

## Вплив руйнування троса на стан гумотросової стрічки

I.В. БЕЛЬМАС, Г.І. ТАНЦУРА

Дніпродзержинський державний технічний університет

Побудована динамічна модель гумотросової стрічки в якій руйнується трос. В замкнутому вигляді отримані значення деформацій та сил розтягу тросів, що виникають внаслідок розриву довільного троса в перерізі його закріплення.

Построенная динамическая модель резинотросовой ленты, в которой разрывается трос. В замкнутом виде получены значения деформаций и сил растяжения тросов, которые появляются в результате разрыва произвольного троса в месте его крепления.

The built dynamic model of ribbon in which collapses rope. In the reserved kind there are the got values of deformations and force in ropes, which arise up at the break of arbitrary to the rope in the cut of his fixing.

**Актуальність роботи.** Гумотросові стрічки (ГТС) та їх конструктивні аналоги – канати широко використовують на підйомно-транспортних машинах. Вони мають систему паралельно розташованих в одній площині тросів завулканізованих в гумову оболонку. В процесі експлуатації такої конструкції троси можуть руйнуватися. В мить руйнування тросу довжина стрічки змінюється. Це впливає на динаміку машини, розподіл напружень в стрічці. Побудова виразу для визначення впливу розриву троса в стрічці на її напружено-деформований стан (НДС) актуальна науково-технічна задача, оскільки останній суттєво впливає на безпеку експлуатації машини.

**Сучасний стан питання.** Дослідженнями напруженого стану ГТС з ушкодженими тросами присвячено роботи багатьох вчених. В цих роботах розроблена математична модель стрічки, визначено її НДС за наявності ушкоджених тросів [1]. Не досліджено її НДС під час розриву одного з тросів.

**Постановка задачі.** В роботі в лінійній постановці розглянемо напружено-деформований стан пружної на розтяг ГТС обмеженої довжини, навантаженої силою розтягу, що пересувається без інерції разом з точкою прикладення. Троси в стрічці будемо розглядати як стрижні. Розподілену масу троса будемо вважати рівною розподіленій масі стрічки віднесеної до кількості тросів в ній. Реологічні властивості елементів гумотросової стрічки враховувати не будемо.

На конвеєрі стрічка може бути розташована горизонтально, з ухилом. На підйомній машині – вертикально. Розглянемо випадок довільного розташування стрічки у просторі. Побудуємо рівняння рівноваги тросів в канаті з урахуванням дії сил інерції. Аналітичним шляхом розв'яжемо систему рівнянь рівноваги тросів – отримаємо вирази для переміщень та внутрішніх сил розтягу тросів.

**Основний зміст.** Нехай відрізок стрічки довжиною  $L$  (рис. 1) нерухомо зашпеленої верхнім краєм. Будемо вважати, що стрічка навантажена силою  $S$ , має  $N$  тросів, в ній руйнується  $j$ -тий трос, вісь  $x$  спрямуємо вздовж стрічки, троси стрічки нахилені до вертикалі під кутом  $\alpha$

Граничні та початкові умови:

а) в перерізі

$$x=0 \begin{cases} t=0 & u_k=0, & v_k=0, \\ t>0 & \begin{cases} u_k=0 & k \neq j, \\ u_k=U_0 & k = j, \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

б) коли

$$x \rightarrow \infty \quad u_k = u_{k \pm 1} \wedge P_k = \frac{T}{N}, \quad (2)$$

де  $t$  – поточний час;  $v_k$ ,  $u_k$  – швидкість та переміщення  $k$  – того троса в канаті;  $-U_0$  – зазор, що утворюється внаслідок розриву троса;  $p_k$  – внутрішнє зусилля, що виникає в тросі;  $1 \leq k \leq N$ .

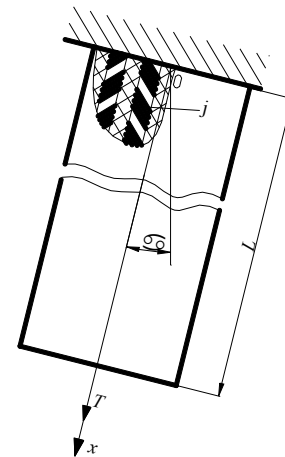


Рис. 1. Розрахункова схема стрічки

Для визначення напруженого стану канату з окремого троса вирізьмо відрізок довжиною  $dx$  (рис. 2).

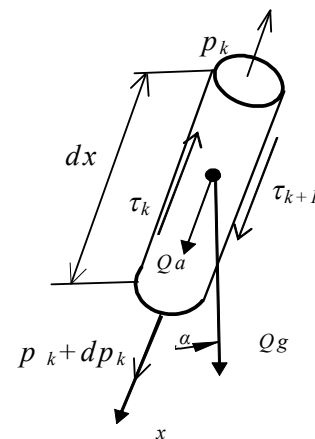


Рис. 2. Відрізок троса елементарної довжини

Умова рівноваги відрізка  $k$  – того троса

$$d\tau_k + [d(\tau_{k+1} - \tau_k)]dx + Q[g \cos(\alpha) + a] = 0, \quad (3)$$

де  $\tau_k$  – середнє дотичне напруження зсуву, що виникає в гумі;  $Q$  – маса відрізка троса;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $a$  – прискорення центру маси відрізка.

Масу відрізка канату виразимо через питому масу  $\rho$ , а дотичні напруження та прискорення – через переміщення

$$Q = \rho dx, \quad (4)$$

$$\tau_k = \frac{G k_G}{h} (u_k - u_{k-1}), \quad (5)$$

$$a = \frac{d^2 u_k}{dx^2}, \quad (6)$$

де  $k_G$  – коефіцієнт, що враховує форму гуми розташованої між тросами  $G$  – модуль зсуву гуми,  $h$  – відстань між тросами.

Закон Гука

$$p_k = EF \frac{du_k}{dx}. \quad (7)$$

Із залежностей (3) – (7) маємо неоднорідне рівняння рівноваги

$$EF \frac{d^2 u_k}{dx^2} + \rho \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{Gd}{h} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) = -\rho g \cos(\alpha). \quad (8)$$

Рівняння прийнятне для усіх тросів, за винятком крайніх. Для них рівняння мають вигляд

$$EF \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{Gd}{h} (u_2 - u_1) = -\rho g, \quad (9)$$

$$EF \frac{d^2 u_N}{dx^2} + \rho \frac{d^2 u_N}{dt^2} + \frac{Gd}{h} (u_{N-1} - u_N) = -\rho g. \quad (10)$$

Від координати  $x$  перейдемо до безрозмірної координати

$$\chi = \frac{x}{L}.$$

Для цього помножимо складові рівняння (8) – (10) на  $L^2$ . В результаті маємо

$$EF \frac{d^2 u_k}{d\chi^2} + \rho L^2 \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{G d L^2}{h} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) = -\rho g L^2 \cos(\alpha). \quad (8)$$

$$EF \frac{d^2 u_1}{d\chi^2} + \rho L^2 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{G d L^2}{h} (u_2 - u_1) = -\rho g L^2, \quad (9)$$

$$EF \frac{d^2 u_N}{d\chi^2} + \rho L^2 \frac{d^2 u_N}{dt^2} + \frac{G d L^2}{h} (u_{N-1} - u_N) = -\rho g L^2. \quad (10)$$

З урахуванням характеру деформування крайніх тросів розв'язок однорідної системи рівнянь (8) – (10) будемо шукати у формі

$$u_k = \sum_{n=1}^N \cos(\beta_n (k - 0.5)) u(\chi) u(t) + \varphi(\chi) \phi(t), \quad (11)$$

де  $\beta_n = \pi \frac{n}{N}$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Скориставшись методом Фур'є, отримаємо

$$u(x) = e^{\pm \mu_{n,m} \chi}, \quad (12)$$

$$\varphi(\chi) = e^{\pm \mu_{0,m} \chi}, \quad (13)$$

$$u(t) = e^{\pm \omega_m t}, \quad (14)$$

$$\phi(t) = u(t). \quad (15)$$

де

$$\mu_{n,m} = \sqrt{(2m-1)^2 + 2 \frac{G d L^2}{h EF} (1 - \cos(\beta_n))};$$

$$1 \leq m \leq \infty, 1 \leq n \leq N-1; \omega_m = \sqrt{\frac{EF}{\rho L^2}} (2m-1).$$

Окремий розв'язок неоднорідної системи (8) – (10) рівнянь знайдемо врахувавши навантаження зумовлене питомою масою троса та зовнішнім навантаженням

$$u^* = -\frac{\rho g L^2}{EF} \cos(\alpha) \frac{\chi^2}{2} + \frac{(S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)) \chi}{N EF} + b, \quad (16)$$

де  $b$  – невідома незмінна.

З урахуванням умови, що на час  $t=0$  деформації тросів канату зумовлені лише розтягом від дій власної маси та зовнішнього навантаження, а динамічні переміщення дорівнюють нулю, прийнемо розв'язок в переміщеннях у формі

$$u_k = \sum_{n=1}^{N-1} \cos(\beta_n (k - 0.5)) r_n \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m} e^{\mu_{n,m} \chi} + B_{n,m} e^{-\mu_{n,m} \chi}) \times \\ \times \sin(\omega_m t) + z \sum_{m=1}^{\infty} (A_{0,m} e^{\mu_{0,m} \chi} + B_{0,m} e^{-\mu_{0,m} \chi}) \sin(\omega_m t) + b - (17) \\ - \frac{\rho g L^2}{EF} \cos(\alpha) \frac{\chi^2}{2} + \frac{(S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)) \chi}{N EF},$$

де  $A_{n,m}$ ;  $B_{n,m}$  – невідомі сталі;  $1 \leq n \leq N-1$ ;  $1 \leq m \leq \infty$ .

Скориставшись законом Гука (7), визначимо внутрішні зусилля в тросах

$$p_k = \left[ \sum_{n=1}^{N-1} \cos(\beta_n (k - 0.5)) \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m} e^{\mu_{n,m} \chi} - B_{n,m} e^{-\mu_{n,m} \chi}) \times \right. \\ \times r_n \mu_{n,m} \sin(\omega_m t) + \\ \left. + z \sum_{m=1}^{\infty} (A_{0,m} e^{\mu_{0,m} \chi} - B_{0,m} e^{-\mu_{0,m} \chi}) \mu_{0,m} \sin(\omega_m t) \right] EF - \\ - \rho g L^2 \cos(\alpha) \chi + \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{N}. \quad (18)$$

Умову нерухомості тросів канату до руйнування окремого тросу ( $v_k = 0$ ) замінимо умовою рівності нулю кінетичної енергії усього відрізка канату на цей час. Розв'язок задачі шукаємо у вигляді суми лінійно незалежних переміщень. Відповідно кінетичну енергію визначимо для кожної складової, що впливає на її значення.

Перша сума переміщень усіх тросів в залежності (17), відповідно й швидкостей та кінетичних енергій окремих тросів в канаті дорівнює нулю. Відповідно, на величину кінетичної енергії впливають лише складові другої суми у виразі (17). Ці енергії становлять

$$E_{A_{0,m}} = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[ \frac{d}{dt} (A_{0,m} e^{\mu_{0,m} z} \sin(\omega_m t)) \right]^2 d\chi =$$

$$= A_{0,m}^2 \frac{e^{3\mu_{0,m}} - 1}{3\mu_{0,m}},$$

$$E_{B_{0,m}} = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[ \frac{d}{dt} (B_{0,m} e^{-\mu_{0,m} z} \sin(\omega_m t)) \right]^2 d\chi =$$

$$= B_{0,m}^2 \frac{e^{-\mu_{0,m}} - 1}{\mu_{0,m}}.$$

Умова рівності нулю енергії

$$A_{0,m}^2 \frac{e^{3\mu_{0,m}} - 1}{3\mu_{0,m}} + B_{0,m}^2 \frac{e^{-\mu_{0,m}} - 1}{\mu_{0,m}} = 0. \quad (20)$$

На кінці канату  $x = L$  ( $\chi = 1$ ) деформації усіх тросів рівні, тому

$$A_{n,m} e^{\mu_{nm}} + B_{n,m} e^{-\mu_{nm}} = 0, \quad 1 \leq m \leq \infty. \quad (21)$$

З умови характеру деформування канату в перерізі  $x=0$  коли час  $t \neq 0$  маємо

$$r_n \sum (A_{n,m} + B_{n,m}) = \frac{2}{N} U_0 \cos(\beta_n (j - 0.5)), \quad (22)$$

$$z \sum_{m=1}^{\infty} (A_{0,m} + B_{0,m}) = \frac{1}{N} U_0. \quad (23)$$

Умова відсутності навантаження в ушкодженому тросі в перерізі  $\chi=0$  коли час  $t \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \cos(\beta_n (j - 0.5)) \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m} - B_{n,m}) \times$$

$$\times r_n \mu_{nm} + z \sum_{m=1}^{\infty} (A_{0,m} - B_{0,m}) \mu_{0,m} \sin(\omega_m t) =$$

$$= - \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{EFN}.$$

Зусилля розтягу ушкодженого троса в залежності від часу мають вигляд

$$p_j = \begin{cases} \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{N} & \text{êî èè} \quad -\infty \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{êî èè} \quad -\infty \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Значення  $\omega_m$  визначають періоди коливань тросів в стрічці  $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$ . За час, що дорівнює максимальному значенню періоду коливань зреалізуються усі механічні коливання та в прийнятій постановці будуть повторюватися тобто функція (25) після руйнування троса стає періодичною. На першому періоді її зміни вона має вигляд

$$p_j = \begin{cases} \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{N} & \text{êî èè} \quad -\frac{T}{2} < t < 0, \\ \frac{1}{2} \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{N} & \text{êî èè} \quad t = 0, \\ 0 & \text{êî èè} \quad 0 < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (26)$$

Розкладемо її в суму двох непарних рядів на інтервалі  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ . Звідки маємо

$$(A_{n,m} - B_{n,m}) r_n \mu_{nm} =$$

$$= 2 \frac{S + N \rho g L^3 \cos(\alpha)}{2m - 1} + z (A_{0,m} - B_{0,m}) \mu_{0,m} \quad ]EFN = \quad (27)$$

$$= S + N \rho g L^3 \cos(\alpha).$$

Отримані залежності (20) – (27) дозволяють знайти невідомі сталі та установити параметри напружено-деформованого стану гумотросової стрічки, відповідно можуть бути використані для дослідження впливу поривів тросів на її напружено-деформований стан.

Характер розподілу зусиль між тросами для стрічки типу ГТК 3150 відтворено на рисунку 3. При цьому кількість тросів в стрічці прийнято рівною чотирьом. На ньому показані внутрішні зусилля розтягу тросів віднесені до середніх значень їх навантажень до руйнування першого троса.

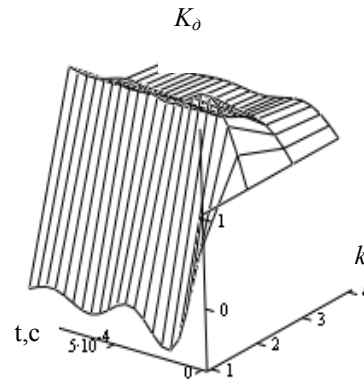


Рис. 3. Залежність значень коефіцієнтів концентрації напружень  $K_0$  від часу після руйнування троса

В практиці такі відносні зусилля називають коефіцієнтами концентрації напружень (статичних, динамічних). Відповідно на графіку вони позначені  $K_0$ . Розподіл показано для перерізу  $x=0$ , де зусилля мають екстремальні значення. Час  $t$  в секундах. Номери тросів позначені  $k$ .

**Висновки.** Отримані вирази переміщень та внутрішніх зусиль розтягу тросів гумотросової стрічки (канату) дозволяють визначити її НДС у мить розриву одного з тросів. Визначений напружений стан повинен бути врахований конструкцією машини та при визначення допустимих запасів її міцності. Отримані результати будуть використані при дослідженнях впливу характеру деформування канату на динаміку машини та мають бути враховані в її конструкції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Танцура Г.І. Модель конвеєрної стрічки з несучільною прокладкою // Математичне моделювання. Науковий журнал. – 2000. – №5. – С. 45-47.

пост. 08.09.06.