 3. Метод фазового укрупнения состояний

Такое распределение будем называть групповым.

Рассчитаем вероятности переходов в этой новой системе. Численное значение этих вероятностей зависит от типа соответствующих состояний.

Вероятности перехода из состояний выделенного подмножества ℓ в состояния этого же подмножества остаются теми же, какими они были в исходной матрице W , то есть

$$\widetilde{p}^{(k)}_{\ell s_1,\ell s_2} = p_{\ell s_1,\ell s_2},\ (\ell s_1,\ell s_2)\in E_\ell .$$

Вероятность перехода из какого-либо не укрупненного состояния $i_{\ell s}$ в какое-либо укрупненное состояние I_v равно сумме истинных вероятностей переходов из этого не укрупненного состояния $i_{\ell s}$ во все состояния подмножества E_v, то есть

$$\widetilde{p}^{(k)}_{\ell s,I_V} = \sum_{q=1}^{n_V} p_{\ell s,vq},\ \ell s\in E_\ell,\ v = 1,2,...,\ell-1,\ell+1,...,m . \quad (2)$$

Вероятность перехода из укрупненного состояния I_v в какое-либо не укрупненное состояние $i_{\ell s}$ равно сумме произведений истинных вероятностей переходов $p_{vq,\ell s}$ из состояний подмножеств E_v в состояние $i_{\ell s}$ на условные вероятности $W^{(k)}_{vq}$ пребывания системы в этих состояниях подмножества E_v. В свою очередь, эта условная вероятность $W^{(k)}_{vq}$ пребывания системы в состоянии i_{vq} подмножества E_v вычисляется как отношение вероятности пребывания в этом состоянии, соответствующей очередному полученному полному распределению, к сумме таких вероятностей для всех состояний подмножества. Таким образом

$$\widetilde{p}^{(k)}_{Iv,\ell s} = \sum_{q=1}^{n_v} p_{vq,\ell s}\cdot W^{(k)}_{Vq} = \sum_{q=1}^{n_v} p_{vq,\ell s}\cdot\frac{\pi^{(k)}_{vq}}{\sum_{q=1}^{n_v}\pi^{(k)}_{vq}} . \quad (3)$$

Наконец, вероятность перехода из какого-либо укрупненного состояния I_{v_1} в другое укрупненное состояние I_{v_2} вычисляется как сумма вероятностей перехода системы из укрупненного состояния I_{v_1} во все состояния, входящие в укрупненное состояние I_{v_2}, то есть

$$\widetilde{p}^{(k)}_{Iv_1 Iv_2} = \sum_{q_2=1}^{n_{v_2}}\sum_{q_1=1}^{n_{v_1}} p_{v_1 q_1, v_2 q_2}\cdot\frac{\pi^{(k)}_{v_1 q_1}}{\sum_{q_1=1}^{n_{v_1}}\pi^{(k)}_{v_1 q_1}} . \quad (4)$$

Таким образом, по формулам (1)–(4) рассчитывается очередное групповое распределение вероятностей пребывания системы на множестве полученных после укрупнения состояний $\widetilde{\pi}^{(k)}$ и соответствующая очередному этапу укрупнения матрица вероятностей переходов

$$\widetilde{W}^{(k)} = \left(\widetilde{p}^{(k)}_{ij}\right),\ (i,j)\in\{I_1,I_2,..I_{\ell-1},i_{\ell_1},i_{\ell_2},...i_{\ell n_\ell},I_{\ell+1},...I_m\}. \quad (5)$$

Подготовительные расчеты закончены. Теперь вычисляем новое групповое распределение вероятностей по формуле

$$\widetilde{\pi}^{(k+1)} = \left(\pi^{(k+1)}_{I_1},\pi^{(k+1)}_{I_2},...\pi^{(k+1)}_{I_{\ell-1}},\pi^{(k+1)}_{\ell 1},\pi^{(k+1)}_{\ell 2},...,\right.$$
$$\left.,\pi^{(k+1)}_{\ell n_\ell},\pi^{(k+1)}_{I_{\ell+1}},...,\pi^{(k+1)}_{I_m}\right) = \widetilde{\pi}^{(k)}\widetilde{W}^{(k)} . \quad (6)$$

Полученное групповое распределение используем для получения нового полного распределения

$$\pi^{(k+1)} = \left(\left(\pi^{(k+1)}_{11},\pi^{(k+1)}_{12},...,\pi^{(k+1)}_{1n_1}\right),..,\right.$$
$$\left.\left(\pi^{(k+1)}_{\ell 1},\pi^{(k+1)}_{\ell 2},...,\pi^{(k+1)}_{\ell n_\ell}\right),...,\left(\pi^{(k+1)}_{m1},\pi^{(k+1)}_{m2},...,\pi^{(k+1)}_{mn_m}\right)\right).$$

Компоненты этого распределения вычисляются по формулам

$$\pi^{(k+1)}_{\ell s} = \widetilde{\pi}^{(k+1)}_{\ell s},\ s = 1,2,...,n_\ell , \quad (7)$$

$$\pi^{(k+1)}_{vq} = \widetilde{\pi}^{(k+1)}_{v}\cdot\frac{\pi^{(k)}_{vq}}{\sum_{q=1}^{n_v}\pi^{(k)}_{vq}}, \quad (8)$$

$$v = 1,2,...,\ \ell-1,\ell+1,...,\ m,\ q = 1,2,...,\ n_v .$$

Итерации повторяются до тех пор, пока не будет разукрупнено последнее подмножество (рис. 3в.). Возникающее в результате распределение вероятностей сравнивается с полученным в конце предыдущего цикла. Решение продолжается до тех пор, пока разница между вероятностями пребывания системы в состояниях с одинаковыми индексами в двух соседних циклах превосходит наперед заданную малую величину ε .

Принципиальное достоинство описанной методики состоит в том, что она позволяет исходную сложную задачу высокой размерности преобразовать к последовательности задач существенно меньшей размерности, решение каждой из которых уже не создает серьезных вычислительных проблем.

Выводы. В работе предложена простая практическая методика анализа многовходовых и многоканальных компьютерных сетей. Методика реализует технологию декомпозиции сложной задачи к совокупности более простых. Описанная методика может быть использована для анализа любых марковских систем высокой размерности. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение иерархических процедур фазового укрупнения, необходимость которых возникнет при исследовании систем сверхвысокой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М.: ГИФМЛ, 1962. -564с.
2. Раскин Л.Г., Серая О.В., Пустовойтов П.Е. Иерархический алгоритм фазового укрупнения состояний для системы высокой размерности // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. -№7.-Т.2.- с.49-52.

пост. 28.02.06.